

مقایسه روش‌های بالادستی تفاضل شار و جدا کردن شار در جریان‌های پایا و ناپایا

علی لطفیان
دانشجوی دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد
lotfian.ali@mail.um.ac.ir

عدنان محمدی
دانشجوی دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد
admohammadi@mail.um.ac.ir

محمدحسن جوارشکیان
عضو هیئت علمی مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد
javareshkian@um.ac.ir

چکیده

در این پژوهش سه روش عددی برای درونیابی (Roe و AUSM⁺ و HLL) که از محبوب‌ترین روش‌های حل بالادستی میدان تراکم پذیر هستند جهت بررسی عملکرد آنها در جریان‌های پایا و ناپایا از نقطه نظر میزان پخش و پراش عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. شبیه‌سازی‌های عددی تدوین شده در این پژوهش جریان یک بعدی ناپایا در لوله ضربه و نازل همگرا-واگرا است. نتایج این پژوهش نکات قابل تاملی از رفتار روش‌های عددی منتخب در جریان‌های پایا و ناپایا را مبرهن می‌سازد. نتایج حاکی از آن است که با اغماض از نوسانات ناچیز روش AUSM⁺ در جریان ناپایا، این روش بهترین عملکرد را در ناپیوستگی‌های میدان حل دارد. اما در جریان پایا و در جایگاه تسخیر ناپیوستگی موجود در میدان، روش Roe بهترین عملکرد را داراست. به‌علاوه اینکه در دسترس نبودن اتلافات عددی کافی در تسخیر موج ضربه‌ای موجود در نازل همگرا-واگرا منجر به نوساناتی در روش‌های HLL و AUSM⁺ شده است.

کلمات کلیدی: روش‌های بالادست، AUSM⁺، روش‌های تفاضل تقریبی، Roe، HLL.

۱- مقدمه

روش‌های دینامیک سیالات محاسباتی^۱ بر اساس قوانین جرم، ممنتوم و بقای انرژی است. راه حل محاسبه شده مقادیر متغیرهای جریان، مانند سرعت، فشار، دما، تراکم، غلظت و ... را در هزاران موقعیت در میدان حل مشخص می‌کند. روش‌های CFD را می‌توان برای بررسی طرح‌های مختلف تجهیزاتی و یا مقایسه عملکردی در شرایط عملیاتی مختلف بکار گرفت. مطالعات برای بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر رفتار جریان می‌تواند با استفاده از روش‌های CFD انجام شود. همچنین اجازه می‌دهد تا مفاهیم مختلف را در یک محیط مجازی مورد بررسی قرار گیرد، بدون اینکه یک مدل فیزیکی ساخته شود. به‌طور کلی روش‌های CFD برای درک جریان کلی و رفتار انتقال حرارت استفاده می‌شوند. در این مقاله سه روش عددی مورد بررسی قرار گرفته شد: روش اول تفاضل تقریبی رو^۲، که یک حل تقریبی مسئله ریمان بر اساس طرح گودینو^۳ است و شامل پیدا کردن تخمینی برای شار عددی بین دو سلول یا شار گودینو است، روش دوم روش AUSM⁺، که بر اساس مفهوم جدایش شارها است و انگیزه‌ای برای ارائه رویکرد جایگزین به سایر روش‌های پیش بینی شده مانند روش گودینو و روش‌های تفاضل تقسیمی رو است؛ روش سوم روش HLL که مخفف Harten-Lax-Van Leer است، که برای محاسبه شار گودینو است.

^۱ . Computational fluid dynamics (CFD)

^۲ . Roe

^۳ . Godunov

از زمان معرفی طرح گودینو، حل کننده‌های مسئله ریمان نوع-گودینو پیشرفت‌های چشم‌گیری را شاهد بودند [۱-۳]. امروزه طرح‌های گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد که آن‌ها را می‌توان به چهار دسته طبقه بندی کرد: روش‌های تفاضل تقسیمی شار^۱ نوع-رو [۴-۶]، روش‌های تجزیه بردار شار^۲ [۷، ۸]، روش‌های نوع-AUSM [۹-۱۳] و روش‌های هارتن-لکس-وَن لیر^۳ [۱۴-۱۸]. در میان این روش‌ها، روش‌های مرکزی به وضوح قادر به حل دقیق میدان‌های خطی متوسط مشخصه نیستند و به شدت به مقادیرهای وابسته به مسئله بستگی دارند [۱۹]. روش‌های نوع-رو از نقاط ضعف روش‌های مرکزی همراه با توانایی ضبط ناپیوستگی‌های تماسی جلوگیری می‌کند. با این حال، اکثر روش‌های مرسوم نوع-رو شرط انتروپی را در حل امواج غیر خطی امواج انبساطی گسترش می‌دهند. برای اجتناب از این شکست غیرفیزیکی، محققان باید از یک تصحیح کننده انتروپی استفاده کنند [۲۰-۲۲]. علاوه بر این، اکثر روش‌های مرسوم نوع-رو تمایل به نشان دادن پدیده‌های غیر معمولی نزدیک موج‌های ضربه‌ای قوی و یا به دست آوردن راه‌حل‌های غیر فیزیکی در سرعت‌های پایین، را دارند [۶، ۲۳]. روش‌های تجزیه بردار شار، مانند استیگر^۴ و وارمینگ^۵ [۷] و روش‌های تجزیه بردار شار وَن لیر [۲۴]، قوی تر و زمانگیر از روش‌های رو هستند. با این حال، این روش‌ها در حل ناحیه‌های لایه برشی بیش از اندازه پخش عددی^۶ دارند. روش‌های نوع-AUSM، که ابتدا توسط لیو^۷ پیشنهاد شد، با توجه به تحلیل بسیاری از محققان توانستند قوی‌تر، دقیق‌تر و کارآمدتر ظاهر شوند [۲۵]. از سوی دیگر، روش‌های نوع-HLL، مانند روش HLLC و روش HLLC نیز نیازی به محاسبه ساختار خاصی از ژاکوبین شار مثل روش‌های نوع-AUSM ندارند. بنابراین، این روش‌ها انعطاف پذیری بیشتری را برای حل نه تنها معادلات اویلر، بلکه سایر سیستم‌های بزرگ قوانین بقای هذلولوی فراهم می‌کند. بر اساسی این نکته جذاب، بسیاری از محققان مطالعاتی بر روی روش‌های HLL انجام داده اند. به عنوان مثال اینفلت^۸ روش HLL را بهبود داد و روش HLLC را پیشنهاد داد [۵]. روش HLL تقریباً راه حل مسئله ریمان را با دو موج سیگنال تقریب می‌زند و خواص همگن شار توسط این روش الزامی نیست. هدف از تحقیق پژوهش حاضر، بررسی و مقایسه نتایج تکنیک‌های Roe، AUSM⁺ و HLL در بررسی جریان ناپایا درون لوله مولد موج ضربه‌ای است. با کنترل پخش مربوط به امواج برشی در مجاورت موج ضربه‌ای در سرعت‌های پایین، طرح HLL سطح بالایی از دقت و کاربرد را دارد.

۲- معادلات حاکم

معادلات اولر معمولاً برای توصیف حرکت در جریان‌های غیر لزج استفاده می‌شود. این معادلات را می‌توان در شکل انتگرالی زیر نوشت [۲۶، ۲۷]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \mathbf{q} d\Omega + \sum_{i \in \partial\Omega} \mathbf{f}_{c,i}(\mathbf{q}) \Delta S_i = 0 \quad (1)$$

که در آن \mathbf{q} بردار متغیرهای بقایی، Ω حجم، $\partial\Omega$ مرزهای حجمی را مشخص می‌کند، ΔS_i نشان دهنده سطح رابط S_i است و $\mathbf{f}_{c,i}$ بردار شار غیر لزج در نقطه مرکزی سطح رابط S_i را نشان می‌دهد. در حالت یک بعدی می‌توان نوشت:

$$\mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho e)^T \quad (2)$$

¹ . Flux difference splitting (FDS) schemes
² . Flux Vector Splitting (FVS) schemes
³ . Harten, Lax, van Leer (HLL) schemes
⁴ . Steger
⁵ . Warming
⁶ . Numerical dissipation
⁷ . Lio
⁸ . Einfeldt

$$f_C(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix} \quad (۳)$$

که در آن چگالی، ρ مولفه سرعت، p فشار استاتیکی و e مقدار انرژی کل است. در این تحقیق، معادلات اولر در جریان ناپایای یک بعدی با استفاده از طرح‌های اشاره شده، حل شده است.

۳- نحوه محاسبه شار

برای محاسبه شار در سطح سلول از روش های مختلف استفاده شده است که در زیر به توضیح تک تک پرداخته شده است.

۳-۱- محاسبه شار در روش Roe

در این روش شار عددی بین سلول j و $j+1$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\hat{F}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_j + F_{j+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 |\lambda_k| \partial w_k \hat{r}^k \quad (۴)$$

که در رابطه فوق λ_k مقادیر ویژه هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\lambda_1 = \hat{u}, \quad \lambda_2 = \hat{u} + \hat{c}, \quad \lambda_3 = \hat{u} - \hat{c},$$

$$\hat{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \hat{c} = \sqrt{(\gamma - 1) \left(\hat{H} - \frac{\hat{u}^2}{2} \right)}, \quad \hat{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (۵)$$

و همچنین $\partial w_k \hat{r}^k$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\partial w_1 = \partial \rho - \frac{\partial p}{\hat{c}^2}, \quad \partial w_2 = \partial u - \frac{\partial p}{\hat{\rho} \hat{c}}, \quad \partial w_3 = - \left(\partial u - \frac{\partial p}{\hat{\rho} \hat{c}} \right), \quad \hat{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R}$$

$$\hat{r}^1 = \begin{vmatrix} 1 \\ \hat{u} \\ \hat{u}^2 \end{vmatrix}, \quad \hat{r}^2 = \begin{vmatrix} 1 \\ \hat{u} + \hat{c} \\ \hat{H} + \hat{u} \hat{c} \end{vmatrix} \frac{\hat{\rho}}{2\hat{c}}, \quad \hat{r}^3 = \begin{vmatrix} 1 \\ \hat{u} - \hat{c} \\ \hat{H} - \hat{u} \hat{c} \end{vmatrix} \frac{\hat{\rho}}{2\hat{c}} \quad (۶)$$

در روش Roe، متغیرهای اولیه در سطوح سلول به صورت ترکیبی از اطلاعات ذخیره شده در دو طرف سطح سلول، با یک میانگین‌گیری چگالی مبنا تعیین می‌شود که اصطلاحاً شرط میانگین‌گیری رو نامیده می‌شود. این روش برخلاف روش تجزیه بردار شار که بردار شار را تفکیک می‌کند، به تفکیک بردار تفاضل شار می‌پردازد (به این دلیل است که روش رو در گروه روشهای تجزیه تفاضل شار قرار می‌گیرد). این دو مشخصه روش رو، آن را به عنوان ابزاری بسیار دقیق برای حل معادلات ناویر استوکس و اوپلر تبدیل کرده است. به علاوه علت اصلی فراگیری روش رو، سادگی این روش است.

۳-۲- محاسبه شار در روش AUSM⁺

این روش بر اساس روش AUSM توسعه یافته است. روش AUSM بر این پایه بنا شده است که موج‌های جابجایی و آکوستیک از یکدیگر متمایز هستند. بنابراین ترم شار غیرلزج F به دو قسمت جابجایی و فشار تقسیم می‌شود که شار F بین سلول j و $j+1$ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$F_{j+\frac{1}{2}} = F_{j+\frac{1}{2}}^c + F^p \quad (۷)$$

که شار ناشی از جابجایی ($F_{j+\frac{1}{2}}^c$) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^c = M_{j+\frac{1}{2}} \cdot c_{j+\frac{1}{2}} + \Phi_{j+\frac{1}{2}} \quad (۸)$$

که در آن $M_{j+\frac{1}{2}}$ عدد ماخ صفحه مورد نظر و $\Phi_{j+\frac{1}{2}} = (\rho, \rho u, \rho h_t)$ است و شار ناشی از فشار عبارتست از:

$$F^p = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

در روش AUSM این مقادیر بین دو سلول (روی وجه) را به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} M_{j+\frac{1}{2}} &= M_j^+ + M_{j+1}^-, & M_j^\pm &= M_j^\pm(M_j) \\ p_{j+\frac{1}{2}} &= p_j^+ p_j + p_{j+1}^- p_{j+1}, & p_j^\pm &= p_j^\pm(M_j) \end{aligned} \quad (10)$$

حال فارغ از تعریف فرمول‌های M_j^\pm و p_j^\pm در روش AUSM باید توجه داشت که تفاوت این روش با روش AUSM⁺ در تعریف همین عبارت‌ها است. بنابراین به تعریف این روش‌ها در رابطه‌ی بهینه‌شده‌ی AUSM⁺ پرداخته می‌شود:

$$M_j^\pm(M_j) = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M_j \pm 1)^2 \pm \beta (M_j^2 - 1)^2, & |M_j| \leq 1 \\ \frac{1}{2} (M_j \pm |M_j|) & , \quad |M_j| > 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$p_j^\pm(M_j) = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M_j \pm 1)^2 (2 \mp M_j) \pm \alpha M_j (M_j^2 - 1)^2, & |M_j| \leq 1 \\ \frac{1}{2} (1 \pm \text{sign}(M_j)) & , \quad |M_j| > 1 \end{cases} \quad (12)$$

به صورت معمول β برابر $\frac{1}{8}$ و $\frac{3}{16} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}$ اتخاذ می‌گردد، اعداد ماخ سمت راست و چپ وجه مطابق زیر محاسبه می‌گردند:

$$M_j = \frac{u_j}{c_{\frac{1}{2}}}, \quad c_{\frac{1}{2}} = \min \left(\frac{c_j^{*2}}{\max(c_j^*, u_j)}, \frac{c_{j+1}^{*2}}{\max(c_{j+1}^*, u_{j+1})} \right) \quad (13)$$

که در آن:

$$c_j^* = \sqrt{\frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} H_{t,j}} \quad (14)$$

بعد از محاسبه‌ی عدد ماخ هر سلول (M_j)، با استفاده از روابط تعیین شده M_j^\pm محاسبه می‌گردد و سپس عدد ماخ روی وجه $M_{j+\frac{1}{2}}^\pm$ به دست می‌آید. سپس با توجه به مقدار عدد ماخ، شار عبوری مطابق زیر تعیین می‌شود:

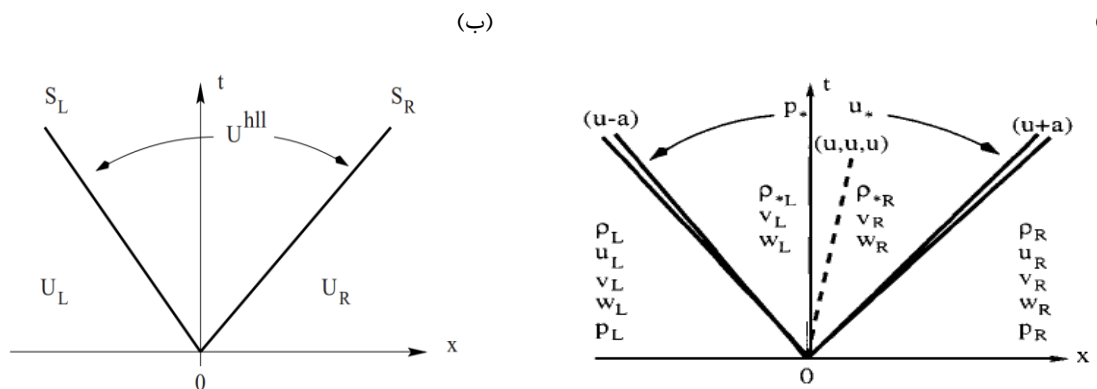
$$\begin{cases} F_{j+\frac{1}{2}} = M_{j+\frac{1}{2}} \cdot c_{j+\frac{1}{2}} \cdot \begin{bmatrix} \rho_j \\ \rho u_j \\ \rho h_{t,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_{j+\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, & M_{j+\frac{1}{2}} > 0 \\ F_{j+\frac{1}{2}} = M_{j+\frac{1}{2}} \cdot c_{j+\frac{1}{2}} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{j+1} \\ \rho u_{j+1} \\ \rho h_{t,j+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_{j+\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, & M_{j+\frac{1}{2}} \leq 0 \end{cases} \quad (15)$$

۳-۳- محاسبه شار در روش HLL

شکل ۱-ب ساختار حل تقریبی مسئله‌ی ریمان را بر اساس روش HLL نشان می‌دهد که در مقایسه با حل دقیق مسئله‌ی ریمان (Error! Reference source not found.) مشخص می‌شود که در روش HLL، تنها سه حالت ثابت وجود دارد که توسط دو موج آکوستیک از هم جدا شده‌اند. ناحیه‌ی مشخص شده با علامت ستاره مابین دو موج سمت چپ و سمت راست، شامل تنها یک حالت ثابت است که با U^{hll} نمایش داده می‌شود و علت آن هم میانگین‌گیری است که در روش HLL بر روی ناحیه‌ی بین دو موج انجام شده است و درحقیقت از اثرات ناپیوستگی تماسی، موج برشی^۱ یا وجه مشترک ماده^۱ (در

^۱. Shear Wave

حقیقت هر نوع موج میانی^۱ در این ناحیه صرف نظر شده است. حفظ نمودن موج میانی در مسائلی که معادلات ناویر-استوکس را برای آن حل می‌شود بسیار با اهمیت است چرا که در غیر این صورت، اتلاف عددی اضافی در لایه‌ی مرزی به وجود می‌آید که دقت حل را کاهش می‌دهد.



شکل ۱: (الف) ساختار حل دقیق مسئله ریمان برای راستای مجزای x در معادلات اوپلر سه بعدی [۲۸]، (ب) ساختار حل تقریبی مسئله‌ی ریمان با استفاده از روش HLL برای معادلات اوپلر [۲۸].

شار جابجایی متناظر با U^{hll} در ناحیه‌ی بین دو موج F^{hll} نامیده می‌شود ولی از رابطه‌ی $F^{hll} = F(U^{hll})$ به دست نمی‌آید و در شرایط مادون صوت بودن جریان $(S_L \leq 0 \leq S_R)$ خواهیم داشت:

$$F^{hll} = F_L + S_L(U^{hll} - U_L) \quad \text{or} \quad F^{hll} = F_R + S_R(U^{hll} - U_R) \quad (16)$$

با ترکیب رابطه $U^{hll} = (S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R) / (S_R - S_L)$ (۱۶) شار جابجایی متناظر با U^{hll} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F^{hll} = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L} \quad (17)$$

در نهایت برای شار جابجایی عبوری از هر وجه حجم کنترل با استفاده از روش HLL رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۲۹]:

$$F_n^{hll} = f(x) = \begin{cases} F_L & , \quad \frac{x}{t} \leq S_L \\ \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L} & , \quad S_L \leq \frac{x}{t} \leq S_R \\ F_R & , \quad \frac{x}{t} \geq S_R \end{cases} \quad (18)$$

برای محاسبه‌ی شار جابجایی به روش HLL فرض شد که سرعت موج‌های سمت چپ و راست معلوم باشد. برای تخمین سرعت موج‌ها دو روش وجود دارد: در روش نخست، سرعت‌ها مستقیماً محاسبه می‌شوند ولی در روش دوم که توسط تورو و همکاران [۳۰] پیشنهاد شده است، باید ابتدا مقدار فشار در ناحیه‌ی بین دو موج محاسبه شده، سپس سرعت‌ها تخمین زده شوند.

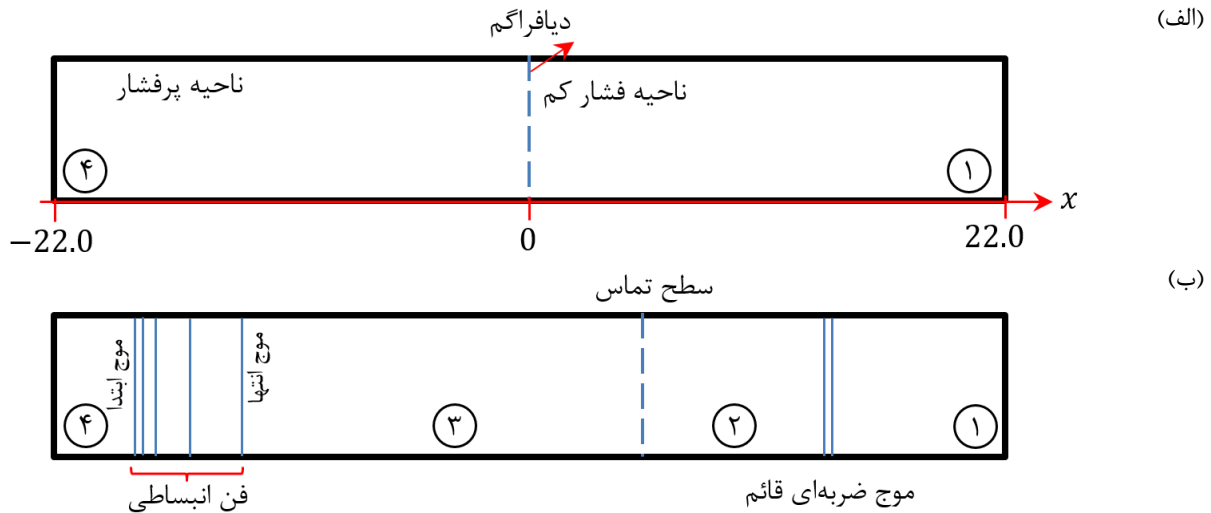
¹ . Material Interface
² . Intermediate Wave

۴- تعریف مسئله و نتایج

همانطور که قبلاً ذکر شد، در این مقاله، مقایسه روش‌های Roe، AUSM⁺ و HLL در دو جریان ناپایا (در لوله موج ضربه) و پایا (در یک نازل واگرا) انجام شده است.

۴-۱- جریان ناپایا در لوله موج ضربه

لوله موج ضربه که شماتیکی از گسترش جریان در آن در شکل ۲-ب آمده است را در نظر بگیرید. در این مسئله جریان ناپایا و یک بعدی است.



شکل ۲: (الف) شماتیک مسئله لوله ضربه، (ب) ایجاد امواج انبساطی و موج ضربه‌ای بر اثر پاره شدن دیافراگم.

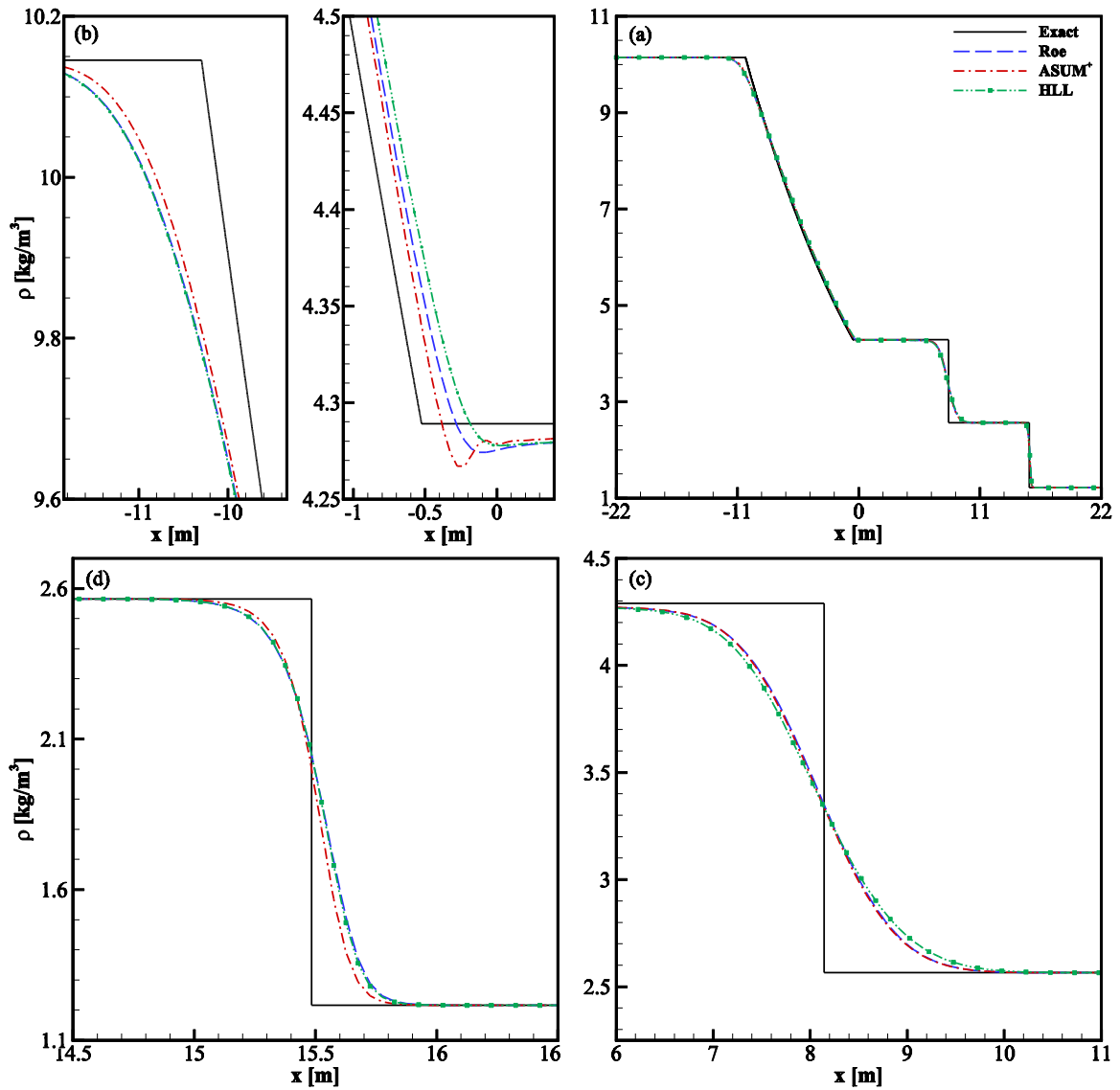
طول لوله ضربه ۴۴ متر است که دیافراگم در وسط آن قرار دارد و هدف مسئله بررسی وضعیت جریان در لوله موج ضربه، در زمان ۰/۰۱۹۶ ثانیه بعد از پاره شدن دیافراگم است. شرایط ورودی مسئله که در واقع مشخصات اولیه جریان در دو طرف دیافراگم است، به صورت روابط (۱۹) و (۲۰) در نظر گرفته شده است:

$$T_4 = 413.86 \text{ K}, \quad p_4 = 2 \times 10^6 \text{ Pa}, \quad u_4 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (19)$$

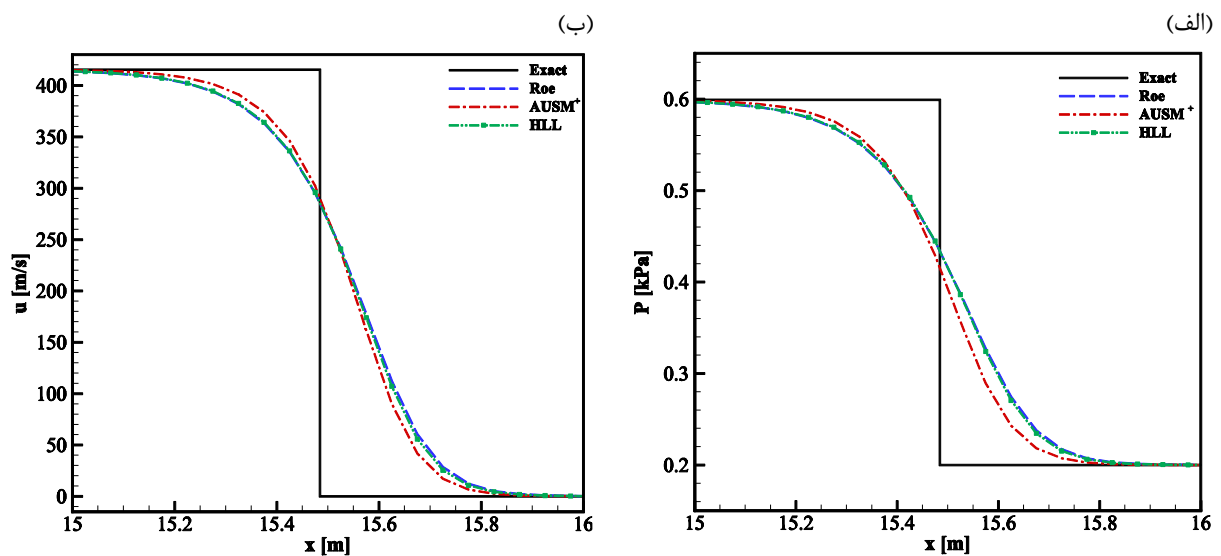
$$T_1 = 300 \text{ K}, \quad p_1 = 0.2 \times 10^6 \text{ Pa}, \quad u_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (20)$$

حل دقیق این مسئله توسط روابط لوله ضربه موجود است. شکل ۳ نمودار تغییرات چگالی را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود، به طوری کلی تمامی روش‌های انتخاب شده در تسخیر موج ضربه‌ای بهتر از تسخیر ناپیوستگی تماس (سطح تماس) و فن انبساطی عمل کرده‌اند. همچنین نتیجه می‌شود که حل AUSM⁺ توانسته است بهتر نسبت به دو روش دیگر موج ضربه‌ای را تسخیر نماید. و نتایج حل روش Roe و HLL تقریباً نزدیک بهم هستند.

برای اینکه بتوان مقایسه دقیق‌تری از روش‌های انتخاب شده در جریان ناپایا داشت، با توجه به اینکه تمامی روش‌ها موج ضربه‌ای را بهتر تسخیر کرده‌اند، تغییرات فشار و سرعت جریان در نزدیک موج ضربه‌ای در شکل‌های ۴ ارائه شده است.



شکل ۳: (a) تغییرات چگالی در لوله ضربه، (b) نماهای نزدیک به ناحیه فن انبساطی، (c) ناحیه نزدیک به ناپیوستگی تماسی (سطح تماس)، (d) ناحیه نزدیک به موج ضربه‌ای.



شکل ۴: (الف) تغییرات فشار در لوله ضربه در نزدیکی موج ضربه‌ای، (ب) تغییرات سرعت در لوله ضربه در نزدیکی موج ضربه‌ای.

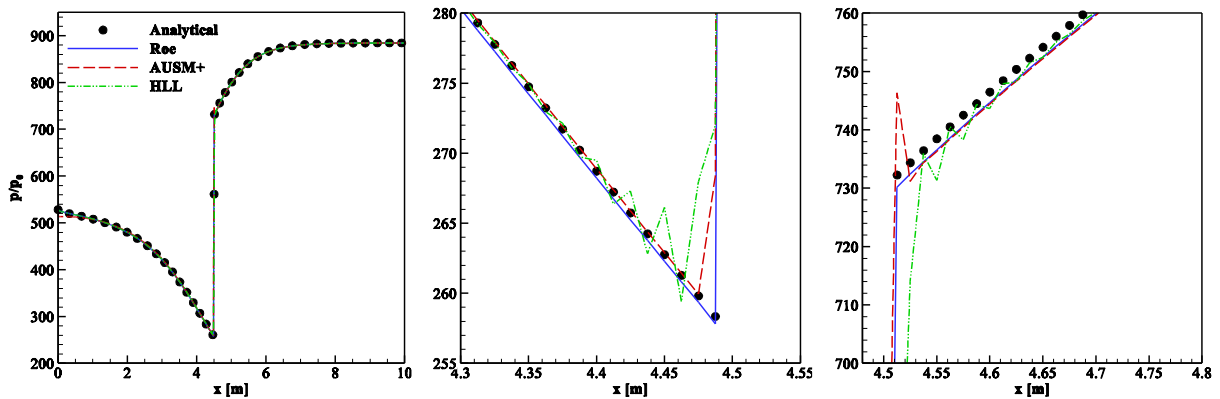
۴-۲- جریان پایا در نازل همگرا-واگرا

معادله سطح نازل همگرا-واگرایی که مساحت آن از رابطه (۲۱) پیروی می‌کند، در نظر بگیرید:

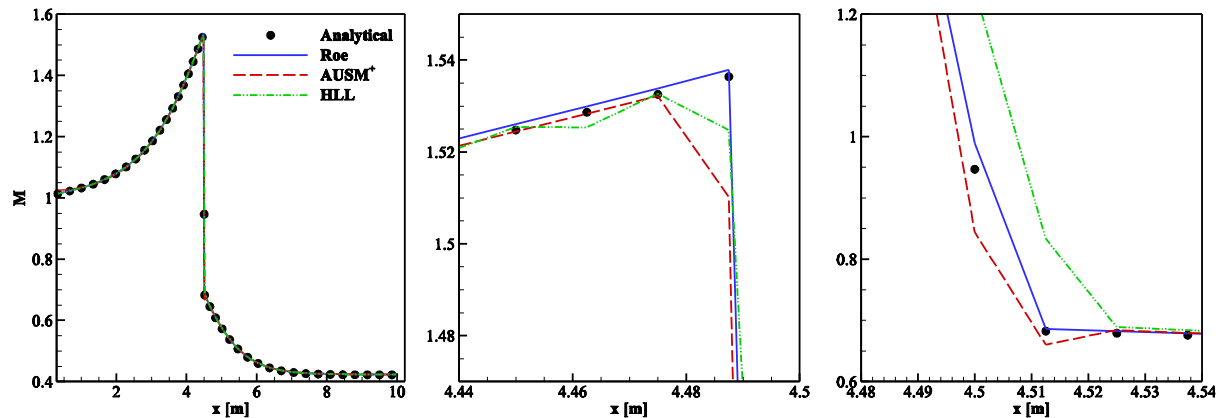
$$A_i = 1.398 + 0.347 \times \tanh(0.8x - 4) \quad (21)$$

در این مسئله جریان پایا و شبه یک بعدی است. طول نازل حدود ۱۰ متر و تعداد ۲۰۰ سلول برای حل عددی در نظر گرفته شده است. همچنین در ورودی نازل فشار سکون ۵۳۵۲۹ پاسکال و دمای سکون ۲۴۸/۱ درجه کلوین و عدد ماخ برابر یک است. فشار پشت به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که یک موج ضربه‌ای قائم در ۴/۵ متر رخ بدهد. شرایط مرزی گویا این موضوع است که یک جریان صوتی وارد نازل شده است، سرعت در اثر اینکه مساحتش کاهش یافته در قسمت همگرایی افزایش می‌یابد و جریان بعد از گلوگاه پس از رخ دادن موج ضربه‌ای قائم، به صورت مادون صوت از نازل خارج شده است. با آدیاباتیکی در نظر گرفتن نازل، میتوان حل تحلیلی و دقیق این مسئله را به دست آورد که مقایسه‌ی حل‌های عددی را ساده‌تر می‌کند. شکل ۵-الف و ۵-ب به ترتیب نمودار تغییرات فشار و تغییرات عدد ماخ در نازل همگرا-واگرا را نشان می‌دهد.

(الف)



(ب)



شکل ۵: (الف) تغییرات فشار در نازل همگرا-واگرا، (ب) تغییرات عدد ماخ در نازل همگرا-واگرا.

همانطور که در شکل‌های ۵-الف و ۵-ب مشهود است تمامی روش‌ها در تسخیر محل موج ضربه‌ای دقت یکسانی دارند؛ اما ترم استهلاک در روش Roe با دیفیوژن مناسب و کافی توانسته است این ناپیوستگی را بدون پخش یا پراش اضافی پیش‌بینی کند؛ اما دو روش دیگر در تزریق صحیح و دقیق ترم استهلاک عددی در تسخیر این ناپیوستگی موفق نبوده‌اند که در این بین نوسانات روش $AUSM^+$ نسبت به روش HLL مشهودتر و بیشتر است.

مراجع

- [1] E. F. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] L. Chen and L. Schaefer, "Godunov-type upwind flux schemes of the two-dimensional finite volume discrete Boltzmann method," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 75, no. 9, pp. 3105-3126, 2018.
- [3] P. Yu and Z. F. Tian, "An upwind compact difference scheme for solving the streamfunction-velocity formulation of the unsteady incompressible Navier-Stokes equation," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 75, no. 9, pp. 3224-3243, 2018.
- [4] P. L. Roe, "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes," *Journal of computational physics*, vol. 43, no. 2, pp. 357-372, 1981.
- [5] B. Einfeldt, "On Godunov-type methods for gas dynamics," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 25, no. 2, pp. 294-318, 1988.
- [6] F. Qu, C. Yan, D. Sun, and Z. Jiang, "A new Roe-type scheme for all speeds," *Computers & Fluids*, vol. 121, pp. 11-25, 2015.
- [7] J. L. Steger and R. Warming, "Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods," *Journal of computational physics*, vol. 40, no. 2, pp. 263-293, 1981.
- [8] B. van Leer, "Flux-vector splitting for the Euler equations," Berlin, Heidelberg, 1982, pp. 507-512: Springer Berlin Heidelberg.
- [9] M.-S. Liou, "A sequel to ausm: Ausm+," *Journal of computational Physics*, vol. 129, no. 2, pp. 364-382, 1996.
- [10] K. H. Kim, J. H. Lee, and O. H. Rho, "An improvement of AUSM schemes by introducing the pressure-based weight functions," *Computers & Fluids*, vol. 27, no. 3, pp. 311-346, 1998.
- [11] K. Kitamura and E. Shima, "A new pressure flux for AUSM-family schemes for hypersonic heating computations," in *20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, 2011, p. 3056.
- [12] F. Qu, D. Sun, G. Zuo, and Y. Shi, "An improvement on the AUSMPWM scheme for hypersonic heating predictions," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 108, pp. 2492-2501, 2017.
- [13] K. Kitamura and E. Shima, "Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: A new pressure flux for AUSM-family schemes," *Journal of Computational Physics*, vol. 245, pp. 62-83, 2013.
- [14] W. Xie, W. Li, H. Li, Z. Tian, and S. Pan, "On numerical instabilities of Godunov-type schemes for strong shocks," *Journal of Computational Physics*, vol. 350, pp. 607-637, 2017.
- [15] H. L. Wenjia Xie, Zhengyu Tian, Sha Pan, "A low diffusion flux splitting method for inviscid compressible flows," *Computers & Fluids*, vol. 112, pp. 83-93, 2015.
- [16] V. S. J.C. Mandal, "A genuinely multidimensional convective pressure flux split Riemann solver for Euler equations," *Journal of Computational Physics*, vol. 297, pp. 669-688, 2015.
- [17] D. S. B. Michael Dumbser, "A new efficient formulation of the HLLEM Riemann solver for general conservative and non-conservative hyperbolic systems," *Journal of Computational Physics*, vol. 304, pp. 275-319, 2016.
- [18] B. N. Dinshaw S. Balsara, "Multidimensional Riemann problem with self-similar internal structure – part III – a multidimensional analogue of the HLLI Riemann solver for conservative hyperbolic systems," *Journal of Computational Physics*, vol. 346, pp. 25-48, 2017.
- [19] M. S. Liou, "Open Issues in Numerical Fluxes: Proposed Resolutions," presented at the In 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, 2011.
- [20] M. a. P. Kermani, E., "Modified entropy correction formula for the Roe scheme," In *39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, p. 83, 2011.

- [21] B. Müller, "Simple improvements of an upwind TVD scheme for hypersonic flow," presented at the In 9th Computational Fluid Dynamics Conference, 1989.
- [22] S. S. Kim, Kim, C., Rho, O.H. and Hong, S.K., "Cures for the shock instability: development of a shock-stable Roe scheme," *Journal of Computational Physics*, vol. 185, no. 2, pp. 342-74, 2003.
- [23] F. Qu, Sun, D. and Zuo, G., "A study of upwind schemes on the laminar hypersonic heating predictions for the reusable space vehicle," *Acta Astronautica*, vol. 147, pp. 412-420, 2018.
- [24] B. v. Leer, "Flux Vector Splitting for the Euler Equations, Eighth International Conference of Numerical Methods in Fluid Dynamics," in *Springer*, Berlin, 1982, vol. 170, pp. 507-512.
- [25] F. Qu, Di Sun, and Chao Yan, "A new flux splitting scheme for the Euler equations II: E-AUSMPWAS for all speeds," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 57, pp. 58-79, 2018.
- [26] F. Qu, Sun, D., Bai, J., Zuo, G. and Yan, C., "Numerical investigation of blunt body's heating load reduction with combination of spike and opposing jet," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 127, pp. 7-15, 2018.
- [27] M.-Y. Kim, "High order DG-DGLM method for hyperbolic conservation laws," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 75, no. 12, pp. 4458-4489, 2018.
- [28] E. F. Toro, "Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: The Equations of Fluid Dynamics," ed: Springer, 2009.
- [29] A. Harten, P. D. Lax, and B. v. Leer, "On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws," *SIAM review*, vol. 25, no. 1, pp. 35-61, 1983.
- [30] E. F. Toro, M. Spruce, and W. Speares, "Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver," *Shock waves*, vol. 4, no. 1, pp. 25-34, 1994.