اولین سمینار

استنباط شواهدی

۲۲ خرداد ۱۳۹۸

نگاه کردن به نمودار های توابع درستنمایی

عمادی، م [۱]

[۱] گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

هر دو دیدگاه نیمن –پیرسنی و فیشری به آمار دارای سه بخش اصلی است : برآورد ــ آزمون فرضیه و بازه های اطمینان . این بخش ها بیانگر یک رویکرد مقطعی و تدریجی به تحلیل و تفسیر شواهد آماری اند. هریک از این سه بخش مجموعه ای پیچیده از مفاهیم و روش هایی هستند که باید کارشناسانه به کار گرفته شوند. برای مثال در یک مسیله ی آزمون فرضیه معنای رد نشدن یک فرضیه باید بر حسب : اندازه و توان آزمون – تمایز بین رد نکردن یک فرضیه و پذیرش آن – تمایز بین معنی داری آماری و معنی داری عملی – تاثی اندازه نمونه بر معنای مقدار-p و مانند این ها درک شوند. ولی دیده ایم که چنین موضوع هایی آنقدر پیچیده اند که گاه خبرگان آمار نیز در آنها اختلاف نظر دارند. از سوی دیگر قبول این واقعیت که توابع درستنمایی ابزار مناسبی برای نمایش و ارایه شواهد اماری اند تحلیل های آماری را ساده و هماهنگ می سازند.

کلمات کلیدی: آزمون فرضیه، بازه های اطمینان، تفسیر شواهد آماری، توابع درستنمایی، مقدار-p

۱ پیش‌گفتار

یکی از مهمترین تکنیک های آمار کاربردی استفاده از فاصله اطمینان است. متاسفانه در این روش به این نکته توجه نمی کنیم که امکان تکرار در آزمایشات وجود ندارد. زیرا از لحاظ نظری قضایای مربوطه متکی بر استنباط کلاسیک یا فراوانی گرا است. فاصله بیزی یا فاصله باور نیز به توزیع پیشین وابسته بوده که آن هم به اعتقادات شخصی تکیه می کند و نمی تواند نظر آمار دان یا محقق را جلب کند. براین اساس فاصله شواهدی که مبتنی بر تابع درستنمایی است را پیشنهاد می کنیم که هیچکدام از معایب روشهای فوق را ندارد.

[۱] emadi@um.ac.ir

توابع درستنمایی

فرض کنید متغیر تصادفي X داراي توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس معلوم یك باشد. دو فرضیة رقیب زیر را در نظر ميگیریم.

$$\begin{cases} H_1 : \mu = 0 \\ H_2 : \mu = 1 \end{cases}$$

براي بررسي دو فرضیة فوق به روش شواهدي نمونهاي تصادفي به حجم n اخذ ميکنیم. در اینصورت داریم

$$r = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2} x_i^2 \right)}{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2} (x_i - 1)^2 \right)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{1}{2} - x_i \right) = \exp\left(n\left(\frac{1}{2} - \bar{x} \right) \right),$$

بررسي بهتر استنباط شواهدي را *Royall* به طریق دیگري بیان ميکند که ميگوید "بجاي آنکه نسبت درستنمایي را براي دو فرضیة رقیب بدست آوریم، تابع درستنمایي را (باتقسیم بر ماکسیمم مقدار آن) طوري تعدیل ميکنیم که بیشترین مقدار آن یك باشد. سپس آن تابع را بر حسب پارامتر مورد نظر رسم کرده و در نهایت با توجه به منحني تابع درستنمایي استنباط شواهدي را نه تنها براي دو فرضیة رقیب مورد بحث بلکه براي هر دو فرضیة سادة رقیب انجام ميدهیم". این روش براي مثال ۲-۱ به شکل زیر است:

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2} (x_i - \mu)^2 \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right).$$

براي اینکه بیشترین مقدار $L(\mu)$ یك شود کافیست ماکسیمم $L(\mu)$ ر ا محاسبه کرده و $L(\mu)$ را بر آن تقسیم کنیم.

$$\max_{\mu \in R} L(\mu) = L(\overline{x})$$

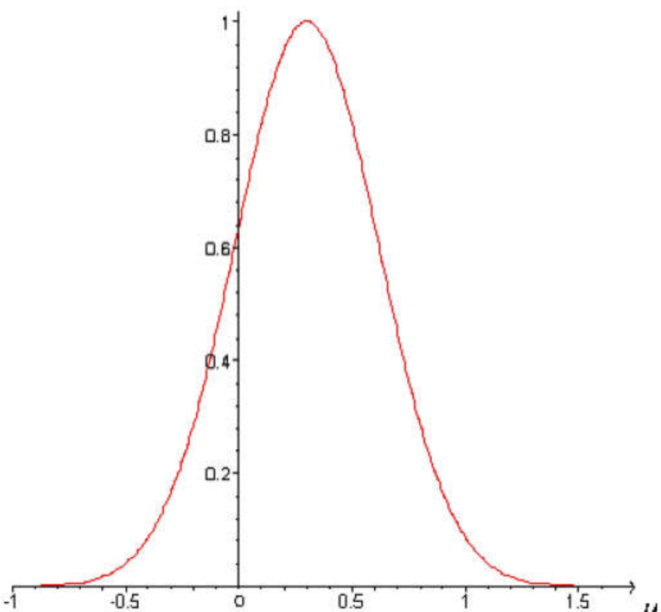
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{n}{2}\overline{x}^2\right),$$

در نتیجه داریم

$$L(\mu) \propto \exp\left(-\frac{n(\mu - \overline{x})^2}{2}\right).$$

حال تابع فوق را بر حسب μ رسم میکنیم.



شکل 1-1 نمودار تابع درستنمایی بر حسب μ بازای $n = 10$، $\sigma^2 = 1$ (معلوم) و $\overline{x} = 0.33$

با توجه به شکل ۱-۱ مشاهده میشود $L(۰)$ بزرگتر از $L(۱)$ بوده پس دادهها از $H_۱$ پشتیباني بیشتري میکنند و اگر k را برابر ۸ اختیار کنیم پشتیباني از $H_۱$ قوي محسوب میشود.

فواصل آماری

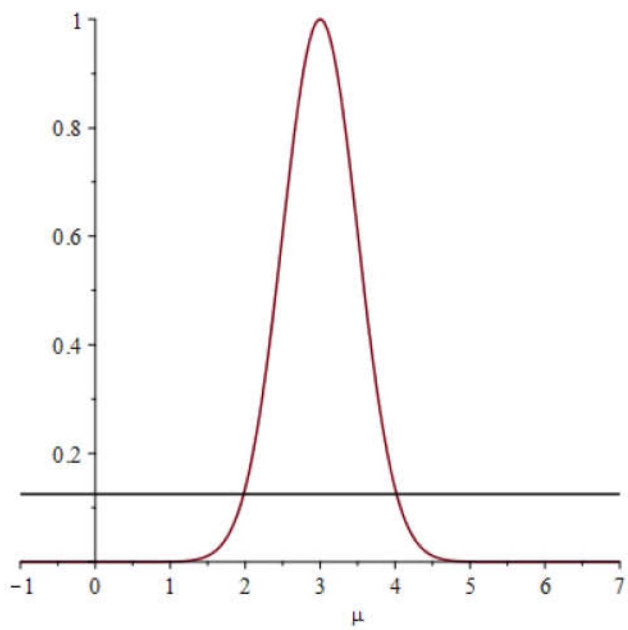
آمار کلاسیک: فاصله اطمینان

$$\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{0.025}$$

آمار بیز: فاصله اعتبار یا باور

$$\frac{n\bar{x}}{n+1} \pm \frac{Z_{0.025}}{\sqrt{n+1}}$$

آمار شواهدی: فاصله شواهدی



؟ـ تابع درستنمايي در قبال وجود پارامتر مزاحم

روش متعامدسازي

فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهاي تصادفي مستقل از توزیع پواسن به ترتیب با پارامترهاي λ_1 و λ_2 باشند. تابع درستنمايي متعامد را براي پارامتر $\theta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ به دست مي‌آوریم براي این منظور پارامتر مزاحم λ را به صورت زیر تعریف مي‌کنیم

$$\gamma = \lambda_1 + \lambda_2.$$

با توجه به پارامتر مورد علاقة θ و پارامتر مزاحم λ داریم

$$\lambda_1 = \frac{\theta\gamma}{1+\theta}, \quad \lambda_2 = \frac{\gamma}{1+\theta},$$

تابع درستنمايي بر حسب پارامترهاي جديد عبارتست از

$$L(\theta,\gamma) \propto \frac{\theta^{x_1}}{(1+\theta)^{x_1+x_2}} \gamma^{x_1+x_2} e^{-\gamma}.$$

ـ روش درستنمايي كناري

فرض كنيد $X_1, \cdots, X_n$ نمونه‌اي تصادفي از توزيع نرمال با پارامترهاي مجهول μ (ميانگين) و σ^2 (واريانس) باشند، و فرض كنيد كه پارامتر مورد علاقه باشد. پارامترهاي μ و σ^2 متعامد نيستند، زيرا تابع درستنمايي آنها به صورت زير است

$$L(\mu, \sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2\right).$$

ـ روش درستنمايي نيمرخ

در اين روش ماكسيمم تابع درستنمايي را زماني كه مقدار پارامتر مورد توجه ثابت fixed)) در نظر گرفته شود، بدست مي‌آوريم. در اين حالت تابع درستنمايي مرتبط با پارامتر مورد علاقه را با نماد نمـايش مي‌دهيم (علامت Profile است). مثال ۵-۱ فرض كنيد متغير تصادفي X داراي توزيع نرمال با ميانگين مجهول μ و واريانس σ^2 مجهول باشد. براي استنباط شواهدي دربارة پارامتر مورد علاقة μ بر اساس نمونه‌اي تصادفي به حجم n از توزيع فوق داريم.

$$L(\mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right).$$

ـ روش درستنمايي شرطي

فرض كنيد متغيرهاي تصادفي مستقل X و Y داراي توزيع دوجمله‌اي به صورت زير باشند.

$$X \sim Bin(m, p_x), \qquad Y \sim Bin(n, p_y),$$

$$\psi = \frac{\frac{p_x}{1-p_x}}{\frac{p_y}{1-p_y}},$$

كه m و n معلوم هستند. مي‌خواهيم استنباط شواهدي را براي نسبت بختها يعني
بررسي كنيم. براي اين منظور توزيع شرطي متغير تصادفي X به شرط متغير تصادفي $X+Y$ را بدست مي‌آوريم.

$$L_C(\psi) \propto \mathrm{P}\left(X = x \middle| X + Y = x + y;\ p_x, p_y\right)$$

$$\propto \frac{1}{\sum_{j=a}^{b} \binom{m}{j} \binom{n}{x+y-j} \psi^{j-x}},$$

ـ روش درستنمايي برآورد شده

$$L(\mu, \sigma^2) \propto \sigma^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2\right)$$

$$L_E(\mu) \propto c(\underline{x}) s^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2s^2} \sum (x_i - \mu)^2\right)$$

مراجع

[۱] پایان نامه دکتری مهدی عمادی دی ۱۳۸۲ ، دانشگاه فردوسی مشهد