۳ کنفرانس ملی نانوساختارها علوم و مهندسی نانو
۲۲ آبان ماه ۱۳۹۸
3rd National Conference on Nanostructures Nanoscience and Nanoengineering November 13, 2019

NCNNN2019-XXXX

بررسی رفتار کمانشی نانو ورق مستطیلی مرتبه سوم با استفاده از تئوری غیرکلاسیک الاستیسیته تنش کوپل اصلاح‌شده

مجید اسکندری شهرکی*[۱]، محمود شریعتی[۲]، محسن حیدری بنی[۳]، بهزاد بیاتی چالشتری[۴]، محمدرضا زمانی[۵]، جعفر اسکندری جم[6]

[۱] دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران، mjdeskandari@gmail.com
[۲] استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
[۳] دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد شهرکرد، دانشگاه آزاد اسلامی، شهرکرد، ایران
[4] دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک بیوسیستم، دانشگاه تهران، تهران، ایران
[5] استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران
[6] استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله رفتار کمانشی نانو ورق مرتبه سوم موردبررسی قرارگرفته است. به‌منظور در نظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک، تئوری غیرموضعی الاستیسیته تنش کوپل اصلاح‌شده به کار گرفته‌شده است. معادلات حاکم نانو ورق بر اساس اصل همیلتون، استخراج و با روش ناویر برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده حل‌شده است. تأثیرات پارامتر غیرموضعی، طول، نسبت ابعاد، بر روی بار بحرانی کمانشی موردبررسی قرارگرفته است. نتایج نشان می‌دهد که میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی دومحوره صفحه‌ای در جهت x و y با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانوصفحه افزایش و با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه کاهش می‌یابد. همچنین میزان نیروی بحرانی کمانش تک‌محوره نانوصفحه مرتبه سوم از مرتبه پنجم کم‌تر می‌باشد. از سوی دیگر میزان نیروی بحرانی کمانش تک‌محوره نانوصفحه مرتبه سوم به‌مراتب بیش‌تر از دومحوره می‌باشد.

واژه های کلیدی: تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده، نانو صفحه مرتبه سوم، روش حل ناویر، کمانش.

مقدمه

نانو صفحات به دلیل کوچک بودن و داشتن خواص بسیار جالب و کاربردی همچون سختی بالا، مقاومت در برابر سایش و خوردگی فوق‌العاده و رسانایی گرما و الکتریسیته بسیار خوب، موردتوجه بسیاری از دانشمندان قرارگرفته‌اند. به دلیل دارا بودن رفتارهای الکترومکانیکی، این‌گونه ساختارها را در ارتعاش کننده‌های الکترومکانیکی بکار می‌برند[۱]. لازم به توضیح است که در نانو صفحات از تئوری غیرمحلی به‌جای تئوری کلاسیک الاستیسیته استفاده می‌شود. فرض بنیادی در تئوری‌های کلاسیک، پیوستگی محیط مادی و میدان‌های تانسوری تنش و کرنش می‌باشد. تفاوت اصلی بین تئوری کلاسیک و تئوری غیرمحلی الاستیسیته در تعریف تنش است. بیشتر تئوری‌های کلاسیک محیط‌های پیوسته، بر اساس روابط ساختاری استوار است، که فرض می‌کند تنش هر نقطه، به‌صورت

تابعی از کرنش‌های همان نقطه است. تئوری غیرمحلی که ابتدا توسط ارینگن ارائه شد، بیانگر این است که تنش هر نقطه نه تنها تابعی از کرنش آن نقطه است، بلکه تابع میدان کرنش همه نقاط محیط پیوسته است. این قبیل تئوری‌ها دربرگیرنده اطلاعاتی از نیروهای مابین اتم‌ها و اندازه طول‌های داخلی(اثر مقیاس کوچک) که در روابط ساختاری به‌صورت پارامترهای مادی تعریف می‌شوند، هستند[۲].

برخی از محققان نشان دادند که با افزایش پارامتر غیرمحلی، نیروی بحرانی کمانش بدون بعد کاهش می‌یابد[۳-۴-۵]. برخی دیگر نیز نشان دادند که با افزایش پارامتر غیرمحلی، نسبت نیروی بحرانی کمانش (نیروی بحرانی کمانش غیرمحلی بر نیروی بحرانی کمانش محلی) نیز کاهش می‌یابد[۱۰-۶].

برخی از محققان نشان دادند که نیروی بحرانی کمانش بدون بعد در حالت تک‌محوره مقادیر بالاتری نسبت به حالت دومحوره دارند[۱۱و۱۲].

چند محقق نشان دادند که با افزایش شماره مود، نیروی بحرانی کمانش بدون بعد افزایش می‌یابد[۳و۱۱].

در این مقاله بررسی کمانش نانو صفحه مستطیلی مرتبه سه با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده پرداخته‌شده است.

تئوری کوپل تنش اصلاح‌شده:

یانگ و همکارانش[۱۳] در سال ۲۰۰۲ با اصلاح کردن تئوری کوپل تنش که توسط توپین[۱۴]، میندلین و تیرستن[۱۵]، کویتر[۱۶] و میندلین[۱۷] در سال ۱۹۶۴ ارائه شد، یک مدل کوپل تنش اصلاح‌شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول ماده[1]برای تصویر کردن اثر اندازه می‌باشد را پیشنهاد کردند، درحالی‌که تئوری کوپل تنش کلاسیک دارای دو پارامتر مقیاس طول ماده است.

در تئوری کوپل تنش اصلاح‌شده، چگالی انرژی کرنشی در مختصات قائم سه‌بعدی برای جسمی که محدود به حجم V و سطح Ω می‌باشد به‌صورت زیر بیان می‌شود[۱۸]:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}\chi_{ij}\right)dV \quad i,j = 1,2,3 \qquad (۱)$$

که در آن:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad (۲)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}\right) \qquad (۳)$$

χ_{ij} و ε_{ij} به ترتیب قسمت متقارن تانسور انحنا[2] و تانسور کرنش[3]هستند. u_i و θ_i به ترتیب بردار جابه‌جایی[4] و بردار چرخشی[5] تعریف‌شده‌اند.

$$\theta = \frac{1}{2}\, Curl\, \boldsymbol{u} \qquad (۴)$$

σ_{ij} و m_{ij} به ترتیب تانسور تنش و قسمت انحرافی تانسور کوپل تنش[6] هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

[1]Material length scale parameter
[2]Symmetric part of the curvature tensor
[3] Strain tensor
[4]Displacement vector
[5]Rotation vector

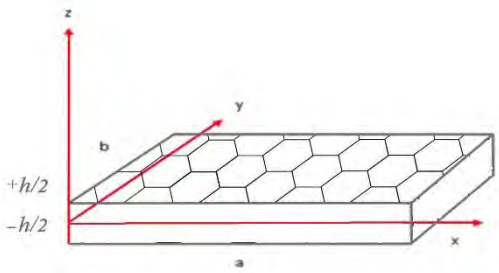
$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (۵)$$

$$m_{i,j} = 2\mu\, l^2 \chi_{ij} \quad (۶)$$

که در آن λ و μ ثابت‌های لامه، δ_{ij} دلتای کرونکر و l پارامتر مقیاس طول ماده می‌باشد. از معادله(۳) و (۶) می‌توان دریافت که χ_{ij} و m_{ij} متقارن هستند.

مدل صفحه مرتبه سوم:

در شکل(۱)، نانوصفحه مستطیلی ضخیم و همسانگرد به طول a، عرض b و ضخامت h نمایش داده‌شده است. مبدا دستگاه مختصات(x,y,z) در گوشه سمت چپ صفحه میانی واقع شده است و محورهای x، y و z به ترتیب در راستای طول، عرض و ضخامت نانوصفحه قرار دارند.



شکل ۱. شماتیکی از صفحه و موقعیت محورها

معادلات جابه‌جایی برای صفحه مرتبه سوم به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u_1(x,y,z) = z\,\varphi_x(x,y) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3\left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} + \varphi_x(x,y)\right)$$

$$u_2(x,y,z) = z\varphi_y(x,y) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3\left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} + \varphi_y(x,y)\right) \quad (۷)$$

$$u_3(x,y,z) = w(x,y)$$

که در آن φ_x و φ_y چرخش بردار نرمال حول محور x و y و w میزان جابه‌جایی نقطه میانی صفحه در راستای محور z می‌باشد. قسمت متقارن تانسور انحنا، تانسور کرنش و تنش و بردار چرخشی برای مدل صفحه مرتبه سوم به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_{xx} = z\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\right) \quad (۸)$$

$$\varepsilon_{yy} = z\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\right) \quad (۹)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (۱۰)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}z\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \quad (۱۱)$$

[6]Deviatoric part of the couple stress tensor

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \left(\frac{1}{2} - 2\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x\right) \tag{۱۲}$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \left(\frac{1}{2} - 2\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y\right) \tag{۱۳}$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \left(\frac{1}{2} - 2\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y\right) \tag{۱۴}$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} - 2\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x\right) \tag{۱۵}$$

$$\theta_z = \frac{1}{2}\left(z - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3\right)\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\right) \tag{۱۶}$$

$$x_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} - \left(\frac{1}{2} - 2\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right) \tag{۱۷}$$

$$x_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{1}{2} - 2\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \tag{۱۸}$$

$$x_{zz} = \left(\frac{1}{2} - 2\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\right) \tag{۱۹}$$

$$x_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\right) \tag{۲۰}$$

$$x_{xz} = \frac{1}{4}\left(z - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y\, \partial x}\right) + 2z\left(\frac{1}{h}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y\right) \tag{۲۱}$$

$$x_{yz} = -2z\left(\frac{1}{h}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x\right) + \frac{1}{4}\left(z - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2}\right) \tag{۲۲}$$

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} \tag{۲۳}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} \tag{۲۴}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \tag{۲۵}$$

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} = 2\mu\, \varepsilon_{xy} \tag{۲۶}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu\, \varepsilon_{xz} \tag{۲۷}$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu\, \varepsilon_{yz} \tag{۲۸}$$

تغییرات انرژی کرنشی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}\delta U = \int_V \sigma_{xx}\, \delta\, \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\, \delta\varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy}\, \delta\, \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz}\, \delta\, \varepsilon_{xz} + 2\sigma_{yz}\, \delta\, \varepsilon_{yz} + m_{xx}\, \delta\, x_{xx} \\ + m_{yy}\, \delta x_{yy} + m_{zz}\, \delta x_{zz} + 2m_{xy}\, \delta x_{xy} + 2m_{xz}\, \delta x_{xz} + 2m_{yz}\, \delta\, x_{yz})dV\end{aligned} \tag{۲۹}$$

می‌توان جهت ساده‌نویسی ضرایب متغیرها را از F_1 تا F_{15} مطابق معادله (۳۰) نام‌گذاری و آن‌ها را جداگانه به دست آورد:

$$\delta U = \int_V (E_1 \delta w,_{xx} + E_2\, \delta w,_{yy} + E_3\, \delta w,_{xy} + E_4 \delta\, w,_x + E_5\, \delta\, w,_y + E_6\, \delta\, \varphi_{x,yy} + E_7 \delta\, \varphi_{y,xx} + E_8\, \delta\, \varphi_{y,xy} + E_9\, \delta\varphi_{x,yx} + E_{10}\, \delta\, \varphi_{x,x} + E_{11}\, \delta\varphi_{y,y} + E_{12}\delta\varphi_{x,y} + E_{13}\, \delta\, \varphi_{y,x} + E_{14}\, \delta\varphi_x + E_{15}\, \delta\varphi_y) dV \tag{۳۰}$$

که در آن:

$$E_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left[(\lambda+2\mu)(C_3 - C_1C_2) + \tfrac{1}{2}\mu l^2(1+C_4) - \tfrac{1}{4}\mu l^2(1+C_4)(1-C_4)\right] + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left[\lambda(C_3 - C_1C_2) - \tfrac{1}{2}\mu l^2(1+C_4) + \tfrac{1}{4}\mu l^2(1-C_4)(1+C_4)\right] + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\left[-(\lambda+2\mu)(C_2C_1) - \tfrac{1}{4}\mu l^2(1-C_4)(1+C_4)\right] + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\left[-\lambda(C_2C_1) - \tfrac{1}{4}\mu l^2(1-C_4)(1+C_4)\right] \tag{۳۱}$$

$$E_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left[(\lambda+2\mu)(C_3 - C_1C_2) + \tfrac{1}{2}\mu l^2(1+C_4) - \tfrac{1}{4}\mu l^2(1+C_4)(1-C_4)\right] + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left[\lambda(C_3 - C_1C_2) - \tfrac{1}{2}\mu l^2(1+C_4) + \tfrac{1}{4}\mu l^2(1-C_4)(1+C_4)\right] + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\left[-(\lambda+2\mu)(C_2C_1) - \tfrac{1}{4}\mu l^2(1-C_4)(1+C_4)\right] + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\left[-\lambda(C_2C_1) - \tfrac{1}{4}\mu l^2(1-C_4)(1+C_4)\right] \tag{۳۲}$$

$$E_3 = \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\left[4\mu\, {C_2}^2 + \mu l^2(1+C_4)^2\right] + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\left[-2\mu C_2C_1 - \tfrac{1}{2}\mu l^2(1-C_4)(1+C_4)\right] + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\left[-2\mu C_2C_1 - \tfrac{1}{2}\mu l^2(1-C_4)(1+C_4)\right] \tag{۳۳}$$

$$E_4 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x\right)\left[\mu(1-C_4)^2 + \tfrac{1}{4}\mu l^2 {C_5}^2\right] + \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2}\right)\left[\tfrac{1}{4}\mu l^2 C_5 C_1\right] \tag{۳۴}$$

$$E_5 = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y\right)\left[\mu(1-C_4)^2 + \tfrac{1}{4}\mu l^2 {C_5}^2\right] + \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2}\right)\left[\tfrac{1}{4}\mu l^2 C_5 C_1\right] \tag{۳۵}$$

$$E_6 = E_8 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x\right)\left[\tfrac{1}{4}\mu l^2 C_5 C_1\right] + \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2}\right)\left[\tfrac{1}{4}\mu l^2 {C_1}^2\right] \tag{۳۶}$$

$$E_7 = E_9 = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y\right)\left[-\tfrac{1}{4}\mu l^2 C_5 C_1\right] + \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y}\right)\left[\tfrac{1}{4}\mu l^2 {C_1}^2\right] \tag{۳۷}$$

$$E_{10} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left[(\lambda+2\mu)\left({C_1}^2 - zC_1\right) - \tfrac{1}{4}\mu l^2(1-C_4)(1+C_4)\right] + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left[\lambda C_1(-z+C_1) + \tfrac{1}{4}\mu l^2(1-C_4)(1+C_4)\right] + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\left[(\lambda+2\mu){C_1}^2 + \tfrac{1}{4}\mu l^2(1-C_4)^2\right] + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\left[\lambda {C_1}^2 - \tfrac{1}{4}\mu l^2(1-C_4)^2\right] \tag{۳۸}$$

$$E_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left[(\lambda+2\mu)\left({C_1}^2 - zC_1\right) - \tfrac{1}{4}\mu l^2(1-C_4)(1+C_4)\right] + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left[\lambda A_1(-z+C_1) + \tfrac{1}{4}\mu l^2(1-C_4)(1+C_4)\right] + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\left[(\lambda+2\mu){C_1}^2 + \tfrac{1}{4}\mu l^2(1-C_4)^2\right] + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\left[\lambda {C_1}^2 - \tfrac{1}{4}\mu l^2(1-C_4)^2\right] \tag{۳۹}$$

$$E_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\left[-2\mu C_2 C_1 - \tfrac{1}{2}\mu l^2(1-\ C_4)(1+C_4)\right] + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\left[\mu {C_1}^2 + \mu l^2(1-\ C_4)^2\right] + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\left[\mu {C_1}^2 - \tfrac{1}{2}\mu l^2(1-\ C_4)^2\right] \quad (۴۰)$$

$$E_{13} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\left[-2\mu C_2 C_1 - \tfrac{1}{2}\mu l^2(1-\ C_4)(1+C_4)\right] + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\left[\mu {C_1}^2 - \tfrac{1}{2}\mu l^2(1-\ C_4)^2\right] + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\left[\mu {C_1}^2 + \mu l^2(1-\ C_4)^2\right] \quad (۴۱)$$

$$E_{14} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x\right)\left[\mu(1-\ C_4)^2 + \tfrac{1}{4}\mu l^2 {C_5}^2\right] + \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2}\right)\left[\tfrac{1}{4}\mu l^2 C_5 C_1\right] \quad (۴۲)$$

$$E_{15} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y\right)\left[\mu(1-\ C_4)^2 + \tfrac{1}{4}\mu l^2 {C_5}^2\right] + \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2}\right)\left[\tfrac{1}{4}\mu l^2 C_5 C_1\right] \quad (۴۳)$$

که در آن‌ها داریم:

$$C_1 = z - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{h}\right)^2\ z^3 \quad (۴۴)$$

$$C_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{h}\right)^2\ z^3 \quad (۴۵)$$

$$C_3 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{h}\right)^2\ z^4 \quad (۴۶)$$

$$C_4 = 4\left(\frac{z}{h}\right)^2 \quad (۴۷)$$

$$C_5 = -8z\left(\frac{1}{h}\right)^2 \quad (۴۸)$$

$$C_6 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{h}\right)^2 \quad (۴۹)$$

$$C_7 = \mu\frac{h}{3} \quad (۵۰)$$

$$C_8 = \mu\frac{h}{5} \quad (۵۱)$$

$$C_9 = \frac{h^3}{252}(\lambda + 2\mu) \quad (۵۲)$$

$$C_{10} = (\lambda + 2\mu)\frac{h^3}{60} \quad (۵۳)$$

$$C_{11} = \mu\, l^2\frac{4}{3h} \quad (۵۴)$$

$$C_{12} = \frac{1}{4}\mu\, l^2 h \tag{۵۵}$$

$$I_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z^i \; dz \;\; (i = 0,1,2,n-1,n,n+1,2n-4,2n-2,2n) \tag{۵۶}$$

نیروی کمانش:

برای صفحه مستطیلی به طول a، عرض b و ضخامت h با نیروهای محوری P_{xy}, P_y, P_x معادله نیروی کمانش به‌صورت زیر خواهد بود[۱۹و۲۰]:

$$P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x,y) \tag{۵۷}$$

معادله کار مجازی که توسط نیروی خارجی حاصل می‌گردد[۲۱]:

کار مجازی که توسط نیروی خارجی انجام می‌گیرد شامل سه بخش است:

۱- کار مجازی که توسط نیروهای حجمی روی $V = \Omega * \left(-{}^{h}/_{2}, {}^{h}/_{2}\right)$ انجام می‌گیرد.

۲- کار مجازی که توسط نیروی برشی صفحه‌ای در سطوح بالایی و پایینی (Ω) انجام می‌گیرد.

۳- کار مجازی که توسط نیروی برشی صفحه‌ای و بر روی سطوح جانبی $S = \Gamma * \left(-{}^{h}/_{2}, {}^{h}/_{2}\right)$ انجام می‌گیرد. که در آن Ω صفحه میانی ورق و Γ محیط میانی ورق می‌باشد.

اگر (f_x, f_y, f_z) نیروی حجمی، (c_x, c_y, c_z) ممان حجمی، (q_x, q_y, q_z) نیروهایی باشند که بروی سطح Ω عمل می‌کنند، (t_x, t_y, t_z) تنش برشی کوشی و (S_x, S_y, S_z) ممان سطح باشند، در این صورت تغییرات کار مجازی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\delta w = -\Big[\int_{\Omega} &(f_x\delta u + f_y\delta V + f_z\delta w + q_x\delta u + q_y\delta V + q_z\delta w + c_x\delta\theta_x + c_y\,\delta\theta_y + c_z\delta\theta_z)\,dx\,dy \\ &+ \int_{\Gamma} (t_x\delta u + t_y\delta V + t_z\delta w + s_x\theta_x \;\; + s_y\delta\theta_y + s_z\delta\theta_z)d\Gamma\Big]\end{aligned} \tag{۵۸}$$

با توجه به این‌که در این تحقیق فقط نیروی خارجی q_z اعمال شده و از بقیه نیروها صرف‌نظر شده است، کار مجازی به‌صورت:

$$\delta w = \int_0^a \int_0^b q(x,y)\delta w(x,y)dx\,dy \tag{۵۹}$$

می‌باشد. همچنین با استفاده از اصل همیلتون داریم[۲۲]:

$$\delta(U - w) = 0 \tag{۶۰}$$

که در آن U انرژی کرنشی و W کار نیروهای خارجی می‌باشد.

معادله نهایی صفحه با اعمال نیروی کمانش و نیروی خارجی

با به‌کارگیری اصل همیلتون(معادله ۶۰)، معادلات اصلی مطابق زیر به دست می‌آیند:

$$\left[\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} - \frac{\partial E_4}{\partial x} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial E_5}{\partial y}\right)dz\right] + P_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{۶۱}$$

$$+P_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=q(x,y)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{\partial^2 E_6}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_9}{\partial x\partial y}-\frac{\partial E_{12}}{\partial y}-\frac{\partial E_{10}}{\partial x}+F_{14}\right)dz=0 \tag{۶۲}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{\partial^2 E_7}{\partial x^2}-\frac{\partial E_{13}}{\partial x}+\frac{\partial^2 E_8}{\partial x\partial y}-\frac{\partial E_{11}}{\partial y}+E_{15}\right)dz=0 \tag{۶۳}$$

به دست آوردن معادلات صفحه مرتبه سوم در کلی‌ترین حالت

با در نظر گرفتن مقادیر زیر:

$$D_1=2C_{12}+l^2C_7+\tfrac{1}{2}l^2C_8+2C_9 \tag{۶۴}$$

$$D_2=\frac{1}{2}D_1=C_{12}+C_9+\tfrac{1}{2}l^2C_7+\tfrac{1}{4}l^2C_8 \tag{۶۵}$$

$$D_3=-\mu h+2C_7-C_8-C_{11} \tag{۶۶}$$

$$D_4=C_9-C_{10}+\tfrac{1}{4}l^2C_8-C_{12} \tag{۶۷}$$

$$D_5=3C_{12}-\tfrac{3}{2}l^2C_7+\tfrac{3}{4}l^2C_8-(\lambda+\mu)I_2+2(\lambda+\mu)C_6I_4-(\lambda+\mu){C_6}^2I_6 \tag{۶۸}$$

$$D_6=-\mu I_2+2\mu C_6I_4-\mu{C_6}^2I_6-4C_{12}+2l^2C_7-l^2C_8 \tag{۶۹}$$

$$D_7=\tfrac{1}{4}\mu l^2I_2-\tfrac{1}{2}\mu l^2C_6I_4+\tfrac{1}{4}\mu l^2{C_6}^2I_6 \tag{۷۰}$$

$$D_8=-(\lambda+2\mu)I_2+2C_{10}-C_9-C_{12}+\tfrac{1}{2}l^2C_7-\tfrac{1}{4}l^2C_8 \tag{۷۱}$$

$$D_9=\tfrac{5}{4}l^2C_8-\tfrac{3}{2}\mu l^2{C_6}^2I_4-\tfrac{5}{2}l^2C_7+3C_{12}-(\lambda+\mu)I_2-(\lambda+\mu){C_6}^2I_6+2(\lambda+\mu)C_6I_4 \tag{۷۲}$$

$$D_{10}=3l^2C_7-\tfrac{3}{2}l^2C_8+\tfrac{3}{2}\mu l^2{C_6}^2I_4-\mu I_2-\mu{C_6}^2I_6+2\mu C_6I_4-4C_{12} \tag{۷۳}$$

معادلات کلی صفحه مرتبه سوم به‌صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{gathered}D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+D_3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+D_4\frac{\partial^3\varphi_x}{\partial x^3}+D_4\frac{\partial^3\varphi_x}{\partial x\,\partial y^2}+D_4\frac{\partial^3\varphi_y}{\partial y\,\partial x^2}\\+D_3\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}+D_3\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}+D_4\frac{\partial^3\varphi_y}{\partial y^3}+P_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2P_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\\+P_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=q(x,y)\end{gathered} \tag{۷۴}$$

$$-D_4\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}+D_5\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial y\,\partial x}+D_6\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial y^2}+D_7\frac{\partial^4\varphi_y}{\partial x\,\partial y^3}-D_7\frac{\partial^4\varphi_x}{\partial y^4}+D_7\frac{\partial^4\varphi_y}{\partial y\,\partial x^3}-D_7\frac{\partial^4\varphi_x}{\partial y^2\,\partial x^2}-D_3\frac{\partial w}{\partial x}-D_3\varphi_x-D_4\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+D_8\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x^2}=0 \quad (۷۵)$$

$$-D_4\frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial x^2}+D_9\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial y\,\partial x}+D_{10}\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial x^2}+D_7\frac{\partial^4\varphi_y}{\partial x^4}+D_7\frac{\partial^4\varphi_y}{\partial x^2\,\partial y^2}-D_7\frac{\partial^4\varphi_x}{\partial y\,\partial x^3}-D_7\frac{\partial^4\varphi_x}{\partial x\,\partial y^3}-D_4\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}-D_3\frac{\partial w}{\partial y}-D_3\varphi_y+D_8\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial y^2}=0 \quad (۷۶)$$

روش حل ناویر

روش حل ناویر برای صفحات مستطیلی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در همه لبه‌ها قابل‌استفاده است. به خاطر این‌که شرایط مرزی خودبه‌خود در این روش ارضاء می‌شوند. توابع مجهول سطح میانی صفحه به‌صورت سری‌های دوگانه مثلثاتی به‌صورت زیر بیان می‌شوند[۲۴و۲۳]:

$$W(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}\sin\alpha x\sin\beta y \quad (۷۷)$$

$$\varphi_x(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}X_{mn}\cos\alpha x\sin\beta y \quad (۷۸)$$

$$\varphi_y(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}y_{mn}\sin\alpha x\cos\beta y \quad (۷۹)$$

نیرو نیز از رابطه زیر قابل‌محاسبه می‌باشد:

$$q=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Q_{mn}\sin\alpha x\sin\beta y \quad (۸۰)$$

$$Q_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\alpha x\sin\beta y\,dx\,dy \quad (۸۱)$$

$$Q_{mn}=\begin{cases} q_0 & \text{برای نیروی سینوسی}\\ \dfrac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{برای نیروی یکنواخت}\\ \dfrac{4Q_0}{ab} & \text{برای نیروی نقطه در مرکز صفحه}\end{cases} \quad (۸۲)$$

که در آن:

$$\alpha=\frac{\pi m}{a}\ ,\ \beta=\frac{\pi n}{b}\ ,\ i=\sqrt{-1} \quad)38($$

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده نیز توسط روش ناویر طبق معادلات ذیل ارضاء می‌شوند:

$$x = 0 \text{ در } \begin{cases} w(0,y) = w(a,y) = \sum\sum w_{mn} \sin\frac{m\pi}{a}\, x \sin\frac{n\pi}{b}\, y = 0 \\ \varphi_y(0,y) = \varphi_y(a,y) = \sum\sum y_{mn} \sin\frac{m\pi}{a}\, x \cos\frac{n\pi}{b}\, y = 0 \end{cases} \quad x = a \text{ ,} \tag{۸۴}$$

$$y = 0 \text{ در } \begin{cases} w(x,0) = w(x,b) = \sum\sum w_{mn} \sin\frac{m\pi}{a}\, x \sin\frac{n\pi}{b}\, y = 0 \\ \varphi_x(x,0) = \varphi_x(x,b) = \sum\sum X_{mn} \cos\frac{m\pi}{a}\, x \sin\frac{n\pi}{b}\, y = 0 \end{cases} \quad y = b \text{ ,} \tag{۸۵}$$

به دست آوردن ماتریس معادلات صفحه مرتبه سوم در کلی‌ترین حالت:

پس از حل به کمک روش ناویر و نام‌گذاری ضرایب متغیرهای معادلات به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$R_1 = D_1\alpha^2\beta^2 + D_2\alpha^4 + D_2\beta^4 - D_3\alpha^2 - D_3\beta^2 - P_x\alpha^2 - P_y\beta^2 \tag{۸۶}$$

$$R_2 = R_4 = D_4\alpha^3 + D_4\alpha\,\beta^2 - D_3\alpha \tag{۸۷}$$

$$R_3 = R_7 = D_4\beta^3 + D_4\alpha^2\beta - D_3\beta \tag{۸۸}$$

$$R_5 = -D_7\beta^4 - D_7\alpha^2\beta^2 - D_6\beta^2 - D_8\alpha^2 - D_3 \tag{۸۹}$$

$$R_6 = D_7\alpha\beta^3 + D_7\alpha^3\beta - D_5\alpha\beta \tag{۹۰}$$

$$R_8 = -D_7\alpha^3\beta - D_7\alpha\beta^3 - D_9\alpha\beta \tag{۹۱}$$

$$R_9 = D_7\,\alpha^4 + D_7\alpha^2\beta^2 - D_{10}\alpha^2 - D_8\beta^2 - D_3 \tag{۹۲}$$

ماتریس کلی معادلات صفحه مرتبه سوم به همراه معادلات کمکی به شکل زیر حاصل خواهند شد:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ R_4 & R_5 & R_6 \\ R_7 & R_8 & R_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{mn} \\ X_{mn} \\ y_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۹۳}$$

برنامه محاسباتی در نرم‌افزار MATLAB نوشته‌شده و نتایج با استفاده از این برنامه به‌دست‌آمده‌اند.کلیه شرایط مرزی نیز به‌صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته‌شده‌اند. جنس صفحه را مواد مختلفی ازجمله اپوکسی، گرافن، مس و ... در نظر می‌گیرند. در این مقاله جنس صفحه را گرافن در نظر می‌گیریم. یک صفحه گرافن تک‌لایه دارای خصوصیات زیر است[۲۵]:

$$\mathrm{E} = 1.06TPa, \nu = 0.25\,, h = 0.34nm, \rho = 2250\,{}^{kg}/_{m^3}$$

همچنین رابطه بینν و μ و E را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{۹۴}$$

که در آن E مدول یانگ و λ و μ ضرایب لامه هستند[۲۶]. همچنین مقدار نیرو را $q = {}^{1N}/_{m^2}$ در نظر می‌گیریم.

نتایج و بحث:

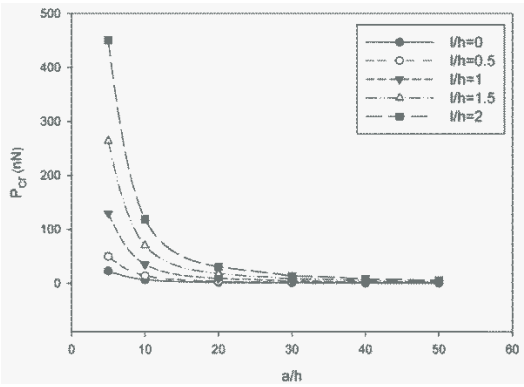
جدول(۱)، نشان می‌دهد میزان نیروی بحرانی کمانش نانو صفحات مختلف (کیرشهف، میندلین، برشی مرتبه سوم، برشی مرتبه n ام) تحت اثر نیروی دومحوره صفحه‌ای در جهت x وy، با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه

کاهش می‌یابد. همچنین میزان نیروی بحرانی برای نانوصفحه میندلین بیش‌ترین مقدار و برای نانوصفحه برشی مرتبه سوم کم‌ترین مقدار است.

جدول۱ : میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحات مختلف تحت اثر نیروی دومحوره در جهت y,x برای نسبت طول به ضخامت متفاوت) a/b=1, l/h=1(

a/h	Kirchhoff plate	Mindlin plate	Third order shear deformation plate	N order shear deformation plate (n=5)
5	142.2802	233.7327	130.1058	131.5295
10	35.5701	86.0362	34.7400	34.8479
20	8.8925	23.9784	8.8394	8.8465
30	3.9522	10.8814	3.9417	3.9431
40	2.2231	6.16595	2.2198	2.2202
50	1.4228	3.9597	1.4214	1.4216

شکل(۲)، نشان می‌دهد میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی دومحوره صفحه‌ای در جهت x و y با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانوصفحه افزایش و با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش می‌یابد.



شکل ۲: مقایسه میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی دومحوره در جهت y,x برای نسبت پارامتر طول به ضخامت صفحه و طول به ضخامت متفاوت)a/b=1(

جدول(۲)، میزان نیروی بحرانی کمانش بدون بعد نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی تک‌محوره در جهت x برای نسبت طول به ضخامت و نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت متفاوت را نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود میزان نیروی بحرانی بدون بعد نانو صفحه مرتبه سوم با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانوصفحه افزایش و با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش می‌یابد.

جدول ۲: مقایسه میزان نیروی بحرانی کمانش بدون بعد نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی تک‌محوره در جهت x برای نسبت پارامتر طول به ضخامت صفحه و طول به ضخامت متفاوت)a/b=1(

a/h	*l/h*				
	0	0.5	1	1.5	2
5	1.0000	2.1654	5.6521	11.4581	19.5847
10	1.0000	2.0442	5.1723	10.3835	17.6785
20	1.0000	2.0113	5.0437	10.0972	17.1718
30	1.0000	2.0050	5.0195	10.0433	17.0765
40	1.0000	2.0028	5.0110	10.0244	17.0431

50	1.0000	2.0018	5.0070	10.0156	17.0276

جدول(۳)، نشان می‌دهد که میزان نیروی بحرانی نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی دومحوره صفحه‌ای در جهت x و y برای مودهای متفاوت، با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانوصفحه افزایش می‌یابد. همچنین میزان نیروی بحرانی برای مود اول کم‌ترین مقدار و برای مودهای بعدی به ترتیب بیش‌تر می‌شود.

جدول ۳: مقایسه میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحه مرتبه سوم برای مودهای مختلف تحت اثر نیروی دومحوره در جهت y,x برای نسبت پارامتر طول به ضخامت صفحه متفاوت (a/h=30, a/b=1)

Mode	*l/h*			
	0	0.5	1	2
p_{11}	0.7853	1.5745	3.9417	13.4099
p_{12}	1.9441	3.9126	9.8151	33.4214
p_{21}	1.9441	3.9126	9.8151	33.4214
p_{22}	3.0807	6.2228	15.6422	53.3102

جدول(۴)، به بررسی میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحه مرتبه سوم و پنجم تحت اثر نیروی تک‌محوره در جهت x برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت می‌پردازد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود میزان نیروی بحرانی کمانش تک‌محوره نانوصفحه مرتبه سوم از مرتبه پنجم کم‌تر می‌باشد.

جدول ۴: مقایسه میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحه مرتبه سوم و پنجم تحت اثر نیروی تک‌محوره در جهت x برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت (a/b=1)

a/h	*l/h*									
	0		0.5		1		1.5		2	
	n=3	n=5	n=3	n=5	n=3	n=5	n=3	n=5	n=3	n=5
5	46.0378	46.2021	99.6890	100.7422	260.2116	263.0590	527.5054	532.9856	901.6352	910.7059
10	13.4331	13.4481	27.4598	27.5460	69.4801	69.6959	139.4830	139.8852	237.4772	238.1335
20	3.5051	3.5062	7.0497	7.0555	17.6789	17.6930	35.3919	35.4180	60.1893	60.2319
30	1.5706	1.5708	3.1490	3.1502	7.8834	7.8862	15.7736	15.7788	26.8197	26.8282
40	0.8860	0.8860	1.7744	1.7748	4.4396	4.4405	8.8813	8.8830	15.0997	15.1024
50	0.5678	0.5678	1.1366	1.1367	2.8429	2.8432	5.6867	5.6873	9.6679	9.6690

جدول(۵)، به مقایسه میزان نیروی بحرانی نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی دومحوره و تک‌محوره برای نسبت پارامتر طول به ضخامت صفحه متفاوت می‌پردازد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود میزان نیروی بحرانی کمانش تک-محوره به‌مراتب بیش‌تر از دومحوره می‌باشد.

جدول ۵ : مقایسه میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی تک‌محوره و دومحوره برای نسبت طول به ضخامت و پارامتر طول به ضخامت صفحه متفاوت)a/b=1(

a/h	l/h									
	0		0.5		1		1.5		2	
	Biaxial buckling	Uniaxial buckling	Biaxial buckling	Uniaxial buckling	Biaxial buckling	Uniaxial buckling	Biaxial buckling	Uniaxial buckling	Biaxial buckling	Uniaxial buckling
5	23.0189	46.0378	49.8445	99.6890	130.1060	260.2116	263.7530	527.5054	450.8180	901.6352
10	6.7165	13.4331	13.7299	27.4598	34.7400	69.4801	69.7415	139.4830	118.7390	237.4772
20	1.7526	3.5051	3.5248	7.0497	8.8394	17.6789	17.6959	35.3919	30.0947	60.1893
30	0.7853	1.5706	1.5745	3.1490	3.9417	7.8834	7.8868	15.7736	13.4099	26.8197
40	0.4430	0.8860	0.8872	1.7744	2.2198	4.4396	4.4407	8.8813	7.5499	15.0997
50	0.2839	0.5678	0.5683	1.1366	1.4214	2.8429	2.8433	5.6867	4.8339	9.6679

نتیجه‌گیری:

در این مقاله، به بررسی کمانش نانو صفحه مرتبه سوم با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح‌شده پرداخته شد. همان‌گونه که در جداول و اشکال مشاهده شد:

- ✓ میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی دومحوره صفحه‌ای در جهت x و y با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانوصفحه افزایش و با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه کاهش می‌یابد.
- ✓ همچنین میزان نیروی بحرانی کمانش تک‌محوره نانوصفحه مرتبه سوم از مرتبه پنجم کم‌تر می‌باشد.
- ✓ میزان نیروی بحرانی کمانش تک‌محوره نانوصفحه مرتبه سوم به‌مراتب بیش‌تر از دومحوره می‌باشد.

مراجع:

[1] A. Shooshtari, D. Dastani Mobarekeh, Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, No. 15, (2014), 223-236.

[2] S. Seifoori, GH. Liaghat, M. Foladi, Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, No. 8, (2013), 151-160.

[3] T. Murmu, S.C. Pradhan, Mechanics Research Communications, 36, (2009), 933–938.

[4] S. C. Pradhan, J. K. Phadikar, International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 11, No. 3, (2011), 411-429.
[5] T. Murmu, J. Sienz, S. Adhikari, C. Arnold, Composites: Part B, 44, (2013), 84–94.
[6] S.C. Pradhan, T. Murmu, Physica E, 42, (2010), 1293–1301.
[7] A.T. Samaeia, S. Abbasionb, M.M. Mirsayar, Mechanics Research Communications, 38, (2011), 481–485.
[8] S. Narendar, Composite Structures, 93, (2011), 3093–3103
[9] S. C. Pradhan, J. K. Phadikar, International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 11, No. 3, (2011), 411-429.
[10] A. Farajpour, A.R. Shahidi, M. Mohammadi, M. Mahzoon, Composite Structures, 94, (2012), 1605–1615.
[11] T. Murmu, J. Sienz, S. Adhikari, C. Arnold, Composites: Part B, 44, (2013), 84–94.
[12] Matin Latifi, Fatemeh Farhatnia, Mahmoud Kadkhodaei, European Journal of Mechanics A/Solids, 41, (2013), 16-27.
[13] Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., Tong, P.," Couple stress Based Strain gradient theory for elasticity".Int.J.Solids Struct.39, pp. 2731–2743,(2002).

[14] Toupin, R.A.,"Elastic materials with couple stresses".Arch.Rational Mech.Anal.11, pp. 385–414,(1962).
[15] Mindlin, R.D., Tiersten, H.F.," Effects of couple-stresses in linear elasticity" Arch. Rational Mech. Anal.11, pp. 415–448, (1962).

[16] Koiter, W.T.,"Couple stresses in the theory of elasticity",I and II.Proc .K. Ned. Akad .Wet.(B) 67,pp. 17–44,(1964).
[17] Mindlin, R.D.,"Micro-structure in linear elasticity".Arch.RationalMech.Anal .16, pp. 51–78, (1964).
[18] Tsiatas.G.C ,"A new kirchhoff model based on a modified couple stress theory",International Journal of solids and structures,No.46, pp2757-2764,(2009).
[19] Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X ,"Asize-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory",European Journal of mechanics A/Solids, No.30,pp 517-524, (2011).
[20]Farajpour.A,Shahidi.A.R,Mohammadi.M,Mahzoon.M,"Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics,Composite Structures,No.94, pp 1605-1615,(2012).
[21] B.Akgoz, Omer Civalek"Free vibration analysis for single –layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory"materials and design No.42,pp 164-171, (2012).
[22] Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X ,"Asize-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory",European Journal of mechanics A/Solids, No.30,pp 517-524, (2011).
[23] Tai.T ,HoChoi.D ,"size-dependent functionally graded kirchhoff and mindlin plate theory based on a modified couple stress theory",Composite Structures,No.95,pp142-153,(2013).
[24] B.Akgoz, Omer Civalek"Free vibration analysis for single –layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory"materials and design No.42,pp 164-171,(2012).
[25] Roque.C.M.C ,Ferreira.A.J.M ,Reddy.J.N,"Analysis of mindlin micro plates with a modified couple stress theory and meshlessmethod",Applied Mathematical Modeling,No.37,pp 4626-4633,(2013).