ISME2020-2074

**تحلیل کمانش نانو صفحه‌ گرافنی مرتبه n ام بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده**

**مجید اسکندری شهرکی 1، محمود شریعتی2، محسن حیدری بنی3 ، محمدرضا زمانی4، رضا آذرافزا 5، جعفر اسکندری جم6**

1 دانشجوی دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، mjdeskandari@gmail.com

2استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، mshariati44@gmail.com

3 دانشجوی دکتری، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، mohsenheydari1371@gmail.com

4 استادیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران ، a\_mrzamani@mut.ac.ir

5استادیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران azarkntu@yahoo.com

6 استاد، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران ، jafar.eskandarijam@gmail.com

**چکیده**

در اين مقاله سعي بر آن است كه با استفاده از تئوري كوپل تنش اصلاح شده، مشخصه هاي كمانش نانو صفحه مرتبه n ام مستطیلی با شرایط تکیه گاهی ساده مطالعه شود. براي در نظر گرفتن آثار مقياس كوچك از تئوري كوپل تنش اصلاح شده كه تنها داراي يك پارامتر مقياس طول ميباشد و توسط يانگ در سال 2002 بيان گرديد استفاده شده است. در تئوري كوپل تنش اصلاح شده، چگالي انر‍ژي كرنشي تابعي از مولفه هاي تانسور كرنش،تانسور انحناء، تانسور تنش و قسمت متقارن تانسور تنش كوپل مي باشد. بعد از به دست آوردن انرژي كرنشي،كار خارجي و معادله كمانش و قرار دادن آنها در معادله اصل هميلتون، معادلات اصلي و كمكي نانو صفحه به دست آورده ميشود. سپس با جايگذاري شرايط مرزي و نيرويي در معادلات حاكم به بررسي كمانش نانو صفحه مرتبه n ام مستطيلي به ضخامت h با تكيه گاه ساده در اطراف پرداخته می شود. روش حل نيز روش ناوير مي باشد. ملاحظه شد ميزان نيروي بحراني نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر نيروي دو محوره صفحه اي با افزايش نسبت پارامتر مقياس طول به ضخامت نانو صفحه افزايش و با افزايش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش ميابد. همچنين ميزان نيروي بحراني براي مود اول کمترین مقدار است و براي مودهاي بعدي به ترتيب بیشتر ميشود.

**واژه های کلیدی**

تئوري تنش كوپل اصلاح شده ، نانو صفحه مرتبه n ام ، کمانش، روش حل ناویر

**مقدمه**

برای مطالعه مواد در مقیاس کوچک مطمئن­ترین روش آزمایش در مقیاس اتمی و مولکولی می­باشد. در این روش نانوساختار در ابعاد واقعی مورد مطالعه قرار می­گیرد. در این روش برای تعیین خواص مکانیکی نانوساختارها از میکروسکوپ نیروی اتمی برای اعمال بارهای مکانیکی مختلف بر روی نانوصفحات و اندازه­گیری پاسخ استفاده می­کنند. مشکلات اساسی در این روش دشواری کنترل بر شرایط آزمایش در این مقیاس و نیز هزینه های اقتصادی سنگین و نیز زمان­بر بودن روش می­باشد. از این رو از این روش تنها برای اعتبارسنجی روش­های ساده و کم هزینه دیگر استفاده می­شود. شبیه­سازی اتمی راه حل دیگری در مطالعه ساختارها در مقیاس کوچک می­باشد. در این روش رفتار اتم­ها و مولکول­ها با در نظر گرفتن اثر بین مولکولی و بین اتمی بر حرکت آنها که در نهایت تغییر فرم کل جسم را شامل میشود، مورد بررسی قرار می­گیرد. استفاده از این روش هنگامی که مسئله دارای تغییر شکل بزرگ می­باشد و یا مقیاس بزرگ­تر از یک یا چند اتم باشد، هزینه محاسباتی بسیار زیادی داشته و مقرون به صرفه نیست. بنابراین، از این روش تنها برای مسائل با تغییر شکل کوچک استفاده می­شود.

با توجه به محدودیت­های مطرح­شده در روش­های فوق برای مطالعه نانوساختارها، محققین به دنبال راهکارهای ساده تر در بررسی نانوساختارها بوده­اند. مدل­سازی ­ساختارهای در مقیاس کوچک، با استفاده از مکانیک محیط پیوسته راه حل دیگری در مطالعه این مواد می­باشد. تئوري­هاي محيط پیوسته­ی وابسته به اندازه متنوعي وجود دارند که آثار اندازه را در نظر گرفته­اند از جمله: تئوری میکرومورفیک، تئوری میکروساختار، تئوری میکروپولار، تئوری کوسرات، تئوری غیرموضعی، تئوری کوپل تنش اصلاح شده که اینها گسترش یافته­ی تئوری­های میدانی کلاسیک هستند که در آنها آثار اندازه گنجانده شده است.

**تئوری کوپل تنش اصلاح شده:**

یانگ وهمکارانش]1[ در سال 2002 با اصلاح کردن تئوری کوپل تنش که توسط توپین]2[،میندلین و تیرستن]3 [ارائه شد،یک مدل کوپل تنش اصلاح شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول ماده برای تصویر کردن اثر اندازه میباشد را پیشنهاد کردند،در حالیکه تئوری کوپل تنش کلاسیک دارای دو پارامتر مقیاس طول ماده است.در تئوری کوپل تنش اصلاح شده،چگالی انرژی کرنشی در مختصات قائم سه بعدی برای جسمی که محدود به حجم V و سطح میباشد به صورت زیر بیان میشود]4 [:

|  |  |
| --- | --- |
|   | (1) |

که در آن:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |
|  | (3) |

 و به ترتیب قسمت متقارن تانسور انحنا**[[1]](#footnote-1)**و تانسور کرنش**[[2]](#footnote-2)**هستند. به ترتیب بردار جابه جایی[[3]](#footnote-3) و بردار چرخشی[[4]](#footnote-4) تعریف شده اند.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

 و به ترتیب تانسور تنش و قسمت انحرافی تانسور کوپل تنش**[[5]](#footnote-5)** هستند که به صورت زیر تعریف میباشند:

|  |  |
| --- | --- |
|   | (5) |
|   | (6) |

که در آن و ثوابت لامه، دلتای کرونکر و پارامتر مقیاس طول ماده میباشد.از معادله (3) و (6) میتوان دریافت که و متقارن هستند.

**مدل صفحه مرتبه n ام**

معادلات جابه جایی برای صفحه مرتبه n ام به صورت زیر تعریف میشوند:

|  |  |
| --- | --- |
|  -  | (7) |
| -  | (8) |
| n=3, 5, 7, 9, … |
|  | (9) |

که در آنو چرخش بردار نرمال حول محور x و y میباشند و میزان جابه جایی نقطه میانی صفحه درراستای محور های z می باشد.



شكل 1 :شماتيكي از صفحه و موقعيت محورها

تغييرات انر‍ژي كرنشي به صورت زير بيان ميشود:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

**نيروي كمانش**

برای صفحه مستطیلی به طول a و عرض b و ضخامت h با نیروهای محورهایکه در آن:

: نیروی محوری در راستای x و : نیروی محوری در راستای y و : نیروی برشی صفحهxy و q(x,y) نیروی خارج صفحه ای می باشد. معادله نیروی کمانش به صورت زیر خواهد بود ]5 [:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

کار مجازی نیروی خارجی نیز به صورت زیر می باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

همچنین با استفاده از اصل همیلتن داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

که در آن U انرژی کرنشی و W کارنیروهای خارجی می باشد.

**به دست آوردن معادلات صفحه مرتبه n ام**

با در نظر گرفتن مقادير زير:

|  |  |
| --- | --- |
|  ,  | (14) |
|  | (15) |
|  | (16) |
|  | (17) |
|  | (18) |
|  | (19) |
|  | (20) |
|  | (21) |
|  | (22) |
|  | (23) |
|  | (24) |
|  | (25) |
|  | (26) |

و همچنین:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (27) |
|  | (28) |
|  | (29) |
|  | (30) |
|  | (31) |
|  | (32) |
|  | (33) |
|  | (34) |
|  | (35) |
|  | (36) |

و استفاده از روش حل ناویر طبق شرح ذیل ]7و6[:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (37) |
|  | (38) |
|  | (39) |
|  | (40) |
|  | (41) |

که در آن:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (42) |

خواهیم داشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (43) |
|  | (44) |
|  | (45) |
|  | (46) |
|  | (47) |
|  | (48) |
|  | (49) |

 و سرانجام ماتريس كلي معادلات صفحه مرتبه n ام به شكل زير حاصل خواهند شد:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (50) |

يك صفحه گرافن تك لايه داراي خصوصيات زير است] 8[:

**نتايج و بحث**

برنامه محاسباتي در نرم افزار متلب نوشته شده و نتايج با استفاده از اين برنامه به دست آمده اند. شكل (2) نشان مي­دهد ميزان نيروي بحراني نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر نيروي دو محوره صفحه اي با افزايش نسبت پارامتر مقياس طول به ضخامت نانو صفحه افزايش و با افزايش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش مي یابد. جدول (1) نشان می­دهد میزان نیروی بحرانی بدون بعد نانو صفحه مرتبه n ام تحت اثر نیروی تک محوره با افزايش نسبت پارامتر مقياس طول به ضخامت نانو صفحه افزايش و با افزايش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش ميابد. شكل(3) نشان مي­دهد ميزان نيروي بحراني نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر نيروي دو محوره صفحه اي براي مودهاي متفاوت، با افزايش نسبت پارامتر مقياس طول به ضخامت نانو صفحه افزايش مي یابد. همچنين ميزان نيروي بحراني براي مود اول کمترین مقدار و براي مودهاي بعدي به ترتيب بیشتر مي­شود.

نتایج حاصل از پژوهش حاضر با نتایج موجود در مراجع مختلف از جمله مرجع ]9[ مقایسه گردید. که روند کلی نتایج بالا با روند نتایج جداول مرجع مذکور تطابق خوبی داشتند.



شکل 2: ميزان نيروي بحراني كمانش نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر نيروي دو محوره براي نسبت طول به ضخامت متفاوت (n=5, a/b=1)

جدول 1: ميزان نيروي بحراني كمانش بدون بعد نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر نيروي تک محوره براي نسبت طول به ضخامت متفاوت (n=5, a/b=1)

|  |  |
| --- | --- |
| a/h | l/h |
| 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
| 5 | 1.00 | 2.18 | 5.69 | 11.53 | 19.71 |
| 10 | 1.00 | 2.04 | 5.18 | 10.40 | 17.70 |
| 20 | 1.00 | 2.01 | 5.04 | 10.10 | 17.17 |
| 30 | 1.00 | 2.00 | 5.02 | 10.04 | 17.07 |



شکل 3: ميزان نيروي بحراني كمانش مود های مختلف تحت اثر نيروي دو محوره براي نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت (a/b=1)

**نتيجه گيري**

در اين مقاله به بررسي كمانش نانو صفحه مرتبه n ام با استفاده از تئوري كوپل تنش اصلاح شده پرداخته شد.همانگونه كه ملاحظه شد ميزان نيروي بحراني نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر نيروي دو محوره صفحه اي با افزايش نسبت پارامتر مقياس طول به ضخامت نانو صفحه افزايش ميابد. همچنين ميزان نيروي بحراني براي مود اول کمترین مقدار است و براي مودهاي بعدي به ترتيب بیشتر ميشود. همچنین میزان نیروی بحرانی بدون بعد با افزايش نسبت پارامتر مقياس طول به ضخامت نانو صفحه افزايش و با افزايش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش ميابد.

**مراجع**

[1] Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., Tong, P.," Couple stress Based Strain gradient theory for elasticity".Int.J.Solids Struct.39, pp. 2731–2743,( 2002).

[2] Toupin, R.A.,"Elastic materials with couple stresses".Arch.Rational Mech.Anal.11, pp. 385–414, (1962).

[3] Mindlin, R.D., Tiersten, H.F.," Effects of couple-stresses in linear elasticity" Arch. Rational Mech. Anal.11, pp. 415–448, (1962).

 [4] Tsiatas.G.C ,"A new kirchhoff model based on a modified couple stress theory",International Journal of solids and structures,No.46, pp2757-2764,(2009)

[5] Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X ,"Asize-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory",European Journal of mechanics A/Solids, No.30,pp 517-524, (2011)

 [6] Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X ,"Asize-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory",European Journal of mechanics A/Solids, No.30,pp 517-524, (2011)

[7] Tai.T ,HoChoi.D ,"size-dependent functionally graded kirchhoff and mindlin plate theory based on a modified couple stress theory",Composite Structures,No.95,pp142-153,(2013).

[8] B.Akgoz, Omer Civalek”Free vibration analysis for single –layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory”materials and design No.42,pp 164-171,( 2012)

[9] J. Lou, L. He, and J. Du, "A unified higher order plate theory for functionally graded microplates based on the modified couple stress theory," Composite Structures, vol. 133, pp. 1036-1047, 2015.

1. Symmetric part of the curvaturetensor [↑](#footnote-ref-1)
2. Strain tensor [↑](#footnote-ref-2)
3. Displacement vector [↑](#footnote-ref-3)
4. Rotation vector [↑](#footnote-ref-4)
5. Deviatoric part of the couple stress tensor [↑](#footnote-ref-5)