

تحلیل استاتیکی نانورق مستطیلی مرتبه سوم با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده

مجید اسکندری شهرکی^{1*}، محمود شریعتی^۲، محسن دشتی رحمت آبادی^۳، محمدرضا زمانی^۴، محسن حیدری بنی^۵.

- ۱- دانشجوی دکتری مهندسی هوافضا، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.
- ۲- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.
- ۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.
- ۴- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران.
- ۵- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد شهرکرد، دانشگاه آزاد اسلامی، شهرکرد، ایران.

خلاصه

در این مقاله سعی بر آن است که با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده، مشخصه‌های خمش و کمانش نانو صفحه مرتبه سه مستطیلی با شرایط تکیه‌گاهی ساده مطالعه شود. برای در نظر گرفتن آثار مقیاس کوچک از تئوری کوپل تنش اصلاح شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول می‌باشد استفاده شده است. در تئوری کوپل تنش اصلاح شده، چگالی انرژی کرنشی تابعی از مؤلفه‌های تانژسور کرنش، تانژسور انحناء، تانژسور تنش و قسمت متقارن تانژسور تنش کوپل می‌باشد. بعد از به دست آوردن انرژی کرنشی، کار خارجی و معادله کمانش و قرار دادن آن‌ها در معادله اصل همیلتون، معادلات اصلی و کمکی نانو صفحه به دست آورده می‌شود. سپس با جایگذاری شرایط مرزی و نیرویی در معادلات حاکم به بررسی خمش و کمانش نانو صفحه مرتبه سوم مستطیلی به ضخامت h با تکیه‌گاه ساده در اطراف می‌پردازیم. روش حل نیز روش ناویر می‌باشد.

کلمات کلیدی: تئوری تنش کوپل اصلاح شده، نانو صفحه مرتبه سه، روش حل ناویر، خمش، کمانش.

۱. مقدمه

برای مطالعه مواد در مقیاس کوچک مطمئن‌ترین روش آزمایش در مقیاس اتمی و مولکولی می‌باشد. در این روش نانو ساختار در ابعاد واقعی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این روش برای تعیین خواص مکانیکی نانو ساختارها از میکروسکوپ نیروی اتمی (AFM) برای اعمال بارهای مکانیکی مختلف بر روی نانو صفحات و اندازه‌گیری پاسخ استفاده می‌کنند. مشکلات اساسی در این روش دشواری کنترل بر شرایط آزمایش در این مقیاس و نیز هزینه‌های اقتصادی سنگین و نیز زمان بردن روش می‌باشد. از این رو از این روش تنها برای اعتبارسنجی روش‌های ساده و کم هزینه دیگر استفاده می‌شود.

¹ Corresponding author: دانشجوی دکتری مهندسی هوافضا، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.

Email: mjdeskandari@gmail.com

شبیه‌سازی اتمی راه حل دیگری در مطالعه ساختارها در مقیاس کوچک می‌باشد. در این روش رفتار اتم‌ها و مولکول‌ها با در نظر گرفتن اثر بین مولکولی و بین اتمی بر حرکت آن‌ها که در نهایت تغییر فرم کل جسم را شامل می‌شود، مورد بررسی قرار می‌گیرد. استفاده از این روش هنگامی که مسئله دارای تغییر شکل بزرگ می‌باشد و یا مقیاس بزرگ‌تر از یک یا چند اتم باشد، هزینه محاسباتی بسیار زیادی داشته و مقرون به صرفه نیست. بنابراین، از این روش تنها برای مسائل با تغییر شکل کوچک استفاده می‌شود.

با توجه به محدودیت‌های مطرح شده در روش‌های فوق برای مطالعه نانو ساختارها، محققین به دنبال راهکارهای ساده‌تر در بررسی نانو ساختارها بوده‌اند. مدل‌سازی ساختارهای در مقیاس کوچک، با استفاده از مکانیک محیط پیوسته راه حل دیگری در مطالعه این مواد می‌باشد. تئوری‌های محیط پیوسته‌ی وابسته به اندازه متنوعی وجود دارند که آثار اندازه را در نظر گرفته‌اند از جمله: تئوری میکرومورفیک، تئوری میکروساختار، تئوری میکروبولار، تئوری کوسرات، تئوری غیرموضعی، تئوری کوپل تنش اصلاح شده، تئوری الاستیسیته گرادین کرنشی که این‌ها گسترش یافته‌ی تئوری‌های میدانی کلاسیک هستند که در آن‌ها آثار اندازه گنجانده شده است.

۲. تئوری کوپل تنش اصلاح شده:

یانگ و همکارانش [۱] در سال ۲۰۰۲ با اصلاح کردن تئوری کوپل تنش که تو سوتوپین [۲]، میندلین و تیرستن [۳]، کویتز [۴] و میندلین [۵] در سال ۱۹۶۴ ارائه شد، یک مدل کوپل تنش اصلاح شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول ماده^۱ برای تصویر کردن اثر اندازه می‌باشد را پیشنهاد کردند، در حالیکه تئوری کوپل تنش کلاسیک دارای دو پارامتر مقیاس طول ماده است.

در تئوری کوپل تنش اصلاح شده، چگالی انرژی کرنشی در مختصات قائم سه بعدی برای جسمی که محدود به حجم Ω و سطح Ω می‌باشد به صورت زیر بیان می‌شود [۶]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

که در آن:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (3)$$

ε_{ij} و χ_{ij} به ترتیب قسمت متقارن تانسور انحنای و تانسور کرنش^۳ هستند. θ_{ij} و u_i به ترتیب بردار جابه‌جایی^۴ و بردار چرخشی^۵ تعریف شده‌اند.

$$\theta = \frac{1}{2} \text{Curl } \mathbf{u} \quad (4)$$

σ_{ij} و m_{ij} به ترتیب تانسور تنش و قسمت انحرافی تانسور کوپل تنش^۶ هستند که به صورت زیر تعریف می‌باشند:

¹Material length scale parameter

²Symmetric part of the curvature tensor

³ Strain tensor

⁴Displacement vector

⁵Rotation vector

⁶Deviatoric part of the couple stress tensor

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

$$m_{i,j} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \quad (6)$$

که در آن λ و μ ثوابت لامه، δ_{ij} دلتای کرونکر و l پارامتر مقیاس طول ماده می باشد. از معادله (۳) و (۶) می توان دریافت که χ_{ij} و m_{ij} متقارن هستند.

۳. مدل صفحه مرتبه سوم:

معادلات جابه جایی برای صفحه مرتبه سوم به صورت زیر تعریف می شوند:

$$u_1(x, y, z) = z \varphi_x(x, y) - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3 \left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + \varphi_x(x, y)\right) \quad (7)$$

$$u_2(x, y, z) = z \varphi_y(x, y) - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3 \left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + \varphi_y(x, y)\right) \quad (8)$$

$$u_3(x, y, z) = w(x, y)$$

که در آن φ_x و φ_y چرخش بردار نرمال حول محور X و Y و w میزان جابه جایی نقطه میانی صفحه در راستای محورها Z می باشد. قسمت متقارن تانسور انحنا^۱ و تانسور کرنش و تنش و بردار چرخشی برای مدل صفحه مرتبه سوم به صورت زیر می باشد:

$$\varepsilon_{xx} = z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\right) \quad (9)$$

$$\varepsilon_{yy} = z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\right) \quad (10)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (11)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right) - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \quad (12)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \left(\frac{1}{2} - 2 \left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x\right) \quad (13)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \left(\frac{1}{2} - 2 \left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y\right) \quad (14)$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \left(\frac{1}{2} - 2 \left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y\right) \quad (15)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} - 2 \left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x\right) \quad (16)$$

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left(z - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3\right) \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\right) \quad (17)$$

$$\chi_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \left(\frac{1}{2} - 2 \left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right) \quad (18)$$

¹Symmetric part of the curvature tensor

$$x_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{1}{2} - 2\left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \quad (18)$$

$$x_{zz} = \left(\frac{1}{2} - 2\left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\right) \quad (19)$$

$$x_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\right) \quad (20)$$

$$x_{xz} = \frac{1}{4} \left(z - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y \partial x}\right) + 2z \left(\frac{1}{h}\right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y\right) \quad (21)$$

$$x_{yz} = -2z \left(\frac{1}{h}\right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x\right) + \frac{1}{4} \left(z - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{h}\right)^2 z^3\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2}\right) \quad (22)$$

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon_{yy} \quad (23)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\epsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} \quad (24)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \quad (25)$$

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} \quad (26)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu\epsilon_{xz} \quad (27)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu\epsilon_{yz} \quad (28)$$

تغییرات انرژی کرنشی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta U = \int_V \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \epsilon_{xy} + 2\sigma_{xz} \delta \epsilon_{xz} + 2\sigma_{yz} \delta \epsilon_{yz} + m_{xx} \delta x_{xx} + m_{yy} \delta x_{yy} + m_{zz} \delta x_{zz} + 2m_{xy} \delta x_{xy} + 2m_{xz} \delta x_{xz} + 2m_{yz} \delta x_{yz} dV \quad (29)$$

می‌توان جهت ساده‌نویسی ضرایب متغیرها را از F_1 تا F_{15} مطابق معادله (۳۰) نام‌گذاری و آن‌ها را جداگانه به دست

آورد.

$$\delta U = \int_V (E_1 \delta w_{,xx} + E_2 \delta w_{,yy} + E_3 \delta w_{,xy} + E_4 \delta w_{,x} + E_5 \delta w_{,y} + E_6 \delta \varphi_{x,yy} + E_7 \delta \varphi_{y,xx} + E_8 \delta \varphi_{y,xy} + E_9 \delta \varphi_{x,yx} + E_{10} \delta \varphi_{x,x} + E_{11} \delta \varphi_{y,y} + E_{12} \delta \varphi_{x,y} + E_{13} \delta \varphi_{y,x} + E_{14} \delta \varphi_x + E_{15} \delta \varphi_y) dV \quad (31)$$

که در آن:

$$E_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[(\lambda + 2\mu)(C_3 - C_1 C_2) + \frac{1}{2} \mu l^2 (1 + C_4) - \frac{1}{4} \mu l^2 (1 + C_4)(1 - C_4) \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left[\lambda(C_3 - C_1 C_2) - \frac{1}{2} \mu l^2 (1 + C_4) + \frac{1}{4} \mu l^2 (1 - C_4)(1 + C_4) \right] + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \left[-(\lambda + 2\mu)(C_2 C_1) - \frac{1}{4} \mu l^2 (1 - C_4)(1 + C_4) \right] + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \left[-\lambda(C_2 C_1) - \frac{1}{4} \mu l^2 (1 - C_4)(1 + C_4) \right] \quad (31)$$

$$E_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left[(\lambda + 2\mu)(C_3 - C_1 C_2) + \frac{1}{2} \mu l^2 (1 + C_4) - \frac{1}{4} \mu l^2 (1 + C_4)(1 - C_4) \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\lambda(C_3 - C_1 C_2) - \frac{1}{2} \mu l^2 (1 + C_4) + \frac{1}{4} \mu l^2 (1 - C_4)(1 + C_4) \right] + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \left[-(\lambda + 2\mu)(C_2 C_1) - \frac{1}{4} \mu l^2 (1 - C_4)(1 + C_4) \right] + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \left[-\lambda(C_2 C_1) - \frac{1}{4} \mu l^2 (1 - C_4)(1 + C_4) \right] \quad (32)$$

$$E_3 = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left[4\mu C_2^2 + \mu l^2 (1 + C_4)^2 \right] + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \left[-2\mu C_2 C_1 - \frac{1}{2} \mu l^2 (1 - C_4)(1 + C_4) \right] + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \left[-2\mu C_2 C_1 - \frac{1}{2} \mu l^2 (1 - C_4)(1 + C_4) \right] \quad (33)$$

$$E_4 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right) \left[\mu(1 - C_4)^2 + \frac{1}{4} \mu l^2 C_5^2 \right] + \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \right) \left[\frac{1}{4} \mu l^2 C_5 C_1 \right] \quad (34)$$

$$E_5 = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right) \left[\mu(1 - C_4)^2 + \frac{1}{4} \mu l^2 C_5^2 \right] + \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} \right) \left[\frac{1}{4} \mu l^2 C_5 C_1 \right] \quad (35)$$

$$E_6 = E_8 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right) \left[\frac{1}{4} \mu l^2 C_5 C_1 \right] + \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \right) \left[\frac{1}{4} \mu l^2 C_1^2 \right] \quad (36)$$

$$E_7 = E_9 = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right) \left[-\frac{1}{4} \mu l^2 C_5 C_1 \right] + \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} \right) \left[\frac{1}{4} \mu l^2 C_1^2 \right] \quad (37)$$

$$E_{10} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[(\lambda + 2\mu)(C_1^2 - z C_1) - \frac{1}{4} \mu l^2 (1 - C_4)(1 + C_4) \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left[\lambda C_1 (-z + C_1) + \frac{1}{4} \mu l^2 (1 - C_4)(1 + C_4) \right] + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \left[(\lambda + 2\mu) C_1^2 + \frac{1}{4} \mu l^2 (1 - C_4)^2 \right] + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \left[\lambda C_1^2 - \frac{1}{4} \mu l^2 (1 - C_4)^2 \right] \quad (38)$$

$$E_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left[(\lambda + 2\mu)(C_1^2 - z C_1) - \frac{1}{4} \mu l^2 (1 - C_4)(1 + C_4) \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\lambda A_1 (-z + C_1) + \frac{1}{4} \mu l^2 (1 - C_4)(1 + C_4) \right] + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \left[(\lambda + 2\mu) C_1^2 + \frac{1}{4} \mu l^2 (1 - C_4)^2 \right] + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \left[\lambda C_1^2 - \frac{1}{4} \mu l^2 (1 - C_4)^2 \right] \quad (39)$$

$$E_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left[-2\mu C_2 C_1 - \frac{1}{2} \mu l^2 (1 - C_4)(1 + C_4) \right] + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \left[\mu C_1^2 + \mu l^2 (1 - C_4)^2 \right] + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \left[\mu C_1^2 - \frac{1}{2} \mu l^2 (1 - C_4)^2 \right] \quad (40)$$

$$E_{13} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left[-2\mu C_2 C_1 - \frac{1}{2} \mu l^2 (1 - C_4)(1 + C_4) \right] + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \left[\mu C_1^2 - \frac{1}{2} \mu l^2 (1 - C_4)^2 \right] + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \left[\mu C_1^2 + \mu l^2 (1 - C_4)^2 \right] \quad (41)$$

$$E_{14} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right) \left[\mu(1 - C_4)^2 + \frac{1}{4} \mu l^2 C_5^2 \right] + \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \right) \left[\frac{1}{4} \mu l^2 C_5 C_1 \right] \quad (42)$$

$$E_{15} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right) \left[\mu(1 - C_4)^2 + \frac{1}{4} \mu l^2 C_5^2 \right] + \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} \right) \left[\frac{1}{4} \mu l^2 C_5 C_1 \right] \quad (43)$$

که در آنها داریم:

$$C_1 = z - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{h} \right)^2 z^3 \quad (44)$$

$$C_2 = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{h} \right)^2 z^3 \quad (45)$$

$$C_3 = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{h} \right)^2 z^4 \quad (46)$$

$$C_4 = 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \quad (47)$$

$$C_5 = -8z \left(\frac{1}{h} \right)^2 \quad (48)$$

$$C_6 = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{h} \right)^2 \quad (49)$$

$$C_7 = \mu \frac{h}{3} \quad (50)$$

$$C_8 = \mu \frac{h}{5} \quad (51)$$

$$C_9 = \frac{h^3}{252} (\lambda + 2\mu) \quad (52)$$

$$C_{10} = (\lambda + 2\mu) \frac{h^3}{60} \quad (53)$$

$$C_{11} = \mu l^2 \frac{4}{3h} \quad (54)$$

$$C_{12} = \frac{1}{4}\mu l^2 h \quad (55)$$

$$I_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z^i dz \quad (i = 0, 1, 2, n-1, n, n+1, 2n-4, 2n-2, 2n) \quad (56)$$

۴. نیروی کمانش:

برای صفحه مستطیلی به طول a ، عرض b و ضخامت h با نیروهای محوره‌های P_{xy}, P_y, P_x که در آن: P_x : نیروی محوری در راستای X ، P_y : نیروی محوری در راستای Y ، P_{xy} : نیروی برشی صفحه XY و $q(x, y)$ نیروی خارج صفحه‌ای می‌باشد. معادله نیروی کمانش به صورت زیر خواهد بود [۸ و ۷]:

$$P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, y) \quad (57)$$

۵. معادله کار مجازی که توسط نیروی خارجی حاصل می‌گردد [۹]:

کار مجازی که توسط نیروی خارجی انجام می‌گیرد شامل سه بخش است:

۱- کار مجازی که توسط نیروهای حجمی روی

$$V = \Omega * (-h/2, h/2) \text{ انجام می‌گیرد.}$$

۲- کار مجازی که توسط نیروی برشی صفحه‌ای در سطوح بالایی و پایینی (Ω) انجام می‌گیرد.

۳- کار مجازی که توسط نیروی برشی صفحه‌ای و بر روی سطوح جانبی $S = \Gamma * (-h/2, h/2)$ انجام می‌گیرد. که Ω

صفحه میانی ورق و Γ محیط میانی ورق می‌باشد.

اگر (f_x, f_y, f_z) را نیروی حجمی (force body) و (c_x, c_y, c_z) را ممان حجمی (body couple) و (q_x, q_y, q_z)

نیروهایی باشند که بروی سطح Ω عمل می‌کنند و (t_x, t_y, t_z) تنش برشی کوشی (Cauchy tractions) و (S_x, S_y, S_z)

ممان سطح (Surface couple) باشند. در این صورت تغییرات (Variation) کار مجازی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \delta w = - \left[\int_{\Omega} (f_x \delta u + f_y \delta V + f_z \delta w + q_x \delta u + q_y \delta V + q_z \delta w \right. \\ \left. + c_x \delta \theta_x + c_y \delta \theta_y + c_z \delta \theta_z) dx dy + \int_{\Gamma} (t_x \delta u \right. \\ \left. + t_y \delta V + t_z \delta w + s_x \theta_x + s_y \delta \theta_y + s_z \delta \theta_z) d\Gamma \right] \quad (58) \end{aligned}$$

با توجه به اینکه در این تحقیق فقط نیروی خارجی q_z اعمال شده است، کار مجازی به صورت:

$$\delta w = \int_0^a \int_0^b q(x, y) \delta w(x, y) dx dy \quad (59)$$

می‌باشد.

همچنین با استفاده از اصل همیلتون داریم [۱۰]:

$$\delta(U - w) = 0 \quad (60)$$

که در آن U انرژی کرنشی و W کار نیروهای خارجی می‌باشد.

۶. معادله نهایی صفحه با اعمال نیروی کمانش و نیروی خارجی

با به کارگیری اصل همپلتون (معادله ۶۰) معادلات اصلی مطابق زیر به دست می آیند:

$$\left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} - \frac{\partial E_4}{\partial x} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial E_5}{\partial y} \right) dz \right] + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, y) \quad (61)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial^2 E_6}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_9}{\partial x \partial y} - \frac{\partial E_{12}}{\partial y} - \frac{\partial E_{10}}{\partial x} + F_{14} \right) dz = 0 \quad (62)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial^2 E_7}{\partial x^2} - \frac{\partial E_{13}}{\partial x} + \frac{\partial^2 E_8}{\partial x \partial y} - \frac{\partial E_{11}}{\partial y} + E_{15} \right) dz = 0 \quad (63)$$

۷. به دست آوردن معادلات صفحه مرتبه سوم در کلی ترین حالت

با در نظر گرفتن مقادیر زیر:

$$D_1 = 2C_{12} + l^2 C_7 + \frac{1}{2} l^2 C_8 + 2C_9 \quad (64)$$

$$D_2 = \frac{1}{2} D_1 = C_{12} + C_9 + \frac{1}{2} l^2 C_7 + \frac{1}{4} l^2 C_8 \quad (65)$$

$$D_3 = -\mu h + 2C_7 - C_8 - C_{11} \quad (66)$$

$$D_4 = C_9 - C_{10} + \frac{1}{4} l^2 C_8 - C_{12} \quad (67)$$

$$D_5 = 3C_{12} - \frac{3}{2} l^2 C_7 + \frac{3}{4} l^2 C_8 - (\lambda + \mu) I_2 + 2(\lambda + \mu) C_6 I_4 - (\lambda + \mu) C_6^2 I_6 \quad (68)$$

$$D_6 = -\mu I_2 + 2\mu C_6 I_4 - \mu C_6^2 I_6 - 4C_{12} + 2l^2 C_7 - l^2 C_8 \quad (69)$$

$$D_7 = \frac{1}{4} \mu l^2 I_2 - \frac{1}{2} \mu l^2 C_6 I_4 + \frac{1}{4} \mu l^2 C_6^2 I_6 \quad (70)$$

$$D_8 = -(\lambda + 2\mu) I_2 + 2C_{10} - C_9 - C_{12} + \frac{1}{2} l^2 C_7 - \frac{1}{4} l^2 C_8 \quad (71)$$

$$D_9 = \frac{5}{4}l^2 C_8 - \frac{3}{2}\mu l^2 C_6^2 I_4 - \frac{5}{2}l^2 C_7 + 3C_{12} - (\lambda + \mu)I_2 - (\lambda + \mu)C_6^2 I_6 + 2(\lambda + \mu)C_6 I_4 \quad (72)$$

$$D_{10} = 3l^2 C_7 - \frac{3}{2}l^2 C_8 + \frac{3}{2}\mu l^2 C_6^2 I_4 - \mu I_2 - \mu C_6^2 I_6 + 2\mu C_6 I_4 - 4C_{12} \quad (73)$$

معادلات کلی صفحه مرتبه سوم به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_4 \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x^3} + D_4 \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial y^2} + D_4 \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial x^2} + D_3 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + D_3 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + D_4 \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y^3} + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, y) \quad (74)$$

$$-D_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_5 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y \partial x} + D_6 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_7 \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x \partial y^3} - D_7 \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial y^4} + D_7 \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial y \partial x^3} - D_7 \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial y^2 \partial x^2} - D_3 \frac{\partial w}{\partial x} - D_3 \varphi_x - D_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + D_8 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} = 0 \quad (75)$$

$$-D_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + D_9 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y \partial x} + D_{10} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + D_7 \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x^4} + D_7 \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x^2 \partial y^2} - D_7 \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial y \partial x^3} - D_7 \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial x \partial y^3} - D_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - D_3 \frac{\partial w}{\partial y} - D_3 \varphi_y + D_8 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = 0 \quad (76)$$

۸. روش حل ناویر

روش حل ناویر برای صفحات مستطیلی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در همه لبه‌ها قابل استفاده است. به خاطر اینکه شرایط مرزی خودبه‌خود در این روش ارضا می‌شوند توابع مجهول سطح میانی صفحه به صورت سری‌های دوگانه مثلثاتی به صورت زیر بیان می‌شوند [۱۱ و ۱۲]:

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (77)$$

$$\varphi_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \quad (78)$$

$$\varphi_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \quad (79)$$

نیرو نیز از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (80)$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y \, dx \, dy \quad (81)$$

$$Q_{mn} = \begin{cases} q_0 & \text{برای نیروی سینوسی} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{برای نیروی یکنواخت} \\ \frac{4Q_0}{ab} & \text{برای نیروی نقطه در مرکز صفحه} \end{cases} \quad (82)$$

که در آن:

$$\alpha = \frac{\pi m}{a}, \quad \beta = \frac{\pi n}{b}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (83)$$

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده نیز توسط روش ناویر طبق معادلات ذیل ارضاء می‌شوند:

$$x = 0, a \begin{cases} w(0, y) = w(a, y) = \sum \sum w_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0 \\ \varphi_y(0, y) = \varphi_y(a, y) = \sum \sum y_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y = 0 \end{cases} \quad (84)$$

$$y = 0, b \begin{cases} w(x, 0) = w(x, b) = \sum \sum w_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0 \\ \varphi_x(x, 0) = \varphi_x(x, b) = \sum \sum X_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0 \end{cases} \quad (85)$$

۹. به دست آوردن ماتریس معادلات صفحه مرتبه سوم در کلی‌ترین حالت:

پس از حل به کمک روش ناویر و نام‌گذاری ضرایب متغیرهای معادلات به صورت زیر خواهیم داشت:

$$R_1 = D_1 \alpha^2 \beta^2 + D_2 \alpha^4 + D_2 \beta^4 - D_3 \alpha^2 - D_3 \beta^2 - P_x \alpha^2 - P_y \beta^2 \quad (86)$$

$$R_2 = R_4 = D_4 \alpha^3 + D_4 \alpha \beta^2 - D_3 \alpha \quad (87)$$

$$R_3 = R_7 = D_4\beta^3 + D_4\alpha^2\beta - D_3\beta \quad (88)$$

$$R_5 = -D_7\beta^4 - D_7\alpha^2\beta^2 - D_6\beta^2 - D_8\alpha^2 - D_3 \quad (89)$$

$$R_6 = D_7\alpha\beta^3 + D_7\alpha^3\beta - D_5\alpha\beta \quad (90)$$

$$R_8 = -D_7\alpha^3\beta - D_7\alpha\beta^3 - D_9\alpha\beta \quad (91)$$

$$R_9 = D_7\alpha^4 + D_7\alpha^2\beta^2 - D_{10}\alpha^2 - D_8\beta^2 - D_3 \quad (92)$$

ماتریس کلی معادلات صفحه مرتبه سوم به همراه معادلات کمکی به شکل زیر حاصل خواهند شد:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ R_4 & R_5 & R_6 \\ R_7 & R_8 & R_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (93)$$

جنس صفحه را مواد مختلفی از جمله اپوکسی، گرافن، مس و ... در نظر می‌گیرند. در این مقاله جنس صفحه را گرافن در نظر می‌گیریم. یک صفحه گرافن تک لایه دارای خصوصیات زیر است [۱۳]:

$$E = 1.06TPa, \nu = 0.25, h = 0.34nm, \rho = 2250 \text{ kg/m}^3$$

همچنین رابطه بین ν و E می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (94)$$

که در آن E مدول یانگ و λ و μ ضرایب لامه هستند [۱۴]. همچنین مقدار نیرو را $q = 1N/m^2$ در نظر می‌گیریم.

۱۰. نتایج و بحث:

برنامه محاسباتی در نرم‌افزار Matlab نوشته شده و نتایج با استفاده از این برنامه به دست آمده‌اند. کلیه شرایط مرزی نیز به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده‌اند.

جدول (۱) نشان می‌دهد میزان خمش بدون بعد نانو صفحه مرتبه سوم تحت اثر بار سینوسی کمتر از بار یکنواخت صفحه‌ای می‌باشد. همچنین با افزایش پارامتر طول نسبت به ضخامت، میزان خمش بدون بعد نانو صفحه کم می‌شود. و با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان خمش بدون بعد زیاد می‌شود.

شکل (۱) به مقایسه میزان خمش نانو صفحات مختلف تحت اثر بار یکنواخت صفحه‌ای برای نسبت طول به عرض متفاوت پرداخته است. همان‌گونه که در جدول مشاهده می‌شود میزان خمش برای نانو صفحه کیرشهف کمترین مقدار و برای نانو صفحه مرتبه سوم بیشترین مقدار است.

جدول (۲) میزان خمش نانو صفحه مرتبه سوم تحت اثر بار یکنواخت صفحه‌ای برای نسبت طول به عرض و نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل پیداست با افزایش پارامتر طول نسبت به ضخامت، میزان خمش صفحه کم می‌شود. همچنین با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان خمش زیاد می‌شود.

شکل (۲) میزان خمش نانو صفحه مرتبه سوم تحت اثر بار سینوسی برای نسبت طول به عرض و نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل پیداست با افزایش پارامتر طول نسبت به ضخامت میزان خمش صفحه کم می‌شود. همچنین با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان خمش زیاد می‌شود.

شکل (۳) کانتورهای خمش نانو صفحه مرتبه سوم تحت نیروی یکنواخت صفحه‌ای q را نشان می‌دهند. همان‌گونه که در شکل پیداست میزان خمش در مرکز صفحه بیشترین مقدار است.

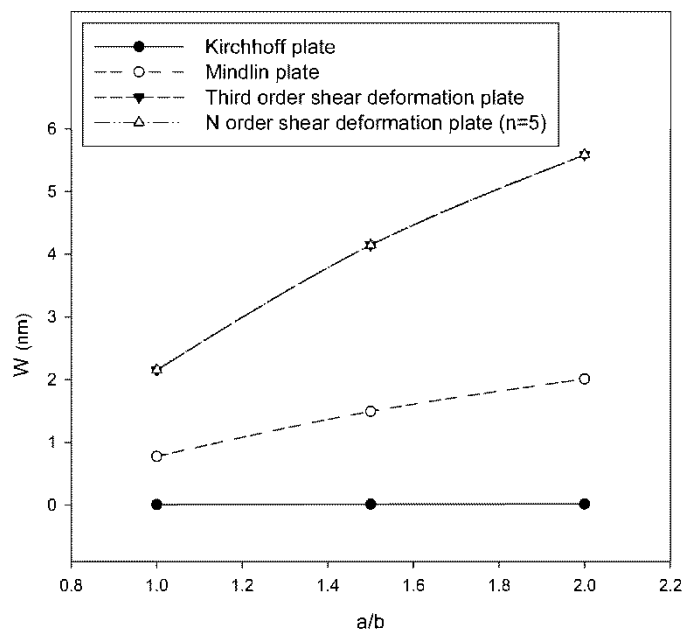
شکل (۴) نشان می‌دهد میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی دومحوره صفحه‌ای در جهت X با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانو صفحه افزایش و با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش می‌یابد.

جدول (۳) نشان می‌دهد میزان نیروی بحرانی نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی تک‌محوره صفحه‌ای در جهت X ، با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانو صفحه افزایش و با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش می‌یابد. همچنین با مقایسه جدول (۳) و شکل (۴) درمی‌یابیم نیرو بحرانی در حالت تک‌محوره به مراتب بیشتر از دومحوره می‌باشد.

جدول (۴) نشان می‌دهد میزان نیروی بحرانی کمانش بدون بعد نانو صفحات مختلف تحت اثر نیروی دومحوره صفحه‌ای در جهت X و Y با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه رفتار متفاوتی به شرح ذیل دارد:
نیروی بحرانی بدون بعد با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه میندلین، افزایش می‌یابد.
نیروی بحرانی بدون بعد با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه برشی مرتبه سوم و پنجم، اندکی کاهش می‌یابد.
نیروی بحرانی بدون بعد با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کیرشهف، ثابت می‌ماند.

جدول ۱. مقایسه میزان خمش بدون بعد نانو صفحه مرتبه سوم تحت اثر بار سینوسی و یکنواخت صفحه‌ای برای نسبت طول به عرض متفاوت ($a/h=30, q=1e-18 \text{ N/nm}^2$)

a/b	l/h							
	0		0.5		1		2	
	Uniform load	Sinusoidal load	Uniform load	Sinusoidal load	Uniform load	Sinusoidal load	Uniform load	Sinusoidal load
1	1.00000	1.00000	0.49874	0.49858	0.19922	0.19912	0.05856	0.05852
1.5	1.00000	1.00000	0.49911	0.49883	0.19945	0.19927	0.05864	0.05858
2	1.00000	1.00000	0.49923	0.49895	0.19952	0.19935	0.05866	0.05860

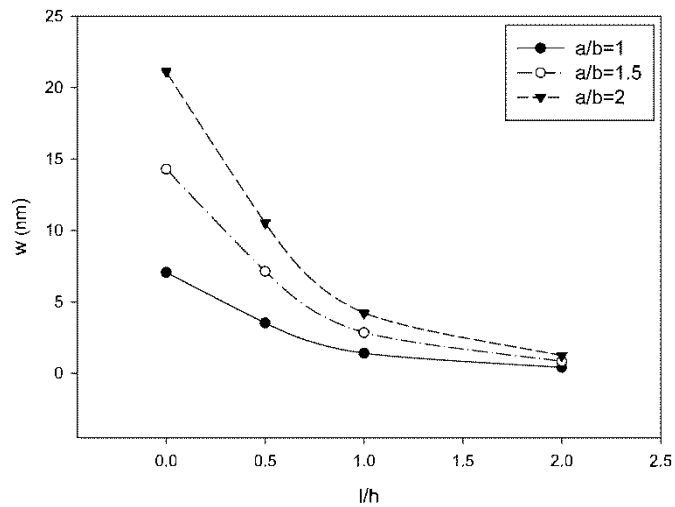


شکل ۱. مقایسه میزان خمش نانو صفحه‌های مختلف تحت اثر بار یکنواخت صفحه‌ای برای نسبت طول به عرض متفاوت

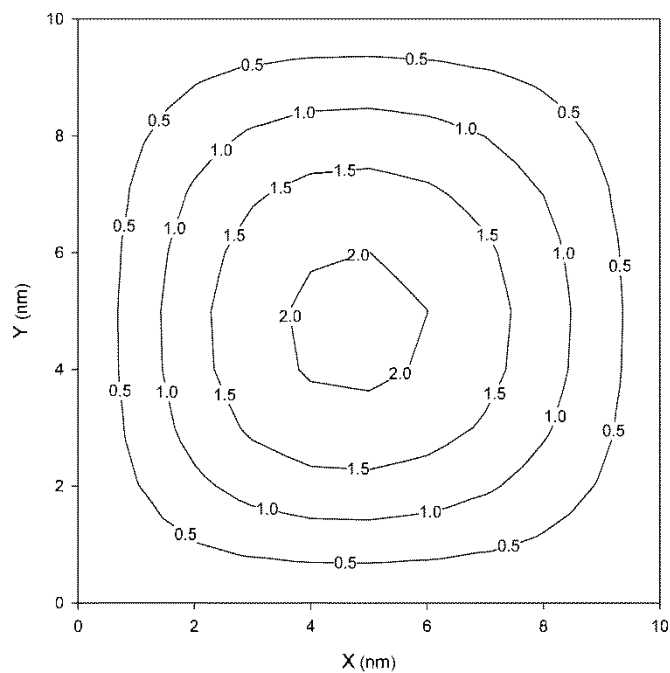
$$(a/h=30, q=1e-18 \text{ N/nm}^2, l/h=1)$$

جدول ۲. میزان خمش نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر بار یکنواخت صفحه‌ای برای نسبت طول به عرض و نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت ($a/h=30, q=1e-18 \text{ N/nm}^2$)

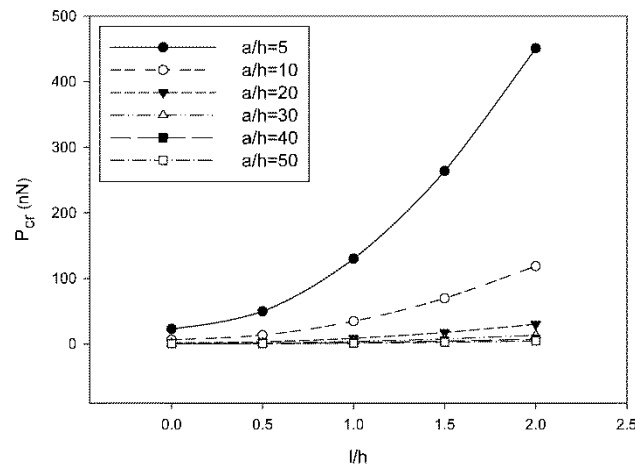
a/b	l/h			
	0	0.5	1	2
1	10.7837	5.3783	2.1483	0.6315
1.5	20.7713	10.3671	4.1428	1.2179
2	28.0010	13.9789	5.5868	1.6426



شکل ۲. میزان خمش نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر بار سینوسی برای نسبت طول به عرض و نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت ($a/h=30, q=1e-18 \text{ N/nm}^2$)



شکل ۳. کانتورهای خمش نانو صفحه مرتبه سوم ($a/h=30, q=1e-18 \text{ N/nm}^2, a/b=1, l/h=1$)



شکل ۴. مقایسه میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی دوجوره در جهت x , y برای نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت صفحه و طول به ضخامت متفاوت ($a/b=1$)

جدول ۳. مقایسه میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی تک محوره در جهت x برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و طول به ضخامت صفحه متفاوت ($a/b=1$)

a/h	l/h				
	0	0.5	1	1.5	2
5	46.0378	99.6890	260.2116	527.5054	901.6352
10	13.4331	27.4598	69.4801	139.4830	237.4772
20	3.5051	7.0497	17.6789	35.3919	60.1893
30	1.5706	3.1490	7.8834	15.7736	26.8197
40	0.8860	1.7744	4.4396	8.8813	15.0997
50	0.5678	1.1366	2.8429	5.6867	9.6679

جدول ۴. مقایسه میزان نیروی بحرانی کمانش بدون بعد نانوصفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی دوجوره در جهت x و y برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت ($a/b=1, l/h=1$)

a/h	Kirchhoff plate	Mindlin plate	Third order shear deformation plate	N order shear deformation plate ($n=5$)
5	5.0000	10.1594	5.6521	5.6937
10	5.0000	12.8101	5.1723	5.1826
20	5.0000	13.6820	5.0437	5.0463
30	5.0000	13.8568	5.0195	5.0206
40	5.0000	13.9191	5.0110	5.0116
50	5.0000	13.9481	5.0070	5.0074

۱۱. نتیجه گیری:

در این مقاله به بررسی خمش و کمانش نانو صفحه مرتبه سوم با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده پرداخته شد. همان گونه که در جداول و اشکال مشاهده شد، میزان خمش بدون بعد نانو صفحه مرتبه سوم تحت اثر بار سینوسی کمتر از بار یکنواخت صفحه‌ای می‌باشد. همچنین با افزایش پارامتر طول نسبت به ضخامت میزان خمش بدون بعد نانو صفحه کم می‌شود. و با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان خمش بدون بعد زیاد می‌شود. همچنین میزان خمش برای نانو صفحه کیرشهف کمترین مقدار و برای نانو صفحه مرتبه سوم بیشترین مقدار است. همچنین میزان نیروی بحرانی نانو صفحه مرتبه سوم تحت اثر نیروی تک‌محوره صفحه‌ای در جهت X، با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانو صفحه افزایش و با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش می‌یابد. همچنین نیرو بحرانی در حالت تک‌محوره به مراتب بیشتر از دومحوره می‌باشد.

۱۲. مراجع:

- [1] Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., Tong, P., " Couple stress Based Strain gradient theory for elasticity". Int.J.Solids Struct.39, pp. 2731–2743,(2002).
- [2] Toupin, R.A., "Elastic materials with couple stresses". Arch.Rational Mech.Anal.11, pp. 385–414,(1962).
- [3] Mindlin, R.D., Tiersten, H.F., " Effects of couple-stresses in linear elasticity" Arch. Rational Mech. Anal.11, pp. 415–448, (1962).
- [4] Koiter, W.T., "Couple stresses in the theory of elasticity", I and II. Proc .K. Ned. Akad .Wet.(B) 67, pp. 17–44,(1964).
- [5] Mindlin, R.D., "Micro-structure in linear elasticity". Arch.RationalMech.Anal. 16, pp. 51–78, (1964).
- [6] Tsiatas.G.C , "A new kirchhoff model based on a modified couple stress theory", International Journal of solids and structures, No.46, pp2757-2764,(2009)
- [7] Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X , "A size-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory", European Journal of mechanics A/Solids, No.30, pp 517-524, (2011)
- [8] Farajpour.A, Shahidi.A.R, Mohammadi.M, Mahzoon.M, "Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics, Composite Structures, No.94, pp 1605-1615,(2012).
- [9] Tai.T ,HoChoi.D , "size-dependent functionally graded kirchhoff and mindlin plate theory based on a modified couple stress theory", Composite Structures, No.95, pp142-153,(2013).
- [10] B.Akgoz, Omer Civalek "Free vibration analysis for single –layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory" materials and design No.42, pp 164-171, (2012)
- [11] Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X , "A size-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory", European Journal of mechanics A/Solids, No.30, pp 517-524, (2011)

[12] Tai.T ,HoChoi.D ,"*size-dependent functionally graded kirchhoff and mindlin plate theory based on a modified couple stress theory*",Composite Structures,No.95,pp142-153,(2013).

[13] B.Akgoz, Omer Civalek"*Free vibration analysis for single-layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory*"materials and design No.42,pp 164-171,(2012)

[14] Roque.C.M.C ,Ferreira.A.J.M ,Reddy.J.N,"*Analysis of mindlin micro plates with a modified couple stress theory and meshless method*",Applied Mathematical Modeling,No.37,pp 4626-4633,(2013).