

## تحلیل کمانش نانو صفحه مستطیلی کیرشهف گرافنی با استفاده از نظریه تنش مزدوج اصلاح شده و روش حل ناویر

مجید اسکندری شهرکی<sup>۱</sup>، محمود شریعتی<sup>۲</sup>، محسن حیدری بنی<sup>۳</sup>، جعفر اسکندری جم<sup>۴</sup>

۱. دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

۲. استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.

۳. دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران.

۴. استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

### چکیده

صفحات مستطیلی جایگاه ویژه‌ای در علوم مهندسی مکانیک، فضانوری، هسته‌ای و مسائل مهندسی دریا دارا می‌باشند. بنابراین بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی این صفحات در شرایط مختلف بارگذاری حائز اهمیت است. در این مقاله با استفاده از نظریه تنش مزدوج اصلاح شده، مشخصات کمانش نانو صفحه کیرشهف مستطیلی موردمطالعه قرار گرفته است. به دلیل عدم توانایی تئوری‌های کلاسیک الاستیسیته، از تئوری غیرکلاسیک تنش مزدوج اصلاح شده استفاده می‌گردد. در نظریه تنش مزدوج اصلاح شده، چگالی انرژی کرنشی تابعی از مؤلفه‌های تانسور کرنش، تانسور انحناء، تانسور تنش و قسمت متقارن تانسور تنش کوپل می‌باشد. پس از به دست آوردن انرژی کرنشی، کار خارجی، معادله کمانش و قراردادن آن‌ها در اصل همیلتون، معادلات اصلی و کمکی نانو صفحه به دست آورده می‌شود. سپس با جایگذاری شرایط مرزی و نیرویی در معادلات حاکم به بررسی کمانش نانو صفحه کیرشهف مستطیلی به ضخامت  $h$  با تکیه‌گاه ساده در اطراف می‌بردازیم. همچنین روش حل نیز روش ناویر می‌باشد. نتایج پژوهش حاضر حاکی از آن است که میزان نیروی بحرانی نانو صفحه کیرشهف تحت اثر نیروی دومحوره صفحه‌ای در جهت X و ع، با افزایش کمترین مقدار است و با افزایش اثر اندازه، نیروی بحرانی نیز افزایش پیدا می‌کند. همچنین میزان نیروی بحرانی کمانش نانو صفحات مختلف (کیرشهف، میندلین، برشی مرتبه سوم، برشی مرتبه ۱۱ ام) تحت اثر نیروی تکمحوره صفحه‌ای در جهت X، با افزایش نسبت طول به ضخامت کاهش می‌یابد. همچنین میزان نیروی بحرانی برای نانو صفحه میندلین بیشترین مقدار و برای نانو صفحه برشی مرتبه سوم کمترین مقدار است. از سوی دیگر میزان نیروی بحرانی کمانش تکمحوره به مرتب بیشتر از دومحوره می‌باشد.

**کلمات کلیدی:** کمانش، نظریه تنش مزدوج اصلاح شده، صفحه کیرشهف، نانو صفحه مستطیلی.

### ۱. مقدمه:

در سال‌های اخیر نانو سازه‌ها در انجمان محققان توجه شیانی را در تحقیقات تئوری و تجربی به همراه داشته است. این ساختارهای نانومقیاس به طور شگفت‌آوری خصوصیات مکانیکی، الکتریکی، دمایی و شیمیایی بارزی در ارتباط با ساختمان ماد از خود نشان داده‌اند [۱]. ناحیه وسیعی از کاربردهای جدید برای این سازه‌ها پیش‌بینی شده است که در این میان می‌توان به فضانوری، بیوالکتریک، میکروالکترونیک و ... اشاره کرد. بعد از کشف نانولوله‌های کربنی تلاش و کوشش زیادی برای مطالعه صفحات گرافن<sup>۱</sup> در ابعاد نانو صورت گرفته است.

تحلیل این صفحات به عنوان یک موضوع بنیادی در مطالعات نانو مواد و بسیاری از رشته‌ها و میادین تکنولوژی می‌باشد و به عنوان یکی از بر جسته‌ترین مواد برای تولیدات وسایل و ابزار نانو الکتریکی به حساب می‌آید. صفحات گرافن تک لایه شامل تعدادی از اتم‌های کربن می‌باشد که به صورت شبکه‌های شش‌ضلعی آرایش یافته‌اند، که دارای خصوصیات الکتریکی و مکانیکی بوده و به عنوان یک ماده با ضخامت کم به همراه ضریب هدایت گرمایی و استقامات بالا در جهان شناخته شده است. به خاطر این خصوصیات بارز و آشکار، صفحات گرافن در رشته‌های زیادی کاربرد دارند که عبارت‌اند از: نانو الکترونیک، نانو سنسورها<sup>۲</sup>، نانو نوسانگرها<sup>۳</sup>، نانو محرک‌ها<sup>۴</sup>، نانو کامپوزیت‌ها<sup>۵</sup> و نانو سیستم‌های اپتومکانیک<sup>۶</sup> [۲]. علاوه بر آن به

<sup>2</sup> Nanosensor

<sup>3</sup> Nanooscillator

<sup>4</sup> Nanoactuators

<sup>5</sup> Nanocomposite

خاطر سختی بالا و سبک بودن صفحات گرافن، برای سیستم‌های نانو الکترو-مکانیک و سنسورهای حساس مورد استفاده قرار می‌گیرند [۳]. از آنجایی که گرافن دارای ویژگی نسبت سختی به اینرسی بالایی می‌باشد، در وسایل نانو مکانیکی با فرکانس‌های بالا نیز کاربرد دارد به طوری که در سال‌های اخیر برای صفحات گرافن نازک بر پایه مقیاس کوچک نسبت بالای سختی به وزن به اثبات رسیده است [۴]. وابستگی خواص مواد به اندازه آنها در مقیاس‌های بسیار کوچک، به صورت تجربی اثبات شده است. با کاهش اندازه و نزدیک شدن حداقل یکی از ابعاد جسم به محدوده نانومتری، خواص بسیار متفاوتی از جسم بروز می‌نماید. با این همه، سوال بعد این است که اگر یکی از اندازه‌ها در حد نانومتری باشد، آیا بقیه اندازه‌ها بر روی ویژگی آن اثر می‌گذارند؟ به بیانی دیگر، در یک نوع نانوساختار با آلتوتروپ ثابت (متلا گرافن) اگر ضخامت در حد تک لایه باقی مانده و سایر ابعاد تغییر کند، خواص آن چگونه تاثیر می‌پذیرد.

برای آنالیز مکانیکی نانو سازه‌ها، شبیه‌سازی مولکولی و تجربی مناسب‌تر است. اما از یکسو به دلیل اینکه آزمایش‌های کنترل شده در مقیاس نانو بسیار پیچیده‌اند و از سوی دیگر پرهزینه بودن شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی، باعث شده است که آنالیز مدل‌های تئوری به عنوان روش‌های مناسب در بررسی رفتار نانو سازه‌ها مطرح گردد. افزون بر آن که با امکانات فنی عصر حاضر، شبیه‌سازی‌ها فقط برای نانو سازه‌ها در مقیاس کوچک امکان‌پذیر است [۵]. برای مطالعه مواد در مقیاس کوچک مطمئن‌ترین روش آزمایش در مقیاس اتمی و مولکولی می‌باشد. در این روش نانو ساختار در ابعاد واقعی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این روش برای تعیین خواص مکانیکی نانو ساختارها از میکروسکوپ نیروی اتمی (AFM) برای اعمال بارهای مکانیکی مختلف بر روی نانو صفحات و اندازه‌گیری پاسخ استفاده می‌کنند. مشکلات اساسی در این روش دشواری کنترل بر شرایط آزمایش در این مقیاس و نیز هزینه‌های اقتصادی سنگین و نیز زمان بر بودن روش می‌باشد. از این‌رو از این روش تنها برای اعتبارسنجی روش‌های ساده و کم‌هزینه دیگر استفاده می‌شود.

با توجه به محدودیت‌های مطرح شده در روش‌های فوق برای مطالعه نانو ساختارها، محققین به دنبال راهکارهای ساده‌تر در بررسی نانو ساختارها بوده‌اند. مدل‌سازی ساختارهای در مقیاس کوچک، با استفاده از مکانیک محیط پیوسته راه حل دیگری در مطالعه این مواد می‌باشد. تئوری‌های محیط پیوسته‌ی وابسته به اندازه متنوع وجود دارند که آثار اندازه را در نظر گرفته‌اند از جمله: تئوری میکرومورفیک، تئوری میکرو دشواری، تئوری میکروپولار، تئوری کوسرات، تئوری غیرموضعی، تئوری کوپل تنفس اصلاح شده، تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی که این‌ها گسترش یافته‌ی تئوری‌های میدانی کلاسیک هستند که در آن‌ها آثار اندازه گنجانده شده است. لذا در پژوهش حاضر به تحلیل کمانش نانو صفحه مستطبی کیوشف با استفاده از تئوری تنفس کوپل اصلاح شده و روش حل ناویر پرداخته خواهد شد.

## ۲. نظریه تنفس مزدوج اصلاح شده:

بانگ و همکارانش [۶] در سال ۲۰۰۲ با اصلاح کردن تئوری کوپل تنفس که توسط توپین [۷]، میندلین و تیرستن [۸]، کویتر [۹] و میندلین [۱۰] در سال ۱۹۶۴ ارائه شد، یک مدل کوپل تنفس اصلاح شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول ماده<sup>۷</sup> برای تصویر کردن اثر اندازه می‌باشد را پیشنهاد کردند، در حالی که تئوری کوپل تنفس کلاسیک دارای دو پارامتر مقیاس طول ماده است. کاهش تعداد پارامترهای مقیاس طول در تئوری کوپل تنفس منجر به سودمند بودن و کاربرد بیشتر این تئوری نسبت به تئوری کوپل تنفس کلاسیک گردید، زیرا تعیین پارامتر مقیاس طول، کار چالش برانگیزی است. از تفاوت‌های مهم تئوری غیرکلاسیک تنفس مزدوج اصلاح شده با تئوری کلاسیک می‌توان به این مورد اشاره نمود که در تئوری کلاسیک فرض می‌شود که اثر متقابل دو المان مجاور فقط به صورت اعمال یک بردار تنفس نیرویی است، در صورتی که در تئوری غیرکلاسیک این اثر به صورت یک بردار مزدوج تنفس، مدلسازی می‌شود. در تئوری کوپل تنفس اصلاح شده علاوه بر سادگی روابط ارائه شده، دقت بالایی نیز در ارائه پاسخ برای انواع سیستم‌های مورد مطالعه در پدیده‌های گوناگون مکانیکی مشاهده شده است. در تئوری تنفس مزدوج اصلاح شده، مشخص شد که علاوه بر دو ثابت لامه، تنها به یک پارامتر مقیاس اندازه برای بیان وابستگی رفتار ماده به ابعاد آن نیاز است. این ثابت از خواص مکانیکی ماده است و به صورت تجربی و آزمایشگاهی تعیین می‌شود.

در تئوری کوپل تنفس اصلاح شده، چگالی انرژی کرنشی در مختصات قائم سه‌بعدی برای جسمی که محدود به حجم  $V$  و سطح  $\Omega$  می‌باشد به صورت زیر بیان می‌شود [۱۱]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

که در آن:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

<sup>6</sup> Nanooptomechanica

<sup>7</sup> Material length scale parameter

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (3)$$

$\epsilon_{ij}$  و  $\chi_{ij}$  به ترتیب قسمت متقارن تانسور انجنا<sup>۸</sup> و تانسور کرنش<sup>۹</sup> هستند.  $u_i$  و  $\theta_i$  به ترتیب بردار جابجایی<sup>۱۰</sup> و بردار چرخشی<sup>۱۱</sup> تعریف شده‌اند.

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Curl} u \quad (4)$$

$$m_{ij} \sigma_{ij} \text{ به ترتیب تانسور تنش و قسمت انحرافی تانسور کوپل تنش } \quad (5)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

$$m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \quad (6)$$

که در آن  $\lambda$  و  $\mu$  ثوابت لامه،  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر و  $l$  پارامتر مقیاس طول ماده می‌باشد. از معادله (۳) و (۶) می‌توان دریافت که  $\chi_{ij}$  و  $m_{ij}$  متقارن هستند.

### ۳. مدل صفحه کیرشهف:

معادلات جابجایی برای صفحه کیرشهف به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u_1(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (7)$$

$$u_2(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (7)$$

$$u_3(x, y, z) = w(x, y) \quad (7)$$

که در آن  $w$  میزان جابجایی نقطه میانی صفحه در راستای محور  $Z$  می‌باشد. قسمت متقارن تانسور انجنا و تانسور کرنش و تنش و بردار چرخشی برای مدل صفحه کیرشهف به صورت زیر می‌باشد:

$$\epsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8)$$

$$\epsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (9)$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (10)$$

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = 0 \quad (11)$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (12)$$

tensor

<sup>۹</sup> Strain tensor

<sup>۱۰</sup> Displacement vector

<sup>۱۱</sup> Rotation vector

<sup>۱۲</sup> Deviatoric part of the couple stress tensor

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (13)$$

$$\theta_z = 0 \quad (14)$$

$$x_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (15)$$

$$x_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (16)$$

$$x_{xy} = x_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (17)$$

$$x_{xz} = x_{zx} = x_{yz} = x_{zy} = x_{zz} = 0 \quad (18)$$

$$\sigma_{xx} = -(\lambda + 2\mu) \left( z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \lambda \left( z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (19)$$

$$\sigma_{yy} = -\lambda \left( z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (\lambda + 2\mu) \left( z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (20)$$

$$\sigma_{zz} = -\lambda z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (21)$$

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} = -2\mu \left( z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (22)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0 \quad (23)$$

تغییرات انرژی کرنشی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta U = \int_V \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + 2\sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz} + m_{xx} \delta x_{xx} + m_{yy} \delta x_{yy} + m_{zz} \delta x_{zz} + 2m_{xy} \delta x_{xy} + 2m_{xz} \delta x_{xz} + 2m_{yz} \delta x_{yz}) dV \quad (24)$$

$$\text{می‌توان جهت ساده‌نویسی، ضرایب متغیرها را از } F_1 \text{ تا } F_3 \text{ مطابق معادله (25) نام‌گذاری کرد و آن‌ها را جداگانه به دست آورد:}$$

$$\delta U = \int_V (F_1 \delta w_{,xx} + F_2 \delta w_{,yy} + F_3 \delta w_{,xy}) dV \quad (25)$$

که در آن:

$$F_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} [(\lambda + 2\mu)z^2 + \mu l^2] + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (\lambda z^2 - \mu l^2) \quad (26)$$

$$F_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} [(\lambda + 2\mu)z^2 + \mu l^2] + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\lambda z^2 - \mu l^2) \quad (27)$$

$$F_3 = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (4\mu z^2 + 4\mu l^2) \quad (28)$$

#### ۴. نیروی کمانش:

برای صفحه مستطیلی به طول  $a$ , عرض  $b$  و ضخامت  $h$  با نیروهای محوری  $P_{xy}, P_y, P_x$  که در آن:

$P_x$ : نیروی محوری در راستای  $x$  و  $P_y$ : نیروی محوری در راستای  $y$  و  $P_{xy}$ : نیروی برشی صفحه  $xy$  و  $q(x,y)$ : نیروی خارج صفحه‌ای می‌باشد، معادله نیروی کمانش به صورت زیر خواهد بود [۱۲ و ۱۳]:

$$P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, y) \quad (۲۹)$$

##### ۵. معادله کار مجازی که توسط نیروی خارجی حاصل می‌گردد [۱۴]:

کار مجازی که توسط نیروی خارجی انجام می‌گیرد شامل سه بخش است:

۱- کار مجازی که توسط نیروهای حجمی  $\Omega * (-h/2, h/2)$  که روی  $V$  انجام می‌گیرد.

۲- کار مجازی که توسط نیروی برشی صفحه‌ای  $\Gamma$  در سطح بالایی و پایینی ( $\Omega$ ) انجام می‌گیرد.

۳- کار مجازی که توسط نیروی برشی صفحه‌ای و بر روی سطوح جانبی  $S = \Gamma * (-h/2, h/2)$  انجام می‌گیرد. که  $\Omega$  صفحه میانی ورق و محیط میانی ورق می‌باشد.

اگر  $(f_x, f_y, f_z)$  نیروی حجمی و  $(c_x, c_y, c_z)$  ممان حجمی و  $(q_x, q_y, q_z)$  نیروهایی باشند که بر روی سطح  $\Omega$  عمل می‌کنند و  $(t_x, t_y, t_z)$  تنش برشی کوشی (Surface couple) باشند، در این صورت تغییرات کار مجازی به صورت زیر می‌باشد: (Variation)

$$\delta w = - \left[ \int_{\Omega} (f_x \delta u + f_y \delta V + f_z \delta w + q_x \delta u + q_y \delta V + q_z \delta w + c_x \delta \theta_x + c_y \delta \theta_y + c_z \delta \theta_z) dx dy + \int_{\Gamma} (t_x \delta u + t_y \delta V + t_z \delta w + s_x \theta_x + s_y \theta_y + s_z \theta_z) d\Gamma \right] \quad (۳۰)$$

با توجه به اینکه در این تحقیق فقط نیروی خارجی  $q_z$  اعمال شده است، کار مجازی به صورت:

$$\delta w = \int_0^a \int_0^b q(x, y) \delta w(x, y) dx dy \quad (۳۱)$$

می‌باشد.

همچنین با استفاده از اصل همیلتون داریم [۱۵]:

$$\delta(U - w) = 0 \quad (۳۲)$$

که در آن  $U$  انرژی کرنشی و  $W$  کار نیروهای خارجی می‌باشد.

##### ۶. معادله نهایی صفحه با اعمال نیروی کمانش و نیروی خارجی:

با به کارگیری اصل همیلتون (معادله ۳۲)، معادله اصلی مطابق زیر به دست می‌آید:

$$\left[ \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} \right) dz \right] + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, y) \quad (۳۳)$$

۷. به دست آوردن معادلات صفحه کیرشهف در کلی ترین حالت (شامل خمش، کمانش):

با در نظر گرفتن مقادیر زیر:

$$A_1 = (\lambda + 2\mu)I_2 + \mu l^2 h \quad (34)$$

$$I_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z^i dz \quad (35)$$

معادلات کلی صفحه کیرشهف به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, y) \quad (36)$$

#### ۸. روش حل ناویر:

روش حل ناویر برای صفحات مستطیلی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در همه لبه‌ها قابل استفاده است. به خاطر اینکه شرایط مرزی خود به خود در این روش ارضا می‌شوند توابع مجھول سطح میانی صفحه به صورت سری‌های دوگانه مثلثاتی به صورت زیر بیان می‌شوند [۱۶ و ۱۷]

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (37)$$

نیرو نیز از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (38)$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y dx dy \quad (39)$$

$$Q_{mn} = \begin{cases} q_0 & \text{برای نیروی سینوسی} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{برای نیروی یکنواخت} \\ \frac{4Q_0}{ab} & \text{برای نیروی نقطه در مرکز صفحه} \end{cases} \quad (40)$$

که در آن:

$$\alpha = \frac{\pi m}{a}, \beta = \frac{\pi n}{b}, i = \sqrt{-1} \quad (41)$$

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده نیز توسط روش ناویر طبق معادلات ذیل ارضا می‌شوند:

$$\begin{aligned} x = 0, & \left\{ \begin{array}{l} w(0, y) = w(a, y) = \sum \sum w_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0 \\ \varphi_y(0, y) = \varphi_y(a, y) = \sum \sum y_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y = 0 \end{array} \right. \\ x = a, & \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} y = 0, & \left\{ \begin{array}{l} w(x, 0) = w(x, b) = \sum \sum w_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0 \\ \varphi_x(x, 0) = \varphi_x(x, b) = \sum \sum X_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0 \end{array} \right. \\ y = b, & \end{aligned} \quad (43)$$

۹. به دست آوردن ماتریس معادلات صفحه کیرشهف در کلی ترین حالت:

پس از حل به کمک روش ناویر و نام‌گذاری ضرایب متغیرهای معادلات به صورت زیر خواهیم داشت:

$$w_{mn}(A_1\alpha^4 + A_1\beta^4 + 2A_1\alpha^2\beta^2 - P_x\alpha^2 - P_y\beta^2) = Q_{mn} \quad (44)$$

ماتریس کلی معادلات صفحه کیرشهف به همراه معادلات کمکی به شکل زیر حاصل خواهد شد:

$$[N_1] [w_{mn}] = [Q_{mn}] \quad (45)$$

که در آن:

$$N_1 = A_1\alpha^4 + A_1\beta^4 + 2A_1\alpha^2\beta^2 - P_x\alpha^2 - P_y\beta^2 \quad (46)$$

جنس صفحه را مواد مختلفی از جمله اپوکسی، گرافن، مس و ... در نظر می‌گیرند. در این مقاله جنس صفحه را گرافن در نظر می‌گیریم. یک صفحه گرافن تک لایه دارای خصوصیات زیر است [۱۸]:

$$E = 1.06TPa, \nu = 0.25, h = 0.34nm, \rho = 2250 \frac{kg}{m^3}$$

همچنین رابطه بین  $\nu$  و  $E$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (47)$$

که در آن  $E$  مدول یانگ و  $\lambda$  و  $\mu$  ضرایب لامه هستند [۱۹]. همچنین مقدار نیرو را  $q = 1N/m^2$  در نظر می‌گیریم.

#### ۱۰. نتایج و بحث:

برنامه محاسباتی در نرم‌افزار Matlab نوشته شده و نتایج با استفاده از این برنامه به دست آمده‌اند. کلیه شرایط مرزی نیز به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده‌اند. شکل (۱) نشان می‌دهد میزان نیروی بحرانی نانو صفحه کیرشهف تحت اثر نیروی دومحوره صفحه‌ای در جهت  $X$  و  $Y$ ، با افزایش نسبت طول به ضخامت صفحه کاهش می‌یابد. همچنین هنگامی که اثر پارامتر اندازه در نظر گرفته نشود (تئوری کلاسیک) مقدار نیروی بحرانی کمترین مقدار است و با افزایش اثر اندازه، نیروی بحرانی نیز افزایش پیدا می‌کند.

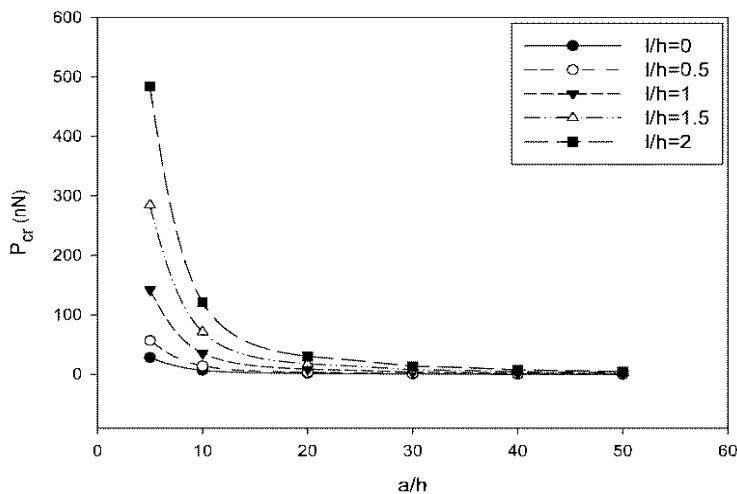
شکل (۲) نشان می‌دهد میزان نیروی بحرانی کمانش نانو صفحات مختلف (کیرشهف، میندلین، برشی مرتبه سوم، برشی مرتبه ۱۱ام) تحت اثر نیروی تکمحوره صفحه‌ای در جهت  $X$ ، با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش می‌یابد. همچنین میزان نیروی بحرانی برای نانو صفحه میندلین بیشترین مقدار و برای نانو صفحه برشی مرتبه سوم کمترین مقدار است.

شکل (۳) نشان می‌دهد میزان نیروی بحرانی نانو صفحه کیرشهف تحت اثر نیروی تکمحوره صفحه‌ای در جهت  $X$ ، با افزایش نسبت طول به ضخامت صفحه کاهش می‌یابد. همچنین هنگامی که اثر پارامتر اندازه در نظر گرفته نشود (تئوری کلاسیک)، مقدار نیروی بحرانی کمترین مقدار است و با افزایش اثر اندازه، نیروی بحرانی نیز افزایش پیدا می‌کند.

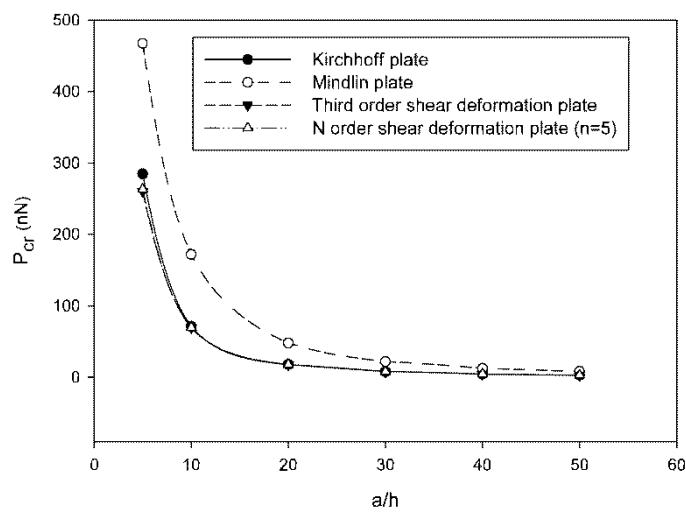
شکل (۴) نشان می‌دهد میزان نیروی بحرانی نانو صفحه کیرشهف تحت اثر نیروی دومحوره صفحه‌ای در جهت  $X$  و  $Y$  برای مودهای متفاوت، با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانو صفحه افزایش می‌یابد. همچنین میزان نیروی بحرانی برای مود اول کمترین مقدار است و برای مودهای بعدی به ترتیب بیشتر می‌شود.

جدول (۱) به مقایسه میزان نیروی بحرانی نانو صفحه کیرشهف تحت اثر نیروی دومحوره و تکمحوره برای نسبت پارامتر طول به ضخامت صفحه متفاوت می‌پردازد. همان‌گونه که می‌بینیم میزان نیروی بحرانی کمانش تکمحوره به مراتب بیشتر از دومحوره می‌باشد.

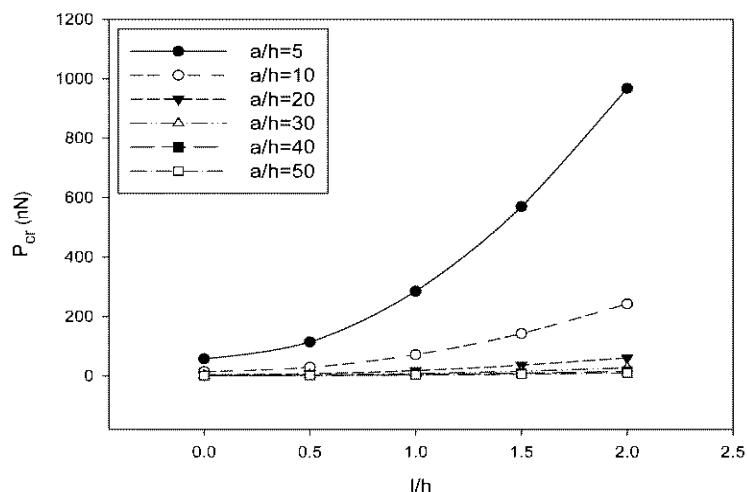
جدول (۲) به مقایسه میزان نیروی بحرانی نانو صفحات مختلف تحت اثر نیروی دومحوره و تکمحوره برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت می‌پردازد. همان‌طور که می‌بینیم میزان نیروی بحرانی نانو صفحه مرتبه سوم کمترین مقدار و نانو صفحه میندلین بیشترین مقدار است.



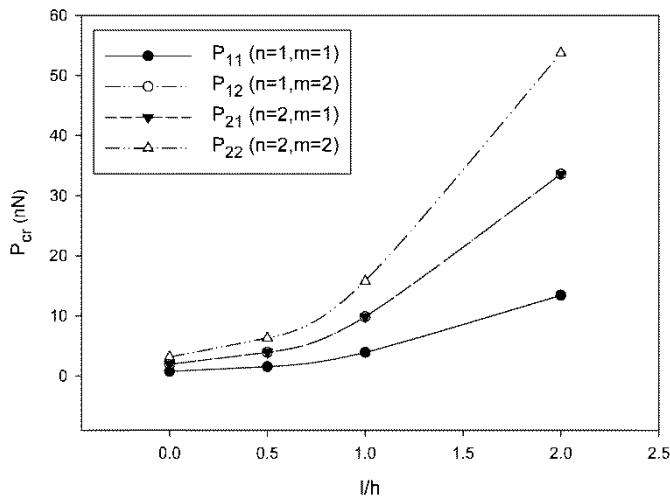
شکل ۱: میزان نیروی بحرانی نانو صفحه کیرشهف تحت اثر نیروی دومحوره در جهت  $y, x$  برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت ( $a/b=1$ )



شکل ۲: میزان نیروی بحرانی نانو صفحات مختلف تحت اثر نیروی تکمحوره در جهت  $x$  برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت ( $a/b=1, l/h=1$ )



شکل ۳: میزان نیروی بحرانی نانو صفحه کیرشهف تحت اثر نیروی تکمحوره در جهت  $x$  برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت ( $a/b=1$ )



شکل ۴: میزان نیروی بحرانی نانو صفحه کیرشهف در مودهای مختلف تحت اثر نیروی دومحوره در جهت  $x$  برای نسبت پارامتر طول به ضخامت صفحه متفاوت ( $a/b=1, a/h=30$ )

جدول ۱: میزان نیروی بحرانی نانو صفحه کیرشهف تحت اثر نیروی دومحوره و تکمحوره برای نسبت پارامتر طول به ضخامت صفحه متفاوت ( $a/b=1$ )

		0		0.5		1		1.5		2		$l/h$
$a/h$	Biaxial buckling	Uniaxial buckling										
5	28.456	56.912	56.912	113.82	142.28	284.56	284.56	569.12	483.75	967.50		
	1	1	1	42	02	04	0	08	3	55		
10	7.114	14.228	14.228	28.456	35.570	71.140	71.140	142.28	120.93	241.87		
	0	0	0	0	1	1	1	02	8	63		
20	1.778	3.5570	3.5570	7.1140	8.8925	17.785	17.785	35.570	30.234	60.469		
					0	0	0	0	5	1		
30	0.790	1.5809	1.5809	3.1618	3.9522	7.9045	7.9045	15.808	13.437	26.875		
					9	9	9	9	6	1		
40	0.444	0.8892	0.8892	1.7785	2.2231	4.4463	4.4463	8.8925	7.5586	15.117		
					3	3	3	3				
50	0.284	0.5691	0.5691	1.1382	1.4228	2.8456	2.8456	5.6912	4.8375	9.6750		

جدول ۲: میزان نیروی بحرانی نانو صفحات مختلف تحت اثر نیروی دومحوره و تکمحوره برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت ( $a/b=1, l/h=1$ )

$a/h$	Kirchhoff plate		Mindlin plate		Third order shear deformation plate		$N$ order deformation	shear plate ( $n=5$ )
	Biaxial buckling	Uniaxial buckling	Biaxial buckling	Uniaxial buckling	Biaxial buckling	Uniaxial buckling	Biaxial buckling	Uniaxial buckling
5	142.2802	284.5604	233.7327	467.4653	130.1058	260.2116	131.5295	263.0590
10	35.5701	71.1401	86.0362	172.0725	34.7400	69.4801	34.8479	69.6959
20	8.8925	17.7850	23.9784	47.9569	8.8394	17.6789	8.8465	17.6930
30	3.9522	7.9045	10.8814	21.7629	3.9417	7.8834	3.9431	7.8862
40	2.2231	4.4463	6.16595	12.3319	2.2198	4.4396	2.2202	4.4405
50	1.4228	2.8456	3.9597	7.9194	1.4214	2.8429	1.4216	2.8432

## ۱۱. نتیجه‌گیری:

در این مقاله به بررسی کمانش نانو صفحه کیرشهف با استفاده از تغوری کوپل تنش اصلاح شده پرداخته شده است. همان‌گونه که در جداول و اشکال دیدیم، میزان نیروی بحرانی نانو صفحه کیرشهف تحت اثر نیروی دومحوره صفحه‌ای در جهت X و Y، با افزایش نسبت طول به ضخامت صفحه کاهش می‌یابد. همچنین هنگامی که اثر پارامتر اندازه در نظر گرفته نشود (تئوری کلاسیک)، مقدار نیروی بحرانی کمترین مقدار است و با افزایش اثر اندازه، نیروی بحرانی نیز افزایش پیدا می‌کند. همچنین میزان نیروی بحرانی کمانش نانو صفحات مختلف (کیرشهف، میندلین، برشی مرتبه سوم، برشی مرتبه n ام) تحت اثر نیروی تکمحوره صفحه‌ای در جهت X، با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش می‌یابد. همچنین میزان نیروی بحرانی برای نانو صفحه میندلین بیشترین مقدار و برای نانو صفحه برشی مرتبه سوم کمترین مقدار است. همچنین میزان نیروی بحرانی کمانش تکمحوره به مرتب بیشتر از دومحوره می‌باشد.

## مراجع

- [1] Jomehzadeh, E, Saidi, A.R., "A study on large amplitude Vibration of multilayered Graphene sheets", Composite Structures 93, pp. 1015–1020, 2011.
- [2] Geim, A.K., "Graphene: Status and Prospects", Science 324, Vol. 324 no. 5934, pp. 1530-1534, 2009.
- [3] Bunch, J.S., van der Zande, A.M, Verbridge, S.S, Frank, I.W, Tanenbaum, D.M., Parpia, J.M., Craighead, H.G, McEuen, P.L, "Electromechanical Resonators from Graphene Sheets", Science 315,PP. 490–493, 2007.
- [4] Frank, W., Tanenbaum, D.M., van der Zande, A.M., McEuen, P.L., "Mechanical properties of suspended graphene sheets", Journal of Vacuum Science and Technology, B 25, PP. 2558–2561, 2007.
- [5] Behfar, K., Naghdabadi, R., "Nanoscale Vibrational Analysis of a multi-layered Graphene sheet embedded in an Elastic medium", Compos. Sci. Technol. 65, pp. 1159– 1164, 2005.
- [6] Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., Tong, P., " Couple stress Based Strain gradient theory for elasticity". Int.J.Solids Struct.39, pp. 2731–2743,( 2002).
- [7] Toupin, R.A., "Elastic materials with couple stresses". Arch.Rational Mech.Anal.11, pp. 385–414,( 1962).
- [8] Mindlin, R.D., Tiersten, H.F., " Effects of couple-stresses in linear elasticity" Arch. Rational Mech. Anal.11, pp. 415–448, (1962).
- [9] Koiter, W.T., "Couple stresses in the theory of elasticity",I and II.Proc .K. Ned. Akad . Wet.(B) 67,pp. 17–44,( 1964).
- [01] Mindlin, R.D., "Micro-structure in linear elasticity".Arch.RationalMech.Anal . 16, pp. 51–78, (1964).
- [00] Tsiatas.G.C , "A new kirchhoff model based on a modified couple stress theory",International Journal of solids and structures, No.46, pp2757-2764,(2009)
- [01] Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X , "A size-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory",European Journal of mechanics A/Solids, No.30,pp 517-524, (2011)
- [02] Farajpour.A,Shahidi.A.R,Mohammadi.M,Mahzoon.M,"Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics,Composite Structures, No.94, pp 1605-1615,(2012).
- [01] Tai.T ,HoChoi.D , "size-dependent functionally graded kirchhoff and mindlin plate theory based on a modified couple stress theory",Composite Structures, No.95,pp142-153,(2013).
- [01] B.Akgoz, Omer Civalek"Free vibration analysis for single –layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory"materials and design No.42,pp 164-171, ( 2012)
- [06] Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X , "A size-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory",European Journal of mechanics A/Solids, No.30,pp 517-524, (2011)
- [07] Tai.T ,HoChoi.D , "size-dependent functionally graded kirchhoff and mindlin plate theory based on a modified couple stress theory",Composite Structures, No.95,pp142-153,(2013).

[08] B.Akgoz, Omer Civalek"Free vibration analysis for single -layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory"materials and design No.42,pp 164-171,( 2012)

[09] Roque.C.M.C ,Ferreira.A.J.M ,Reddy.J.N,"Analysis of mindlin micro plates with a modified couple stress theory and meshlessmethod",Applied Mathematical Modeling,No.37,pp 4626-4633,(2013).