

تحلیل کمانش و ارتعاشات نانو صفحه میندلین گرافنی مستطیلی با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده

مجید اسکندری شهرکی^۱، محمود شریعتی^{۲*}، محمدرضا زمانی^۳، رضا آذرافزا^۴، محسن حیدری بنی^۵، جعفر اسکندری جم^۶

^۱ دانشجوی دکتری گروه مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
^۲ استاد گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
^۳ استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران
^۴ استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران
^۵ دانشجوی دکتری گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران
^۶ استاد گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران
*نویسنده مسئول: mshariati44@gmail.com

خلاصه

در این مقاله با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده، مشخصه های کمانش و ارتعاشات نانو صفحه میندلین مستطیلی از جنس گرافن مطالعه می شود. برای در نظر گرفتن آثار مقیاس کوچک از تئوری کوپل تنش اصلاح شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول میباشد استفاده شده است. بعد از به دست آوردن انرژی کرنشی، جنبشی، کار خارجی و معادله کمانش و قرار دادن آنها در معادله اصل همیلتن، معادلات اصلی و کمکی نانو صفحه به دست آورده می شود. سپس با جایگذاری شرایط مرزی و نیرویی در معادلات حاکم به بررسی کمانش و ارتعاشات نانو صفحه گرافنی مستطیلی به ضخامت h با تکیه گاه ساده در اطراف میپردازیم. روش حل نیز روش ناویر می باشد.

کلمات کلیدی: تئوری تنش کوپل اصلاح شده، صفحه میندلین، نانو صفحه مستطیلی، روش حل ناویر، کمانش، ارتعاشات

* Corresponding author: Mahmoud Shariati, Professor of Mechanical Engineering Of Ferdowsi University Of Mashhad
Email: mshariati44@gmail.com

۱. مقدمه

برای مطالعه مواد در مقیاس کوچک مطمئن ترین روش آزمایش در مقیاس اتمی و مولکولی می باشد. در این روش نانوساختار در ابعاد واقعی مورد مطالعه قرار می گیرد. در این روش برای تعیین خواص مکانیکی نانوساختارها از میکروسکوپ نیروی اتمی (AFM) برای اعمال بارهای مکانیکی مختلف بر روی نانوصفحات و اندازه گیری پاسخ استفاده می کنند. مشکلات اساسی در این روش دشواری کنترل بر شرایط آزمایش در این مقیاس و نیز هزینه های اقتصادی سنگین و نیز زمان بر بودن روش می باشد. از این رو از این روش تنها برای اعتبارسنجی روش های ساده و کم هزینه دیگر استفاده می شود.

شبیه سازی اتمی راه حل دیگری در مطالعه ساختارها در مقیاس کوچک می باشد. در این روش رفتار اتم ها و مولکول ها با در نظر گرفتن اثر بین مولکولی و بین اتمی بر حرکت آنها که در نهایت تغییر فرم کل جسم را شامل می شود، مورد بررسی قرار می گیرد. استفاده از این روش هنگامی که مسئله دارای تغییر شکل بزرگ می باشد و یا مقیاس بزرگ تر از یک یا چند اتم باشد، هزینه محاسباتی بسیار زیادی داشته و مقرون به صرفه نیست. بنابراین، از این روش تنها برای مسائل با تغییر شکل کوچک استفاده می شود.

با توجه به محدودیت های مطرح شده در روش های فوق برای مطالعه نانوساختارها، محققین به دنبال راهکارهای ساده تر در بررسی نانوساختارها بوده اند. مدل سازی ساختارهای در مقیاس کوچک، با استفاده از مکانیک محیط پیوسته راه حل دیگری در مطالعه این مواد می باشد. تئوری های محیط پیوسته وابسته به اندازه متنوعی وجود دارند که آثار اندازه را در نظر گرفته اند از جمله: تئوری میکرومورفیک، تئوری میکروساختار، تئوری میکروپولار، تئوری کوسرات، تئوری غیرموضعی، تئوری کوپل تنش اصلاح شده، تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی که اینها گسترش یافته تئوری های میدانی کلاسیک هستند که در آنها آثار اندازه گنجانده شده است.

۲. تئوری کوپل تنش اصلاح شده

یانگ و همکارانش [۱] در سال ۲۰۰۲ با اصلاح کردن تئوری کوپل تنش که توسط توپین [۲]، میندلین و تیرستن [۳]، کوپتر [۴] و میندلین [۵] در سال ۱۹۶۴ ارائه شد، یک مدل کوپل تنش اصلاح شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول ماده^۱ برای تصویر کردن اثر اندازه میباشد را پیشنهاد کردند. در حالیکه تئوری کوپل تنش کلاسیک دارای دو پارامتر مقیاس طول ماده است. در تئوری کوپل تنش اصلاح شده، چگالی انرژی کرنشی در مختصات قائم سه بعدی برای جسمی که محدود به حجم V و سطح Ω میباشد به صورت زیر بیان میشود [۶]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

که در آن:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (3)$$

¹Material length scale parameter

χ_{ij} و ε_{ij} به ترتیب قسمت متقارن تانسور انحنا^۱ و تانسور کرنش^۲ هستند. u_i و θ_i به ترتیب بردار جابه جایی^۳ و بردار چرخشی^۴ تعریف شده اند.

$$\theta = \frac{1}{2} \text{Curl } \mathbf{u} \quad (۴)$$

σ_{ij} و m_{ij} به ترتیب تانسور تنش و قسمت انحرافی تانسور کوپل تنش^۵ هستند که به صورت زیر تعریف میباشند:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (۵)$$

$$m_{i,j} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \quad (۶)$$

که در آن λ و μ ثوابت لامه، δ_{ij} دلتای کرونکر و l پارامتر مقیاس طول ماده میباشد. از معادله (۳) و (۶) میتوان دریافت که χ_{ij} و m_{ij} متقارن هستند.

۳. مدل صفحه میندلین

معادلات جابه جایی برای صفحه میندلین به صورت زیر تعریف میشوند:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= z \varphi_x(x, y, t) \\ u_2(x, y, z, t) &= z \varphi_y(x, y, t) \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن φ_x و φ_y چرخش بردار نرمال حول محور X و Y میباشند و w میزان جابه جایی نقطه میانی صفحه در راستای محور های Z می باشد. قسمت متقارن تانسور انحنا^۱ و تانسور کرنش و تنش و بردار چرخشی برای مدل صفحه میندلین به صورت زیر میباشد:

$$\varepsilon_{xx} = z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \quad (۸)$$

$$\varepsilon_{yy} = z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \quad (۹)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (۱۰)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \quad (۱۱)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right) \quad (۱۲)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right) \quad (۱۳)$$

^۱Symmetric part of the curvature tensor

^۲Strain tensor

^۳Displacement vector

^۴Rotation vector

^۵Deviatoric part of the couple stress tensor

^۶Symmetric part of the curvature tensor

$$\theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_y \right) \quad (14)$$

$$\theta_y = \frac{1}{2} \left(\varphi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (15)$$

$$\theta_z = \frac{1}{2} z \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \quad (16)$$

$$x_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \quad (17)$$

$$x_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (18)$$

$$x_{zz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \quad (19)$$

$$x_{xy} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \quad (20)$$

$$x_{xz} = \frac{1}{4} z \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y \partial x} \right) \quad (21)$$

$$x_{yz} = \frac{1}{4} z \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \right) \quad (22)$$

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \lambda z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \quad (23)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \quad (24)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \left(z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \quad (25)$$

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} = \mu z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \quad (26)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right) \quad (27)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right) \quad (28)$$

تغییرات انرژی کرنشی به صورت زیر بیان میشود:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_V & \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \\ & 2\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + 2\sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz} + m_{xx} \delta x_{xx} + m_{yy} \delta x_{yy} + m_{zz} \delta x_{zz} \\ & + 2m_{xy} \delta x_{xy} + 2m_{xz} \delta x_{xz} + 2m_{yz} \delta x_{yz} dV \end{aligned} \quad (29)$$

می توان جهت ساده نویسی ضرایب متغیرها را از F_1 تا F_{15} مطابق معادله (۳۰) نامگذاری کرد و آنها را جداگانه به دست آورد.

$$\delta U = \int_V (F_1 \delta w_{,xx} + F_2 \delta w_{,yy} + F_3 \delta w_{,xy} + F_4 \delta w_{,x} + F_5 \delta w_{,y} + F_6 \delta \varphi_{x,yy} + F_7 \delta \varphi_{y,xx} + F_8 \delta \varphi_{y,xy} + F_9 \delta \varphi_{x,yx} + F_{10} \delta \varphi_{x,x} + F_{11} \delta \varphi_{y,y} + F_{12} \delta \varphi_{x,y} + F_{13} \delta \varphi_{y,x} + F_{14} \delta \varphi_x + F_{15} \delta \varphi_y) dV \quad (30)$$

که در آن

$$F_1 = -\frac{1}{4} \mu l^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \quad (31)$$

$$F_2 = \frac{1}{4} \mu l^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \quad (32)$$

$$F_3 = \mu l^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \quad (33)$$

$$F_4 = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right) \quad (34)$$

$$F_5 = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right) \quad (35)$$

$$F_6 = F_8 = \frac{1}{4} \mu l^2 z^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \right) \quad (36)$$

$$F_7 = F_9 = \frac{1}{4} \mu l^2 z^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} \right) \quad (37)$$

$$F_{10} = (\lambda + 2\mu) z^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \lambda z^2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{1}{4} \mu l^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \quad (38)$$

$$F_{11} = \lambda z^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) z^2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{1}{4} \mu l^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \quad (39)$$

$$F_{12} = \mu z^2 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + \mu l^2 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (40)$$

$$F_{13} = \mu z^2 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + \mu l^2 \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \quad (41)$$

$$F_{14} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right) \quad (42)$$

$$F_{15} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right) \quad (43)$$

۴. نیروی کماتش

برای صفحه مستطیلی به طول a و عرض b و ضخامت h با نیروهای محورهایی P_x, P_y, P_{xy} که در آن:

P_x : نیروی محوری در راستای X و P_y : نیروی محوری در راستای Y و P_{xy} : نیروی برشی صفحه XY و $q(x,y)$ نیروی خارج صفحه ای می باشد. معادله نیروی کمانش به صورت زیر خواهد بود [۷ و ۸]:

$$P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, y) \quad (44)$$

۵. معادله کار مجازی

کار مجازی که توسط نیروی خارجی انجام می گیرد شامل سه بخش است [۹]:

۱- کار مجازی که توسط نیروهای حجمی (force body) انجام می گیرد که روی $V = \Omega * (-h/2, h/2)$ انجام می گیرد.

۲- کار مجازی که توسط نیروی برشی صفحه ای (surface tractions) در سطوح بالایی و پایینی (Ω) انجام می گیرد.

۳- کار مجازی که توسط نیروی برشی صفحه ای (surface traction) و بر روی سطوح جانبی $S = \Gamma * (-h/2, h/2)$ انجام می گیرد. که Ω صفحه میانی ورق و Γ محیط میانی ورق می باشد.

اگر (f_x, f_y, f_z) را نیروی حجمی (force body) و (c_x, c_y, c_z) را ممان حجمی (body couple) و (q_x, q_y, q_z) نیروهایی باشند که بروی سطح Ω عمل می کنند و (t_x, t_y, t_z) تنش برشی کوشی (Cauchy tractions) و (S_x, S_y, S_z) ممان سطح (Surface couple) باشند. در این صورت تغییرات (Variation) کار مجازی به صورت زیر می باشد:

$$\delta w = - \left[\int_{\Omega} (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w + q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w + c_x \delta \theta_x + c_y \delta \theta_y + c_z \delta \theta_z) dx dy + \int_{\Gamma} (t_x \delta u + t_y \delta v + t_z \delta w + s_x \delta \theta_x + s_y \delta \theta_y + s_z \delta \theta_z) d\Gamma \right] \quad (45)$$

باتوجه به اینکه در این تحقیق فقط نیروی خارجی q_z اعمال شده است کار مجازی به صورت:

$$\delta w = \int_0^a \int_0^b q(x, y) \delta w(x, y) dx dy \quad (46)$$

می باشد. تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر بیان میشود:

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_3 \delta \dot{u}_3) dA dz \\ &= \int_A \left[\rho h \dot{w} \delta \dot{w} + \frac{\rho h^3}{12} (\dot{\phi}_x \delta \dot{\phi}_x + \dot{\phi}_y \delta \dot{\phi}_y) \right] dA \end{aligned} \quad (47)$$

که ρ چگالی می باشد. همچنین با استفاده از اصل همیلتن میتوان نوشت [۱۰]:

$$\int_0^T (\delta T - (\delta U - \delta w)) dt = 0 \quad (48)$$

که در آن T انرژی جنبشی، U انرژی کرنشی و W کارنیروهایی خارجی می باشد.

با به کارگیری اصل همپتین (معادله 48) و معادلات (44) تا (47) معادلات اصلی مطابق زیر به دست می آیند:

$$\left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - \frac{\partial F_4}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F_5}{\partial y} \right) dz \right] + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, y) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (49)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial^2 F_6}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_9}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F_{12}}{\partial y} - \frac{\partial F_{10}}{\partial x} + F_{14} \right) dz = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (50)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial^2 F_7}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_8}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F_{11}}{\partial y} + F_{15} \right) dz = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (51)$$

6. معادلات صفحه میندلین (شامل کمانش و ارتعاشات)

با در نظر گرفتن مقادیر زیر:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{4} \mu l^2 h & C_2 &= \mu h k_s & C_3 &= \frac{1}{4} \mu l^2 I_2 & C_4 &= -\mu I_2 - \mu l^2 h \\ C_5 &= -\lambda I_2 - 2\mu l^2 - \frac{1}{4} \mu l^2 h & C_6 &= -\mu I_2 - \lambda I_2 + \frac{3}{4} \mu l^2 h & & & & \\ C_7 &= \rho h & C_8 &= \frac{\rho h^3}{12} & & & & \\ k_s &= \frac{5}{6} = 0.8 & & & & & & \end{aligned} \quad (52)$$

که در آن:

$$I_i = \int_{-h/2}^{h/2} Z^i dz \quad (53)$$

معادلات کلی صفحه میندلین به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} & 2C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_1 \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x^3} - C_1 \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y^3} \\ & - C_1 \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial y^2} - C_1 \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial x^2 \partial y} - C_2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - C_2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, y) + \\ & C_7 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (54)$$

$$C_3 \left(\frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + C_4 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + C_5 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + C_6 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + C_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \quad (55)$$

$$C_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C_2 \frac{\partial w}{\partial x} + C_2 \varphi_x = C_8 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$C_3 \left(\frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial x \partial y^3} \right) + C_6 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + C_4 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + C_5 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + C_1 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + \quad (56)$$

$$C_1 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + C_2 \frac{\partial w}{\partial y} + C_2 \varphi_x = C_8 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

۷. روش حل ناویر

روش حل ناویر برای صفحات مستطیلی با شرایط مرزی تکیه گاه ساده در همه لبه ها قابل استفاده است. به خاطر اینکه شرایط مرزی خود به خود در این روش ارضا می شوند توابع مجهول سطح میانی صفحه به صورت سری های دوگانه مثلثاتی به صورت زیر بیان می شوند [۱۱ و ۱۲]:

$$W(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t} \quad (57)$$

$$\varphi_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t} \quad (58)$$

$$\varphi_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t} \quad (59)$$

نیرو نیز از رابطه زیر قابل محاسبه می باشد:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t} \quad (60)$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y dx dy \quad (61)$$

$$Q_{mn} = \begin{cases} q_0 & \text{برای نیروی سینوسی} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{برای نیروی یکنواخت} \\ \frac{4Q_0}{ab} & \text{برای نیروی نقطه در مرکز صفحه} \end{cases} \quad (62)$$

که در آن:

$$\alpha = \frac{\pi m}{a}, \quad \beta = \frac{\pi n}{b}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (63)$$

۸. ماتریس معادلات صفحه میندلین

پس از حل به کمک روش ناویر و نامگذاری ضرایب متغیرهای معادلات به صورت زیر خواهیم داشت:

$$U_1 = 2C_1 \alpha^2 \beta^2 + C_1 \alpha^4 + C_1 \beta^4 + C_2 \alpha^2 + C_2 \beta^2 - P_x \alpha^2 - P_y \beta^2 \quad (66)$$

$$U_2 = U_4 = -C_1 \alpha^3 - C_1 \alpha \beta^2 + C_2 \alpha \quad (67)$$

$$U_3 = U_7 = -C_1 \beta^3 - C_1 \alpha^2 \beta + C_2 \beta \quad (68)$$

$$U_5 = -C_3 \beta^4 - C_3 \alpha^2 \beta^2 - C_4 \beta^2 - C_5 \alpha^2 + C_2 \quad (69)$$

$$U_6 = C_3 \alpha \beta^3 + C_3 \alpha^3 \beta - C_6 \alpha \beta \quad (70)$$

$$U_8 = -C_3 \alpha^3 \beta - C_3 \alpha \beta^3 - C_6 \alpha \beta \quad (71)$$

$$U_9 = C_3 \alpha^4 + C_3 \alpha^2 \beta^2 - C_4 \alpha^2 - C_5 \beta^2 + C_2 \quad (72)$$

$$K_1 = -C_7 \quad (73)$$

$$K_2 = K_3 = K_4 = K_6 = K_7 = K_8 = 0 \quad (74)$$

$$K_5 = K_9 = -C_8 \quad (75)$$

ماتریس کلی معادلات صفحه میندلین به همراه معادلات کمکی به شکل زیر حاصل خواهند شد:

$$\left(\begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ U_4 & U_5 & U_6 \\ U_7 & U_8 & U_9 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ K_4 & K_5 & K_6 \\ K_7 & K_8 & K_9 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

جنس صفحه را مواد مختلفی از جمله اپوکسی، گرافن، مس و ... در نظر می گیرند. در این مقاله جنس صفحه را گرافن در نظر میگیریم. یک صفحه گرافن تک لایه دارای خصوصیات زیر است [۱۳]:

$$E = 1.06 \text{TPa}, \nu = 0.25, h = 0.34 \text{nm}, \rho = 2250 \text{kg/m}^3$$

همچنین رابطه بین ν و μ و E را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (77)$$

که در آن E مدول یانگ و λ و μ ضرایب لامه هستند [۱۴]. همچنین مقدار نیرو را $q = 1 \text{N/m}^2$ در نظر میگیریم.

۹. نتایج و بحث

برنامه محاسباتی در نرم افزار Matlab نوشته شده و نتایج با استفاده از این برنامه به دست آمده اند. کلیه شرایط مرزی نیز به صورت تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده اند.

- جدول (۱) نشان میدهد میزان نیروی بحرانی کماتش بدون بعد نانو صفحات مختلف تحت اثر نیروی دو محوره صفحه ای در جهت X و Y با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه رفتار متفاوتی به شرح ذیل دارد:
- نیروی بحرانی بدون بعد با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه میندلین، افزایش می یابد.
 - نیروی بحرانی بدون بعد با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه برشی مرتبه سوم و پنجم، اندکی کاهش می یابد.
 - نیروی بحرانی بدون بعد با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کیرشهف، ثابت می ماند.

شکل (۱) به مقایسه میزان نیروی بحرانی نانوصفحات مختلف تحت اثر نیروی تک محوره برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت می پردازد. همانطور که میبینیم میزان نیروی بحرانی نانوصفحه مرتبه سوم کمترین مقدار و نانو صفحه میندلین بیشترین مقدار است.

جدول (۲) نشان میدهد میزان نیروی بحرانی نانوصفحه میندلین تحت اثر نیروی دو محوره صفحه ای در جهت X و Y با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانو صفحه افزایش و با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش میابد.

شکل (۲) نشان میدهد میزان نیروی بحرانی بدون بعد نانوصفحه میندلین تحت اثر نیروی تک محوره صفحه ای در جهت X ، با افزایش نسبت طول به ضخامت صفحه افزایش میابد. همچنین هنگامی که اثر پارامتر اندازه در نظر گرفته نشود (تئوری کلاسیک) مقدار نیروی بحرانی بدون بعد کمترین مقدار است و با افزایش اثر اندازه نیروی بحرانی بدون بعد نیز افزایش پیدا میکند.

شکل (۳) نشان میدهد میزان نیروی بحرانی بدون بعد نانوصفحه میندلین در مود های مختلف تحت اثر نیروی دو محوره صفحه ای در جهت X, Y ، با افزایش نسبت پارامتر طول به ضخامت صفحه افزایش میابد. همچنین میزان نیروی بحرانی بدون بعد نانوصفحه برای مود اول بیشترین مقدار و برای مودهای بعدی به ترتیب کم میشود.

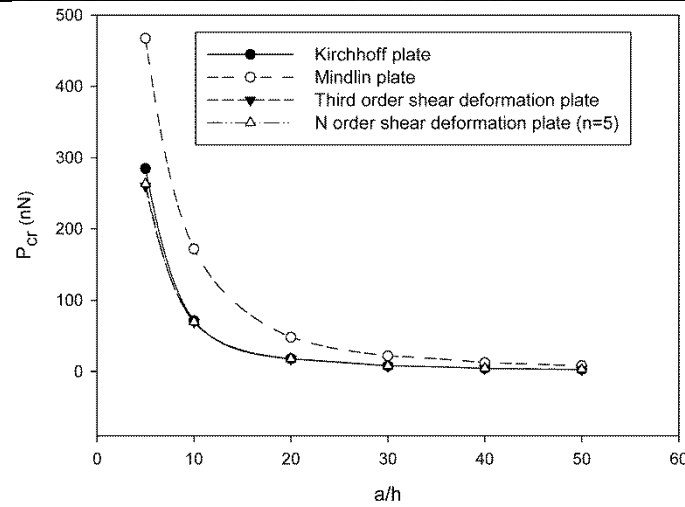
شکل های (۴) تا (۷) نشان میدهند فرکانسهای مود های مختلف $(\omega_{11} - \omega_{12} - \omega_{21} - \omega_{22})$ نانو صفحه میندلین با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه کاهش می یابد. همچنین هنگامی که اثر پارامتر اندازه در نظر گرفته نشود (تئوری کلاسیک) میزان فرکانس، کمترین میزان است و با افزایش اثر اندازه، فرکانس نیز افزایش پیدا میکند. همچنین میزان فرکانس برای مود اول کمترین مقدار است و برای مودهای بعد افزایش پیدا می کند.

جدول (۳) نشان میدهد با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان فرکانس ارتعاشی کم می شود.

جدول (۴) فرکانس مود های مختلف $(\omega_{11} - \omega_{12} - \omega_{21} - \omega_{22})$ را برای نانو صفحات مختلف نشان میدهد. طبق جدول میزان فرکانس در حالتیکه پارامتر مقیاس طول در نظر گرفته نشود برای نانو صفحه کیرشلف بیشترین مقدار است ولی در حالتیکه پارامتر مقیاس طول در نظر گرفته شود نانو صفحه میندلین بیشترین فرکانس ارتعاشی را خواهد داشت.

جدول ۱: مقایسه میزان نیروی بحرانی کمانش بدون بعد نانو صفحات مختلف تحت اثر نیروی دو محوره در جهت X و Y برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت ($P_y/P_x=1$ و $l/h=1$ و $a/b=1$)

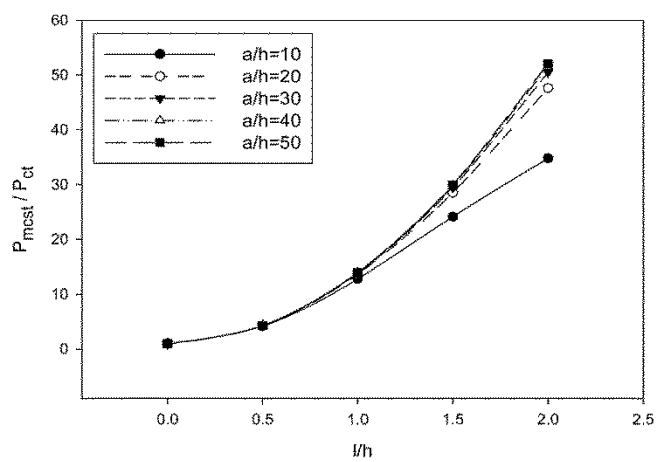
a/h	Kirchhoff plate	Mindlin plate	Third order shear deformation plate	N order shear deformation plate ($n=5$)
5	5.0000	10.1594	5.6521	5.6937
10	5.0000	12.8101	5.1723	5.1826
20	5.0000	13.6820	5.0437	5.0463
30	5.0000	13.8568	5.0195	5.0206
40	5.0000	13.9191	5.0110	5.0116
50	5.0000	13.9481	5.0070	5.0074



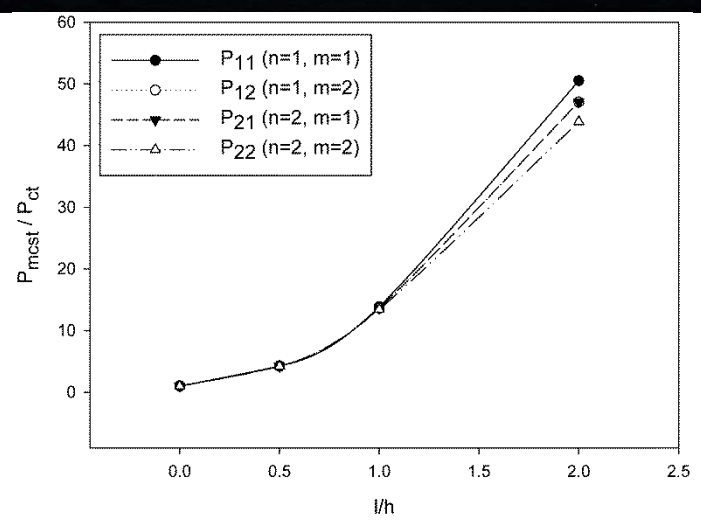
شکل ۱: مقایسه میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحات مختلف تحت اثر نیروی تک محوره در جهت X برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت ($a/b=1$ و $l/h=1$)

جدول ۲: مقایسه میزان نیروی بحرانی کمانش نانو صفحه میندیلین تحت اثر نیروی دو محوره در جهت X و Y برای نسبت طول به ضخامت و پارامتر طول به ضخامت صفحه متفاوت ($a/b=1$ و $P_y/P_x=1$)

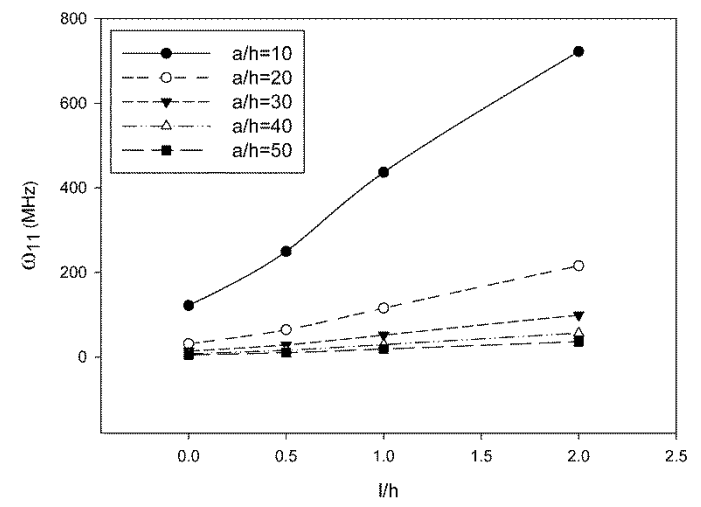
a/h	l/h				
	0	0.5	1	1.5	2
10	6.7163	28.2488	86.0362	162.1843	233.7019
20	1.7526	7.4278	23.9784	50.02999	83.4495
30	0.7853	3.3333	10.8814	23.1469	39.6731
40	0.4430	1.8814	6.1660	13.2059	22.8526
50	0.2839	1.2060	3.9597	8.5076	14.7879



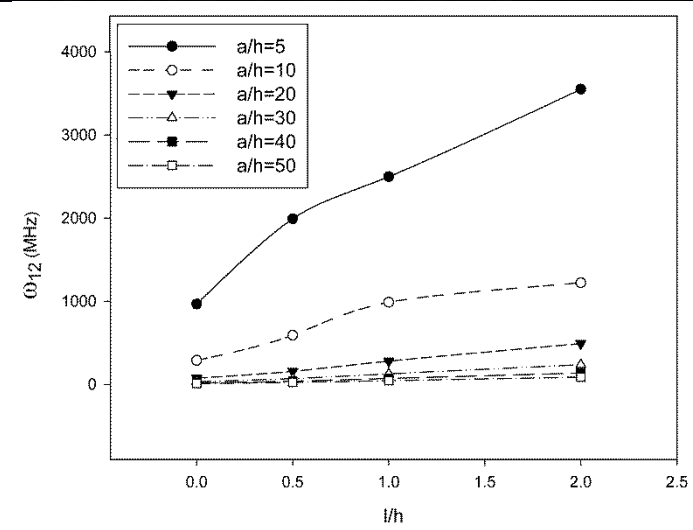
شکل ۲: میزان نیروی بحرانی بدون بعد نانوصفحه میندیلین تحت اثر نیروی تک محوره در جهت X برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت ($a/b=1$)



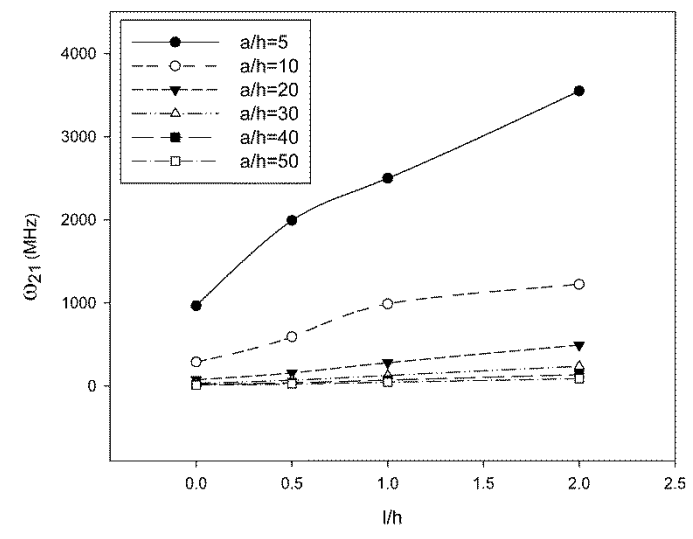
شکل ۳: میزان نیروی بحرانی بدون بعد نانوصفحه میندلین برای مود های مختلف تحت اثر نیروی دو محوره در جهت y, x برای نسبت پارامتر طول به ضخامت صفحه متفاوت ($a/b=1, a/h=30$)



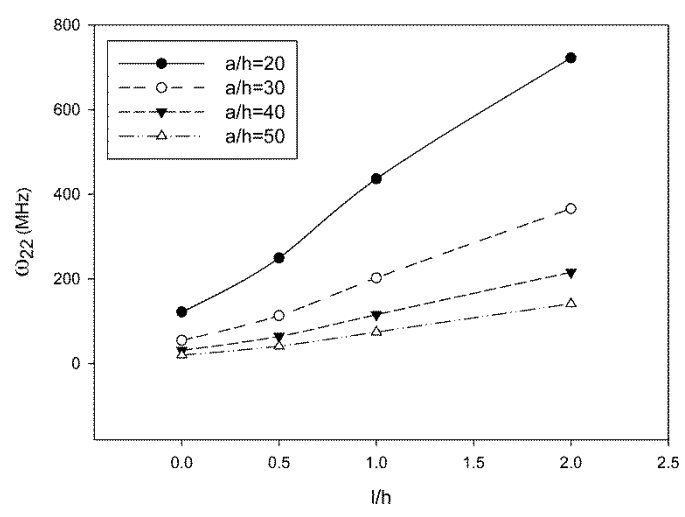
شکل ۴: مقایسه فرکانسهای مود اول (ω_{11}) برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه میندلین ($a/b=1, h=0.34$)



شکل ۵: مقایسه فرکانسهای مود اول (ω_{12}) برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه میندلین ($a/b=1, h=0.34$)



شکل ۶: مقایسه فرکانسهای مود اول (ω_{21}) برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه میندلین ($a/b=1, h=0.34$)



شکل ۷: مقایسه فرکانسهای مود اول (ω_{22}) برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه میندیلین ($a/b=1, h=0.34$)

جدول ۳: مقایسه فرکانسهای مود های مختلف برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه میندیلین ($l/h=1$)

Mode	a/h			
	20	30	40	50
a/b=0.5				
ω_{11}	280.4153	128.0217	72.7219	46.7575
ω_{21}	436.5378	202.1703	115.4757	74.4444
ω_{12}	860.2980	413.9252	240.0504	155.9272
ω_{22}	988.5087	481.2484	280.4153	182.5827
a/b=1				
ω_{11}	115.4757	51.9052	29.3145	18.7965
ω_{21}	280.4153	128.0217	72.7219	46.7575
ω_{12}	280.4153	128.0217	72.7219	46.7575
ω_{22}	436.5378	202.1703	115.4757	74.4444
a/b=1.5				
ω_{11}	83.8680	37.5829	21.2022	13.5879
ω_{12}	159.1488	071.8354	40.6324	26.0724
ω_{21}	250.5691	114.0783	64.7336	41.6004
ω_{22}	321.6951	147.4292	83.8680	53.9616

جدول ۴: مقایسه فرکانسها برای نسبت پارامتر طول به ضخامت صفحه متفاوت برای صفحه های مختلف
($a/b=2, a/h=30$)

Mode	l/h			
	0	0.5	1	2
Third order shear deformation plate				
ω_{11}	8.7284	12.3536	19.5411	36.0389
ω_{12}	13.9441	19.7447	31.2407	57.6223
ω_{21}	29.4967	41.8251	66.2277	122.1954
ω_{22}	34.6497	49.1546	77.8533	143.6613
Kirchhoff plate				
ω_{11}	8.7459	12.3685	19.5563	36.0601
ω_{12}	13.9886	19.7828	31.2794	57.6764
ω_{21}	29.6953	41.9954	66.4006	122.4367
ω_{22}	34.9237	49.3895	78.0917	143.9940
Mindlin plate				
ω_{11}	8.7280	17.9862	32.5528	62.6001
ω_{21}	13.9429	28.7266	051.9052	99.1252
ω_{12}	29.4914	60.7224	109.1821	204.2795
ω_{22}	34.6425	71.3140	128.0217	237.9174

۱۰. نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی کمانش و ارتعاشات نانو صفحه میندلین گرافنی با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده پرداخته شد. همانگونه که در جداول و اشکال دیده شد تحت اثر نیروی تک محوره میزان نیروی بحرانی نانوصفحه مرتبه سوم کمترین مقدار و نانو صفحه میندلین بیشترین مقدار است. همچنین میزان نیروی بحرانی نانوصفحه میندلین تحت اثر نیروی دو محوره صفحه ای در جهت X و Y با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانو صفحه افزایش و با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش میابد. همچنین فرکانسهای مود های مختلف نانو صفحه میندلین با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه کاهش می یابد. همچنین هنگامی که اثر پارامتر اندازه در نظر گرفته نشود (تئوری کلاسیک) میزان فرکانس، کمترین میزان است و با افزایش اثر اندازه، فرکانس نیز افزایش پیدا میکند. همچنین میزان فرکانس برای مود اول کمترین مقدار است و برای مودهای بعد افزایش پیدا می کند. همچنین با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان فرکانس ارتعاشی کم می شود.

مراجع:

- [1] Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., Tong, P., " Couple stress Based Strain gradient theory for elasticity". Int.J.Solids Struct.39, pp. 2731–2743,(2002).
- [2] Toupin, R.A., "Elastic materials with couple stresses". Arch.Rational Mech.Anal.11, pp. 385–414,(1962).
- [3] Mindlin, R.D., Tiersten, H.F., " Effects of couple-stresses in linear elasticity" Arch. Rational

Mech. Anal.11, pp. 415–448, (1962).

[4] Koiter, W.T., "Couple stresses in the theory of elasticity", I and II. Proc .K. Ned. Akad .Wet.(B) 67, pp. 17–44, (1964).

[5] Mindlin, R.D., "Micro-structure in linear elasticity". Arch.RationalMech.Anal .16, pp. 51–78, (1964).

[6] Tsiatas.G.C , "A new kirchhoff model based on a modified couple stress theory", International Journal of solids and structures, No.46, pp2757-2764, (2009)

[7] Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X , "A size-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory", European Journal of mechanics A/Solids, No.30, pp 517-524, (2011)

[8] Farajpour.A, Shahidi.A.R, Mohammadi.M, Mahzoon.M, "Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics, Composite Structures, No.94, pp 1605-1615, (2012).

[9] Tai.T ,HoChoi.D , "size-dependent functionally graded kirchhoff and mindlin plate theory based on a modified couple stress theory", Composite Structures, No.95, pp142-153, (2013).

[10] B.Akgoz, Omer Civalek "Free vibration analysis for single –layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory" materials and design No.42, pp 164-171, (2012)

[11] Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X , "A size-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory", European Journal of mechanics A/Solids, No.30, pp 517-524, (2011)

[12] Tai.T ,HoChoi.D , "size-dependent functionally graded kirchhoff and mindlin plate theory based on a modified couple stress theory", Composite Structures, No.95, pp142-153, (2013).

[13] B.Akgoz, Omer Civalek "Free vibration analysis for single –layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory" materials and design No.42, pp 164-171, (2012)

[14] Roque.C.M.C ,Ferreira.A.J.M ,Reddy.J.N, "Analysis of mindlin micro plates with a modified couple stress theory and meshless method", Applied Mathematical Modeling, No.37, pp 4626-4633, (2013).