تحلیل کمانش و ارتعاشات نانو صفحه کیرشهف مستطیلی با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده

مجید اسکندری شهرکی، دانشجوی دکتری مهندسی هوافضا دانشگاه فردوسی مشهد، Email: mjdeskandari@gmail.com
محمود شریعتی، استاد مهندسی مکانیک دانشگاه فردوسی مشهد
محسن حیدری بنی، دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی مالک اشتر
جعفر اسکندری جم، استاد مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی مالک اشتر

چکیده:

در این مقاله سعی بر آن است که با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده، مشخصه های کمانش و ارتعاشات نانو صفحه کیرشهف مستطیلی مطالعه شود. برای در نظر گرفتن آثار مقیاس کوچک از تئوری کوپل تنش اصلاح شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول میباشد و توسط یانگ در سال ۲۰۰۲ بیان گردید استفاده شده است. در تئوری کوپل تنش اصلاح شده،چگالی انرژی کرنشی تابعی از مولفه های تانسور کرنش،تانسور انحناء، تانسور تنش و قسمت متقارن تانسور تنش کوپل میباشد. بعد از به دست آوردن انرژی کرنشی، جنبشی، کار خارجی و معادله کمانش و قرار دادن آنها در معادله اصل همیلتن،معادلات اصلی و کمکی نانو صفحه به دست آورده می شود. سپس با جایگذاری شرایط مرزی و نیرویی در معادلات حاکم به بررسی کمانش و ارتعاشات نانو صفحه کیرشهف مستطیلی به ضخامت h با تکیه گاه ساده در اطراف پرداخته می شود. روش حل نیز روش ناویر می باشد. مشاهده گردید میزان نیروی بحرانی نانوصفحه کیرشهف تحت اثر نیروی دو محوره صفحه ای، با افزایش نسبت طول به ضخامت صفحه کاهش میابد.

کلمات کلیدی: تئوری تنش کوپل اصلاح شده ، روش حل ناویر ، صفحه کیرشهف، نانو صفحه مستطیلی

مقدمه:

برای مطالعه مواد در مقیاس کوچک مطمئن‌ترین روش آزمایش در مقیاس اتمی و مولکولی می‌باشد. در این روش نانوساختار در ابعاد واقعی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این روش برای تعیین خواص مکانیکی نانوساختارها از میکروسکوپ نیروی اتمی(AFM) برای اعمال بارهای مکانیکی مختلف بر روی نانوصفحات و اندازه‌گیری پاسخ استفاده می‌کنند. مشکلات اساسی در این روش دشواری کنترل بر شرایط آزمایش در این مقیاس و نیز هزینه های اقتصادی سنگین و نیز زمان‌بر بودن روش می‌باشد. از این رو از این روش تنها برای اعتبارسنجی روش‌های ساده و کم هزینه دیگر استفاده می‌شود.

شبیه‌سازی اتمی راه حل دیگری در مطالعه ساختارها در مقیاس کوچک می‌باشد. در این روش رفتار اتم‌ها و مولکول‌ها با در نظر گرفتن اثر بین مولکولی و بین اتمی بر حرکت آنها که در نهایت تغییر فرم کل جسم را شامل میشود، مورد بررسی قرار می‌گیرد. استفاده از این روش هنگامی که مسئله دارای تغییر شکل بزرگ می‌باشد و یا مقیاس بزرگ‌تر از یک یا چند اتم باشد، هزینه محاسباتی بسیار زیادی داشته و مقرون به صرفه نیست. بنابراین، از این روش تنها برای مسائل با تغییر شکل کوچک استفاده می‌شود.

با توجه به محدودیت‌های مطرح‌شده در روش‌های فوق برای مطالعه نانوساختارها، محققین به دنبال راهکارهای ساده تر

در بررسی نانوساختارها بوده‌اند. مدل‌سازی ساختارهای در مقیاس کوچک، با استفاده از مکانیک محیط پیوسته راه حل دیگری در مطالعه این مواد می‌باشد. تئوری‌های محیط پیوسته‌ی وابسته به اندازه متنوعی وجود دارند که آثار اندازه را در نظر گرفته‌اند از جمله: تئوری میکرومورفیک، تئوری میکروساختار، تئوری میکروپولار، تئوری کوسرات، تئوری غیرموضعی، تئوری کوپل تنش اصلاح شده،تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی که اینها گسترش یافته‌ی تئوری‌های میدانی کلاسیک هستند که در آنها آثار اندازه گنجانده شده است.

تئوری کوپل تنش اصلاح شده:

یانگ وهمکارانش[۱] در سال ۲۰۰۲ با اصلاح کردن تئوری کوپل تنش که توسط توپین[۲]،میندلین و تیرستن[۳] ، کویتر[۴] و میندلین[۵]در سال ۱۹۶۴ ارائه شد،یک مدل کوپل تنش اصلاح شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول ماده[1]برای تصویر کردن اثر اندازه میباشد را پیشنهاد کردند،در حالیکه تئوری کوپل تنش کلاسیک دارای دو پارامتر مقیاس طول ماده است.

در تئوری کوپل تنش اصلاح شده،چگالی انرژی کرنشی در مختصات قائم سه بعدی برای جسمی که محدود به حجم V و سطح Ω میباشد به صورت زیر بیان میشود[۶] :

$$U = \frac{1}{2}\int_{V}\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}\chi_{ij}\right)dV \quad i,j = 1,2,3 \qquad (۱)$$

که در آن:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad (۲)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}\right) \qquad (۳)$$

χ_{ij} و ε_{ij} به ترتیب قسمت متقارن تانسور انحنا[2]و تانسور کرنش[3]هستند. u_i و θ_i به ترتیب بردار جابه جایی[4] و بردار چرخشی[5] تعریف شده اند.

$$\theta = \frac{1}{2}\, Curl\, \boldsymbol{u} \qquad (٤)$$

σ_{ij} و m_{ij} به ترتیب تانسور تنش و قسمت انحرافی تانسور کوپل تنش[6]هستند که به صورت زیر تعریف میباشند:

---

[1]Material length scale parameter
[2]Symmetric part of the curvaturetensor
3 Strain tensor
4Displacement vector
5Rotation vector
6Deviatoric part of the couple stress tensor

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{۵}$$

$$m_{i,j} = 2\mu\, l^2 \chi_{ij} \tag{٦}$$

که در آن λ و μ ثوابت لامه، δ_{ij} دلتای کرونکر و l پارامتر مقیاس طول ماده میباشد.از معادله (۳) و (۶) میتوان دریافت که χ_{ij} و m_{ij} متقارن هستند.

مدل صفحه کیرشهف:

معادلات جابه جایی برای صفحه کیرشهف به صورت زیر تعریف میشوند:

$$u_1(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial x}$$
$$u_2(x,y,x,t) = -z\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial y}$$
$$u_3(x,y,z,t) = w(x,y,t) \tag{۷}$$

که در آن w میزان جابه جایی نقطه میانی صفحه درراستای محور های z می باشد.قسمت متقارن تانسور انحنا[1] و تانسور کرنش و تنش و بردار چرخشی برای مدل صفحه کیرشهف به صورت زیر میباشد:

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{۸}$$

$$\varepsilon_{yy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{۹}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{۱۰}$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0 \tag{۱۱}$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \tag{۱۲}$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \tag{۱۳}$$

1Symmetric part of the curvaturetensor

$$\theta_z = 0 \quad (۱۴)$$

$$x_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \quad (۱۵)$$

$$x_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \quad (۱۶)$$

$$x_{xy} = x_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (۱۷)$$

$$x_{xz} = x_{zx} = x_{yz} = x_{zy} = x_{zz} = 0 \quad (۱۸)$$

$$\sigma_{xx} = -(\lambda + 2\mu)\left(z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \lambda\left(z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (۱۹)$$

$$\sigma_{yy} = -\lambda\left(z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - (\lambda + 2\mu)\left(z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (۲۰)$$

$$\sigma_{zz} = -\lambda z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (۲۱)$$

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} = -2\mu\left(z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \quad (۲۲)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0 \quad (۲۳)$$

تغییرات انرژی کرنشی به صورت زیر بیان میشود:

$$\delta U = \int_V \sigma_{xx}\, \delta\, \mathcal{E}_{xx} + \sigma_{yy}\, \delta \mathcal{E}_{yy} + 2\sigma_{xy}\, \delta\, \mathcal{E}_{xy} + 2\sigma_{xz}\, \delta\, \mathcal{E}_{xz} + 2\sigma_{yz}\, \delta\, \mathcal{E}_{yz} + m_{xx}\, \delta\, x_{xx} + m_{yy}\, \delta x_{yy} + m_{zz}\, \delta x_{zz} + 2m_{xy}\, \delta x_{xy} + 2m_{xz}\, \delta x_{xz} + 2m_{yz}\, \delta\, x_{yz})dV \quad (۲۴)$$

می توان جهت ساده نویسی ضرایب متغیرها را از F_1 تا F_3 مطابق معادله (۲۵) نامگذاری کرد و آنها را جداگانه به دست آورد.

$$\delta U = \int_V (F_1 \delta w_{,xx} + F_2\, \delta w_{,yy} + F_3\, \delta w_{,xy})dV \quad (۲۵)$$

که در آن

$$F_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}[(\lambda + 2\mu)z^2 + \mu l^2] + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(\lambda z^2 - \mu l^2) \quad (۲۶)$$

$$F_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}[(\lambda + 2\mu)z^2 + \mu l^2] + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\lambda z^2 - \mu l^2) \qquad (۲۷)$$

$$F_3 = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(4\mu z^2 + 4\mu l^2) \qquad (۲۸)$$

نیروی کمانش:

برای صفحه مستطیلی به طول a و عرض b و ضخامت h با نیروهای محورهای P_{xy}, P_y, P_x که در آن:

P_x: نیروی محوری در راستای x و P_y: نیروی محوری در راستای y وP_{xy}: نیروی برشی صفحهxy و q(x,y) نیروی خارج صفحه ای می باشد.معادله نیروی کمانش به صورت زیر خواهد بود[۷و۸]:

$$P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, y) \qquad (۲۹)$$

معادله کارمجازی[۹]:

کارمجازی که توسط نیروی خارجی انجام می گیرد شامل سه بخش است:

۱-کار مجازی که توسط نیروهای حجمی (force body) انجام می گیرد که روی $V = \Omega * \left(-{}^{h}/_{2}, {}^{h}/_{2}\right)$ انجام میگیرد.

۲-کار مجازی که توسط نیروی برشی صفحه ای (surface tractions)در سطوح بالایی و پایینی(Ω)انجام می گیرد.

۳-کار مجازی که توسط نیروی برشی صفحه ای (surfacetraction) و بر روی سطوح جانبی $S = \Gamma * \left(-{}^{h}/_{2}, {}^{h}/_{2}\right)$ انجام می گیرد. که Ω صفحه میانی ورق وΓ محیط میانی ورق می باشد.

اگر (f_x, f_y, f_z) را نیروی حجمی (forcebody) و (c_x, c_y, c_z)را ممان حجمی (body couple) و (q_x, q_y, q_z) نیروهایی باشند که بروی سطح Ω عمل می کنند و(t_x, t_y, t_z) تنش برشی کوشی (Cauchy tractions) و (S_x, S_y, S_z) ممان سطح (Surface couple) باشند. در این صورت تغییرات (Variation) کارمجازی به صورت زیر می باشد:

$$\delta w=-\Big[\iint_{\Omega}(f_x\delta u+f_y\delta V+f_z\delta w+q_x\delta u+q_y\delta V+q_z\delta w+c_x\delta\theta_x+c_y\,\delta\theta_y+c_z\delta\theta_z)\,dx\,dy+\int_{\Gamma}(t_x\delta u+t_y\delta V+t_z\delta w+s_x\theta_x+s_y\delta\theta_y+s_z\delta\theta_z)d\Gamma\Big] \tag{۳۰}$$

با توجه به اینکه در این تحقیق فقط نیروی خارجی q_z اعمال شده است کار مجازی به صورت :

$$\delta w=\int_0^a\int_0^b q(x,y)\delta w(x,y)dx\,dy \tag{۳۱}$$

می باشد. تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر بیان میشود:

$$\delta T=\int_A\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(\dot{u}_1\delta\dot{u}_1+\dot{u}_2\delta\dot{u}_2+\dot{u}_3\delta\dot{u}_3)dA\,dz \tag{۳۲}$$

$$=\int_A\left[\rho h\dot{w}\delta\dot{w}+\frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial\dot{w}}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{w}}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}}{\partial y}\right)\right]dA$$

که ρ چگالی می باشد. همچنین با استفاده از اصل همیلتن داریم[۱۰] :

$$\int_0^T\big(\delta T-(\delta U-\delta w)\big)dt=0 \tag{۳۳}$$

که در آن T انرژی جنبشی ، U انرژی کرنشی و W کارنیروهای خارجی می باشد.

معادله نهایی صفحه با اعمال نیروی کمانش و نیروی خارجی:

با به کارگیری اصل هملتین (معادله ۳۳) معادله اصلی مطابق زیر به دست می آیند:

$$\left[\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{\partial^2F_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F_3}{\partial x\partial y}\right)dz\right]+P_x\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+2P_{xy}\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}+P_y\frac{\partial^2w}{\partial y^2}=q(x,y)+\rho h\,\ddot{w}-\frac{\rho h^3}{12}\nabla^2\ddot{w} \tag{۳۴}$$

به دست آوردن معادلات صفحه کیرشهف در کلی ترین حالت:

با در نظر گرفتن مقادیر زیر:

$$A_1 = (\lambda + 2\mu)I_2 + \mu l^2 h \qquad (۳۵)$$

$$I_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z^i \; dz \qquad (۳۶)$$

معادلات کلی صفحه کیرشهف به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x,y) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2}\right) \qquad (۳۷)$$

روش حل ناویر:

روش حل ناویر برای صفحات مستطیلی با شرایط مرزی تکیه گاه ساده در همه لبه ها قابل استفاده است . به خاطر اینکه شرایط مرزی خود به خود در این روش ارضا می شوند توابع مجهول سطح میانی صفحه به صورت سری های دوگانه مثلثاتی به صورت زیر بیان می شوند [۱۲و۱۱]:

$$W(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \; e^{i\omega t} \qquad (۳۸)$$

نیرو نیز از رابطه زیر قابل محاسبه می باشد:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \; e^{i\omega t} \qquad (۳۹)$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) sin\alpha x \sin \beta y \; dx \; dy \qquad (۴۰)$$

$$Q_{mn}=\begin{cases} q_0 & \text{برای نیروی سینوسی} \\ \dfrac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{برای نیروی یکنواخت} \\ \dfrac{4Q_0}{ab} & \text{برای نیروی نقطه در مرکز صفحه} \end{cases} \tag{٤١}$$

که در آن:

$$\alpha=\frac{\pi m}{a}\ \ ,\ \beta=\frac{\pi n}{b}\ ,\ i=\sqrt{-1} \tag{٤٢}$$

شرایط مرزی تکیه گاه ساده نیز توسط روش ناویر طبق معادلات ذیل ارضاء می شوند :

$$\begin{matrix} x=0\ \text{در} \\ , \\ x=a \end{matrix}\begin{cases} w(0,y)=w(a,y)=\sum\sum w_{mn}\sin\dfrac{m\pi}{a}\ x\sin\dfrac{n\pi}{b}\ y=0 \\ \varphi_y(0,y)=\varphi_y(a,y)=\sum\sum y_{mn}\sin\dfrac{m\pi}{a}\ x\cos\dfrac{n\pi}{b}\ y=0 \end{cases} \tag{٤٣}$$

$$\begin{matrix} y=0\ \text{در} \\ , \\ y=b \end{matrix}\begin{cases} w(x,0)=w(x,b)=\sum\sum w_{mn}\sin\dfrac{m\pi}{a}\ x\sin\dfrac{n\pi}{b}\ y=0 \\ \varphi_x(x,0)=\varphi_x(x,b)=\sum\sum X_{mn}\cos\dfrac{m\pi}{a}\ x\sin\dfrac{n\pi}{b}\ y=0 \end{cases} \tag{٤٤}$$

به دست آوردن ماتریس معادلات صفحه کیرشهف در کلی ترین حالت:

پس از حل به کمک روش ناویر و نامگذاری ضرایب متغیرهای معادلات به صورت زیر خواهیم داشت:

$$w_{mn}\left(A_1\alpha^4+A_1\beta^4+2A_1\alpha^2\beta^2-P_x\alpha^2-P_y\beta^2\right)\ =Q_{mn}-\rho h w_{mn}\,\omega^2-\frac{\rho h^3}{12}w_{mn}\alpha^2\,\omega^2-\frac{\rho h^3}{12}w_{mn}\,\beta^2\omega^2 \tag{٤٥}$$

ماتریس کلی معادلات صفحه کیرشهف به همراه معادلات کمکی به شکل زیر حاصل خواهند شد:

$$([N_1]-\omega^2[K_1])\,[w_{mn}]\ =[Q_{mn}] \tag{٤٦}$$

که در آن:

$$N_1=A_1\alpha^4+A_1\beta^4+2A_1\alpha^2\beta^2-P_x\alpha^2-P_y\beta^2 \tag{٤٧}$$

$$K_1 = -\rho h - \frac{\rho h^3}{12}\alpha^2 - \frac{\rho h^3}{12}\beta^2 \quad (٤٨)$$

جنس صفحه را مواد مختلفی از جمله اپوکسی، گرافن، مس و ... در نظر می گیرند. در این مقاله جنس صـفحه را گـرافن در نظر میگیریم.یک صفحه گرافن تک لایه دارای خصوصیات زیر است[۱۳]:

$$\mathrm{E} = 1.06TPa, \nu = 0.25\ , h = 0.34nm, \rho = 2250\ {}^{kg}/_{m^3}$$

همچنین رابطه بینνو μ و Eرا می توان به صورت زیر نوشت:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (٤٩)$$

که در آن E مدول یانگ و λ و μ ضرایب لامه هستند[۱۴]. همچنین مقدار نیرو را $\mathrm{q} = {}^{1\mathrm{N}}/_{\mathrm{m}^2}$ در نظر میگیریم.

نتایج و بحث:

برنامه محاسباتی در نرم افزار Matlab نوشته شده و نتایج با استفاده از این برنامه به دست آمده اند.کلیه شرایط مرزی نیز به صورت تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده اند.

شکل(۱) نشان میدهد میزان نیروی بحرانی نانوصفحه کیرشهف تحت اثر نیروی دو محوره صفحه ای در جهـت xوy ،بـا افزایش نسبت طول به ضخامت صفحه کاهش میابد.همچنین هنگامی که اثر پارامتر اندازه در نظر گرفته نشـود(تئوری کلاسـیک) مقدار نیروی بحرانی کمترین مقدار است و با افزایش اثر اندازه نیروی بحرانی نیز افزایش پیدا میکند.

شکل(۲) نشان میدهد میزان نیروی بحرانی نانوصفحه کیرشهف تحت اثر نیروی دو محوره صفحه ای در جهت xوy بـرای مودهای متفاوت،با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانو صفحه افزایش میابد. همچنین میزان نیروی بحرانـی بـرای مود اول کمترین مقدار است و برای مودهای بعدی به ترتیب بیشتر میشود.

جدول (۱) به مقایسه میزان نیروی بحرانی نانوصفحات مختلف تحت اثر نیروی دو محوره برای نسبت طول به ضـخامت صفحه متفاوت می پردازد. همانطور که میبینیم میزان نیروی بحرانی نانوصفحه مرتبه سوم کمترین مقدار و نانو صفحه میندلین بیشترین مقدار است.

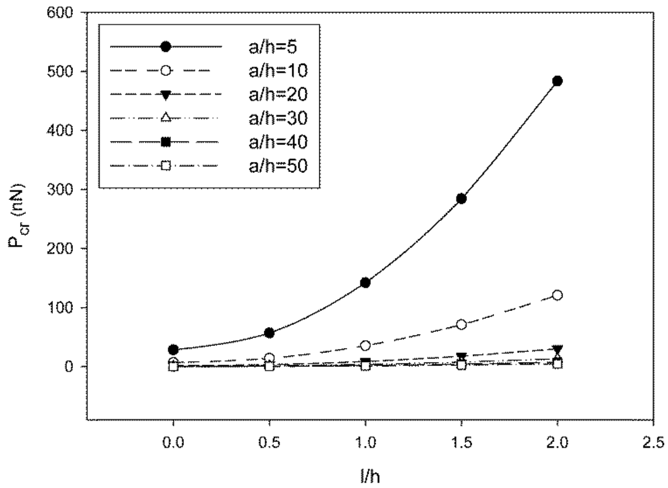
جدول (۲) به مقایسه میزان نیروی بحرانی نانوصفحات مختلف تحت اثر نیروی تک محوره برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت می پردازد. همانطور که میبینیم میزان نیروی بحرانی نانوصفحه مرتبه سوم کمترین مقدار و نانو صفحه میندلین بیشترین مقدار است.

با مقایسه جدول (۱) و جدول (۲) در میابیم که نیروی بحرانی تک محوره بیشتر از نیروی بحرانی دو محوره نـانو صـفحه کیرشهف است.

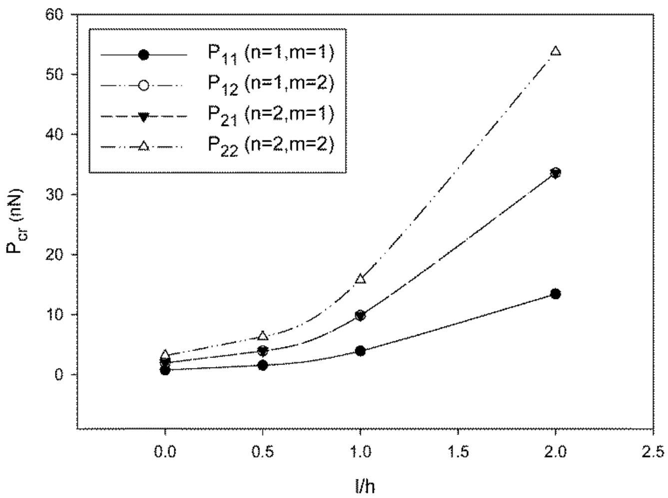
شکل های (۳) تا (۶) نشان میدهند فرکانسهای مود های مختلف $(\omega_{11}-\omega_{12}-\omega_{21}-\omega_{22})$ نانو صفحه کیرشهف با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه کاهش می‌یابد. همچنین هنگامی که اثر پارامتر اندازه در نظر گرفته نشود(تئوری کلاسیک) میزان فرکانس ، کمترین میزان است و با افزایش اثر اندازه، فرکانس نیز افزایش پیدا میکند. همچنین میزان فرکانس برای مود اول کمترین مقدار است و برای مودهای بعد افزایش پیدا می کند.

جدول (۳) نشان میدهد فرکانس مود های مختلف $(\omega_{11}-\omega_{12}-\omega_{21}-\omega_{22})$ نانو صفحه کیرشهف با افزایش نسبت ابعاد صفحه کاهش میابد.

جداول (۴) و (۵) فرکانس مود های مختلف $(\omega_{11}-\omega_{12}-\omega_{21}-\omega_{22})$ را برای نانو صفحات مختلف نشان میدهند. طبق جداول به غیر از حالت کلاسیک $(l=0)$ میزان فرکانس نانو صفحه میندلین بیشترین مقدار است.



شکل ۱ : میزان نیروی بحرانی نانوصفحه کیرشهف تحت اثر نیروی دو محوره در جهت x ,y برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت (a/b=1)



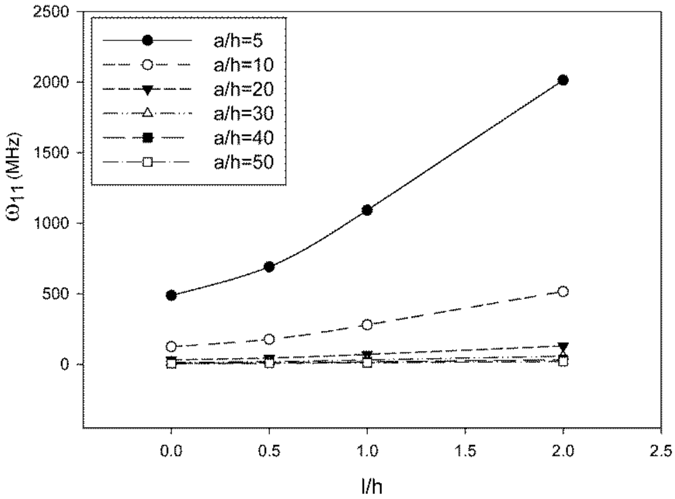
شکل ۲ : میزان نیروی بحرانی نانوصفحه کیرشهف برای مودهای مختلف تحت اثر نیروی دو محوره در جهت x ,y برای نسبت پارامتر طول به ضخامت صفحه متفاوت (a/b=1,a/b=1)

جدول ۱ : میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحات مختلف تحت اثر نیروی دو محوره در جهت xوy برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت (l/h=1، a/b=1)

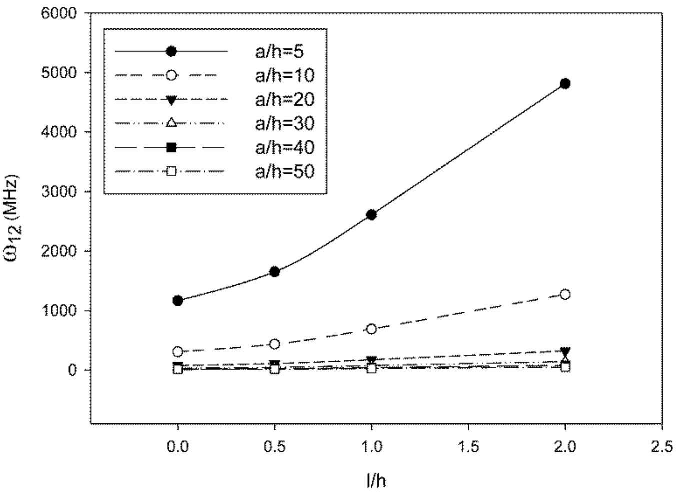
a/h	*Kirchhoff plate*	*Mindlin plate*	*Third order shear deformation plate*	*N order shear deformation plate (n=5)*
5	142.2802	233.7327	130.1058	131.5295
10	35.5701	86.0362	34.7400	34.8479
20	8.8925	23.9784	8.8394	8.8465
30	3.9522	10.8814	3.9417	3.9431
40	2.2231	6.16595	2.2198	2.2202
50	1.4228	3.9597	1.4214	1.4216

جدول ۲ : میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحات مختلف تحت اثر نیروی تک محوره در جهت x برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت (l/h=1، a/b=1)

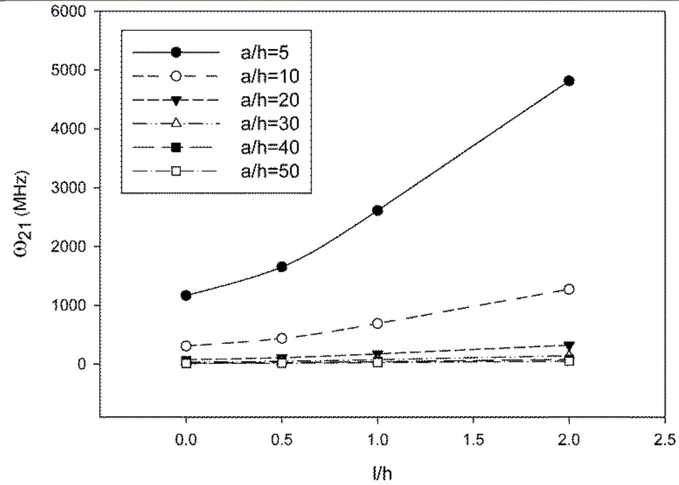
a/h	*Kirchhoff plate*	*Mindlin plate*	*Third order shear deformation plate*	*N order shear deformation plate (n=5)*
5	284.5604	467.4653	260.2116	263.0590
10	71.1401	172.0725	69.4801	69.6959
20	17.7850	47.9569	17.6789	17.6930
30	7.9045	21.7629	7.8834	7.8862
40	4.4463	12.3319	4.4396	4.4405
50	2.8456	7.9194	2.8429	2.8432



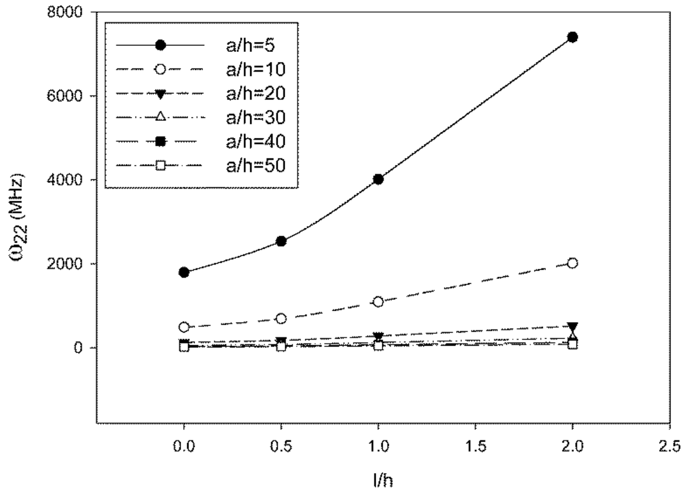
شکل ۳ : مقایسه فرکانسهای مود (ω_{11}) برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه کیرشهف (a/b=1)



شکل ۴ : مقایسه فرکانسهای مود (ω_{12}) برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه کیرشهف (a/b=1)



شکل ۵ : مقایسه فرکانسهای مود (ω_{21}) برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه کیرشهف (a/b=1)



شکل ۶ : مقایسه فرکانسهای مود (ω_{22}) برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه کیرشهف (a/b=1)

جدول ۳ : مقایسه فرکانس مودهای مختلف برای صفحه کیرشهف برای نسبت پارامتر طول به ضخامت صفحه متفاوت (a/h=30)

Mode	l/h			
	0	0.5	1	2
	a/b=1			
ω_{11}	13.9886	19.7828	31.2794	57.6764
ω_{12}	34.9237	49.3895	78.0917	143.9940
ω_{21}	34.9237	49.3895	78.0917	143.9940
ω_{22}	55.8018	78.9157	124.7766	230.0767
	a/b=1.5			
ω_{11}	10.1054	14.2912	22.5964	41.6657
ω_{12}	19.4217	27.4664	43.4282	80.0777
ω_{21}	31.0511	43.9129	69.4324	128.0271
ω_{22}	40.3420	57.0522	90.2074	166.3343
	a/b=2			
ω_{11}	8.7459	12.3685	19.5563	36.0601
ω_{12}	13.9886	19.7828	31.2794	57.6764
ω_{21}	29.6953	41.9954	66.4006	122.4367
ω_{22}	34.9237	49.3895	78.0917	143.9940

جدول ۴ : مقایسه فرکانس مودهای مختلف برای صفحات مختلف برای نسبت پارامتر طول به ضخامت صفحه متفاوت
(a/h=30, a/b=2)

Mode	l/h			
	0	0.5	1	2
	Third order shear deformation plate			
ω_{11}	8.7284	12.3536	19.5411	36.0389
ω_{12}	13.9441	19.7447	31.2407	57.6223
ω_{21}	29.4967	41.8251	66.2277	122.1954
ω_{22}	34.6497	49.1546	77.8533	143.6613
	Kirchhoff plate			
ω_{11}	8.7459	12.3685	19.5563	36.0601
ω_{12}	13.9886	19.7828	31.2794	57.6764
ω_{21}	29.6953	41.9954	66.4006	122.4367
ω_{22}	34.9237	49.3895	78.0917	143.9940

	Mindlin plate			
ω_{11}	8.7280	17.9862	32.5528	62.6001
ω_{21}	13.9429	28.7266	051.9052	99.1252
ω_{12}	29.4914	60.7224	109.1821	204.2795
ω_{22}	34.6425	71.3140	128.0217	237.9174

جدول ۵ : مقایسه فرکانس مودهای مختلف برای صفحات مختلف برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت (l/h=1, a/b=1.5)

Mode	*a/h*		
	20	30	40
	Mindlin plate		
ω_{11}	83.8680	37.5829	21.2022
ω_{12}	159.1488	071.8354	40.6324
ω_{21}	250.5691	114.0783	64.7336
ω_{22}	321.6951	147.4292	83.8680
	Kirchhoff plate		
ω_{11}	50.8001	22.5964	12.7141
ω_{12}	97.5592	43.4282	24.4419
ω_{21}	155.8295	69.4324	39.0903
ω_{22}	202.3037	90.2074	50.8001
	Third order shear deformation plate		
ω_{11}	50.6984	22.5761	12.7077
ω_{21}	97.1889	43.3538	24.4182
ω_{12}	154.8989	69.2435	39.0300
ω_{22}	200.7540	89.8902	50.6984

نتیجه گیری:

در این مقاله به بررسی کمانش و ارتعاشات نانو صفحه کیرشهف با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده پرداخته شد. همانگونه که در جداول و اشکال دیدیم میزان نیروی بحرانی نانوصفحه کیرشهف تحت اثر نیروی دو محوره صفحه ای در جهت xوy ،با افزایش نسبت طول به ضخامت صفحه کاهش میابد. همچنین هنگامی که اثر پارامتر اندازه در نظر گرفته نشود(تئوری کلاسیک) مقدار نیروی بحرانی کمترین مقدار است و با افزایش اثر اندازه نیروی بحرانی نیز افزایش پیدا میکند. همچنین میزان نیروی بحرانی برای مود اول کمترین مقدار است و برای مودهای بعدی به ترتیب بیشتر میشود و میزان نیروی بحرانی نانوصفحه

مرتبه سوم کمترین مقدار و نانو صفحه میندلین بیشترین مقدار است. ضمناً فرکانسهای مود های مختلف $\omega_{11} - \omega_{12} -$ ($\omega_{22} - \omega_{21}$) نانو صفحه کیرشهف با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه کاهش می‌یابد. همچنین هنگامی که اثر پارامتر اندازه در نظر گرفته نشود(تئوری کلاسیک) میزان فرکانس ، کمترین میزان است و با افزایش اثر اندازه، فرکانس نیز افزایش پیدا میکند. میزان فرکانس برای مود اول کمترین مقدار است و برای مودهای بعد افزایش پیدا می کند. فرکانس مود های مختلف نانو صفحه کیرشهف نیز با افزایش نسبت ابعاد صفحه کاهش میابد.

مراجع:

[1] **Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., Tong, P.**," Couple stress Based Strain gradient theory for elasticity".Int.J.Solids Struct.39, pp. 2731–2743,(2002).

[2] Toupin, R.A.,"Elastic materials with couple stresses".Arch.Rational Mech.Anal.11, pp. 385–414**,(1962).**

[3] **Mindlin, R.D., Tiersten, H.F**.," Effects of couple-stresses in linear elasticity" Arch. Rational Mech. Anal.11, pp. 415–448, **(1962).**

[4] **Koiter, W.T.**,"Couple stresses in the theory of elasticity",I and II.Proc .K. Ned. Akad .Wet.(B) 67,pp. 17–44**,(1964).**

[5] **Mindlin, R.D**.,"Micro-structure in linear elasticity".Arch.RationalMech.Anal .16, pp. 51–78, **(1964).**

[6] **Tsiatas.G.C** ,"A new kirchhoff model based on a modified couple stress theory",International Journal of solids and structures,No.46, pp2757-2764,**(2009)**

[7**] Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X** ,"Asize-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory",European Journal of mechanics A/Solids, No.30,pp 517-524, **(2011)**

[8]**Farajpour.A,Shahidi.A.R,Mohammadi.M,Mahzoon.M**,"Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics,Composite Structures,No.94, pp 1605-1615**,(2012).**

[9] **Tai.T ,HoChoi.D** ,"size-dependent functionally graded kirchhoff and mindlin plate theory based on a modified couple stress theory",Composite Structures,No.95,pp142-153**,(2013).**

[10] **B.Akgoz, Omer Civalek**”Free vibration analysis for single –layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory”materials and design No.42,pp 164-171, **(2012)**

[11] **Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X** ,"Asize-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory",European Journal of mechanics A/Solids, No.30,pp 517-524, **(2011)**

[12] **Tai.T ,HoChoi.D** ,"size-dependent functionally graded kirchhoff and mindlin plate theory based on a modified couple stress theory",Composite Structures,No.95,pp142-153**,(2013).**

[13] **B.Akgoz, Omer Civalek**”Free vibration analysis for single –layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory”materials and design No.42,pp 164-171**,(2012)**

[14] **Roque.C.M.C ,Ferreira.A.J.M ,Reddy.J.N**,"Analysis of mindlin micro plates with a modified couple stress theory and meshlessmethod",Applied Mathematical Modeling,No.37,pp 4626-4633**,(2013).**

Buckling and vibration analysis of rectangular kirchhoff nanoplate based on modified couple stress theory

Majid Eskandari Shahraki,Ph.D Student of Ferdowsi University of Mashhad
Mahmoud Shariati, , Professor of Ferdowsi University of Mashhad
Mohsen Heydari Beni, Ph.D Student of Malek-Ashtar University of Technology
Jafar Eskandari Jam, Professor of Malek-Ashtar University of Technology

Abstract:

In this paper a kirchhoff plate model is developed for the,buckling and vibration analysis of graphene nano plate based on a modified couple stress theory. Various plate theories have been suggested over the years that the main differences are in the inclusion effect of shear deformation and rotational inertia in their formulation. In this article, to consider the small-scale effects, the modified couple stress theory is used that included only one length scale parameter and proposed by Young in 2002. After obtaining the strain energy, kinetic energy, external work and buckling equation and put them in the Hamilton' principle , main and auxiliary equations of nano plate are obtained .All edges simply supported boundry conditions is considered and Navier approach is used to solve for buckling and vibration of isotropic single- layered grapheme sheets. It was observed that the critical load of the Kirchhoff plate decreases with increasing the length-to-thickness ratio of the plate.

Keywords: Modified couple stress theory, Kirchhoff plate ,rectangular nanoplate , Navier type solution