

بررسی خمش، کمانش و ارتعاشات وابسته به اندازه در نانو صفحه گرافنی مرتبه n ام با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده

مجید اسکندری شهرکی^۱، محمود شریعتی^۲، محمدرضا زمانی^۳، محسن زارع تبار^۴، محسن حیدری بنی^۵، جعفر اسکندری جم^۶

^۱ دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران. mjdeskandari@gmail.com

^۲ استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران. mshariati44@gmail.com

^۳ استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران. a_mrzamani@mut.ac.ir

^۴ دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران. zaretabar.mohsen@gmail.com

^۵ دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران. mohsenheydari1371@gmail.com

^۶ استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران. eskandari@mut.ac.ir

چکیده

در این مقاله سعی بر آن است که با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده، مشخصه های خمش، کمانش و ارتعاشات نانو صفحه مرتبه n ام مستطیلی با شرایط تکیه گاهی ساده مطالعه شود. برای در نظر گرفتن آثار مقیاس کوچک از تئوری کوپل تنش اصلاح شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول استفاده شده است. در تئوری کوپل تنش اصلاح شده، چگالی انرژی کرنشی تابعی از مولفه های تانسور کرنش، تانسور انحناء، تانسور تنش و قسمت متقارن تانسور تنش کوپل می باشد. بعد از به دست آوردن انرژی کرنشی، کار خارجی و معادله کمانش و قرار دادن آنها در معادله اصل همیلتون، معادلات اصلی و کمکی نانو صفحه به دست آورده می شود. سپس با جایگذاری شرایط مرزی و نیرویی در معادلات حاکم به بررسی خمش، کمانش و ارتعاشات نانو صفحه مرتبه n ام مستطیلی به ضخامت h با تکیه گاه ساده در اطراف می پردازیم. روش حل نیز روش ناویر می باشد.

واژه های کلیدی

تئوری تنش کوپل اصلاح شده، نانو صفحه مرتبه n ام، روش حل ناویر

مقدمه

برای مطالعه مواد در مقیاس کوچک مطمئن ترین روش آزمایش در مقیاس اتمی و مولکولی می باشد. در این روش نانو ساختار در ابعاد واقعی مورد مطالعه قرار می گیرد. در این روش برای تعیین خواص مکانیکی نانو ساختارها از میکروسکوپ نیروی اتمی (AFM) برای اعمال بارهای مکانیکی مختلف بر روی نانوصفحات و اندازه گیری پاسخ استفاده می کنند. مشکلات اساسی در این روش دشواری کنترل بر شرایط آزمایش در این مقیاس و نیز هزینه های اقتصادی

سنگین و نیز زمان بر بودن روش می باشد. از این رو از این روش تنها برای اعتبارسنجی روش های ساده و کم هزینه دیگر استفاده می شود.

شبه سازی اتمی راه حل دیگری در مطالعه ساختارها در مقیاس کوچک می باشد. در این روش رفتار اتمها و مولکولها با در نظر گرفتن اثر بین مولکولی و بین اتمی بر حرکت آنها که در نهایت تغییر فرم کل جسم را شامل میشود، مورد بررسی قرار می گیرد. استفاده از این روش هنگامی که مسئله دارای تغییر شکل بزرگ می باشد و یا مقیاس بزرگ تر از یک یا چند اتم باشد، هزینه محاسباتی بسیار زیادی داشته و مقرون به صرفه نیست. بنابراین، از این روش تنها برای مسائل با تغییر شکل کوچک استفاده می شود. با توجه به محدودیت های مطرح شده در روش های فوق برای مطالعه نانو ساختارها، محققین به دنبال راهکارهای ساده تر در بررسی نانو ساختارها بوده اند. مدل سازی ساختارهای در مقیاس کوچک، با استفاده از مکانیک محیط پیوسته راه حل دیگری در مطالعه این مواد می باشد. تئوری های محیط پیوسته وابسته به اندازه متنوعی وجود دارند که آثار اندازه را در نظر گرفته اند از جمله: تئوری میکرومورفیک، تئوری میکروساختار، تئوری میکروبولار، تئوری کوسرات، تئوری غیرموضعی، تئوری کوپل تنش اصلاح شده، تئوری الاستیسیته گرادین کرنشی که اینها گسترش یافته ی تئوری های میدانی کلاسیک هستند که در آنها آثار اندازه گنجانده شده است.

تئوری کوپل تنش اصلاح شده:

یانگ وهمکارانش [۱] در سال ۲۰۰۲ با اصلاح کردن تئوری کوپل تنش که توسط توپین [۲]، میندیلین و تیرستن [۳] ارائه شد، یک مدل کوپل تنش اصلاح شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول ماده برای تصویر کردن اثر اندازه میباشد را پیشنهاد کردند، در حالیکه تئوری کوپل تنش کلاسیک دارای دو پارامتر مقیاس طول

که در آن Φ_x و Φ_y چرخش بردار نرمال حول محور X و Y و W میزان جابه جایی نقطه میانی صفحه در راستای محور Z می باشد.

تغییرات انرژی کرنشی نیز به صورت زیر بیان می شود:

$$\delta U = \int_V \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \epsilon_{xy} + 2\sigma_{xz} \delta \epsilon_{xz} + 2\sigma_{yz} \delta \epsilon_{yz} + m_{xx} \delta x_{xx} + m_{yy} \delta x_{yy} + m_{zz} \delta x_{zz} + 2m_{xy} \delta x_{xy} + 2m_{xz} \delta x_{xz} + 2m_{yz} \delta x_{yz} dV \quad (8)$$

نیروی کمانش

برای صفحه مستطیلی به طول a و عرض b و ضخامت h با نیروهای محوره های P_x, P_y, P_{xy} که در آن: P_x : نیروی محوری در راستای X و P_y : نیروی محوری در راستای Y و P_{xy} : نیروی برشی صفحه XY و $q(x,y)$ نیروی خارج صفحه ای می باشد. معادله نیروی کمانش به صورت زیر خواهد بود [۸ و ۷]:

$$P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x,y) \quad (9)$$

کار مجازی

کار مجازی نیروی خارجی نیز به صورت زیر می باشد:

$$\delta w = \int_0^a \int_0^b q(x,y) \delta w(x,y) dx dy \quad (10)$$

تغییرات انرژی جنبشی نیز به صورت زیر بیان می شود:

$$\delta T = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_3 \delta \dot{u}_3) dA dz \quad (11)$$

که ρ چگالی می باشد. همچنین با استفاده از اصل همیلتون داریم:

$$\int_0^T (\delta T - (\delta U - \delta w)) dt = 0 \quad (12)$$

که در آن T انرژی جنبشی، U انرژی کرنشی و W کار نیروهای خارجی می باشد.

به دست آوردن معادلات صفحه مرتبه n ام

با در نظر گرفتن مقادیر زیر:

$$A_1 = z - \frac{1}{n} \left(\frac{z}{h}\right)^{n-1} z^n \quad (13)$$

ماده است. در تئوری کوپل تنش اصلاح شده، چگالی انرژی کرنشی در مختصات قائم سه بعدی برای جسمی که محدود به حجم V و سطح Ω می باشد به صورت زیر بیان می شود [۴]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

که در آن:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (3)$$

ϵ_{ij} و χ_{ij} به ترتیب قسمت متقارن تانسور انحنا^۱ و تانسور کرنش^۲ هستند. u_i و θ_i به ترتیب بردار جابه جایی^۳ و بردار چرخشی^۴ تعریف شده اند.

$$\theta = \frac{1}{2} \text{Curl } \mathbf{u} \quad (4)$$

σ_{ij} و m_{ij} به ترتیب تانسور تنش و قسمت انحرافی تانسور کوپل تنش^۵ هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (5)$$

$$m_{i,j} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \quad (6)$$

که در آن λ و μ ثوابت لامه، δ_{ij} دلتای کرونگر و l پارامتر مقیاس طول ماده می باشد. از معادله (۳) و (۶) میتوان دریافت که χ_{ij} و m_{ij} متقارن هستند.

مدل صفحه مرتبه n ام

معادلات جابه جایی برای صفحه مرتبه n ام به صورت زیر تعریف می شوند:

$$u_1(x, y, z, t) = z \varphi_x(x, y, t) - \frac{1}{n} \left(\frac{z}{h}\right)^{n-1} z^n \left(\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial x} + \varphi_x(x, y, t)\right) \quad (7)$$

$$u_2(x, y, z, t) = z \varphi_y(x, y, t) - \frac{1}{n} \left(\frac{z}{h}\right)^{n-1} z^n \left(\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial y} + \varphi_y(x, y, t)\right)$$

$$u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad n=3, 5, 7, 9, \dots$$

$$u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t)$$

¹Symmetric part of the curvature tensor

² Strain tensor

³ Displacement vector

⁴ Rotation vector

⁵ Deviatoric part of the couple stress tensor

$$B_{13} = \rho I_2 - 2\rho A_6 I_{n+1} - \rho A_6^2 I_{2n} \quad (41)$$

معادلات کلی صفحه مرتبه n ام به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + B_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ + B_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_4 \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x^3} \\ + B_4 \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial y^2} + B_4 \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial x^2} \\ + B_3 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + B_3 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + B_4 \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y^3} \\ + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, y) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - B_{11} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + B_{12} \left(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} -B_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_5 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y \partial x} + B_6 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \\ + B_7 \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x \partial y^3} - B_7 \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial y^4} \\ + B_7 \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial y \partial x^3} - B_7 \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial y^2 \partial x^2} \\ - B_3 \frac{\partial w}{\partial x} - B_3 \varphi_x - B_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ + B_8 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} = -B_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + B_{13} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \\ - B_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + B_9 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y \partial x} + B_{10} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + B_7 \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x^4} \\ B_7 \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x^2 \partial y^2} - B_7 \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial y \partial x^3} - B_7 \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial x \partial y^3} - B_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \\ B_3 \frac{\partial w}{\partial y} - B_3 \varphi_y + B_8 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = -B_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} + \\ B_{13} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (44)$$

روش حل ناور

با استفاده از روش حل ناور طبق شرح ذیل [۶و۵]:

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin ax \sin by \quad (45)$$

$$\varphi_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos ax \sin by \quad (46)$$

$$\varphi_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_{mn} \sin ax \cos by \quad (47)$$

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin ax \sin by \quad (48)$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin ax \sin by \, dx \, dy \quad (49)$$

$$A_2 = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{h} \right)^{n-1} z^n \quad (14)$$

$$A_3 = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{h} \right)^{n-1} z^{n+1} \quad (15)$$

$$A_4 = \left(\frac{2z}{h} \right)^{n-1} \quad (16)$$

$$A_5 = \left(\frac{2}{h} - \frac{2n}{h} \right) \left(\frac{2z}{h} \right)^{n-2} \quad (17)$$

$$A_6 = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{h} \right)^{n-1} \quad (18)$$

$$A_7 = \mu \left(\frac{2}{h} \right)^{n-1} I_{n-1} \quad (19)$$

$$A_8 = \mu \left(\frac{2}{h} \right)^{2n-2} I_{2n-2} \quad (20)$$

$$A_9 = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{1}{n} \left(\frac{2}{h} \right)^{n-1} \right)^2 I_{2n} \quad (21)$$

$$A_{10} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{n} \left(\frac{2}{h} \right)^{n-1} I_{n+1} \quad (22)$$

$$A_{11} = \frac{1}{4} \mu l^2 \left(\frac{1}{n} \left(\frac{2}{h} \right)^{n-1} \right)^2 (n^2 - n)^2 I_{2n-4} \quad (23)$$

$$A_{12} = \frac{1}{4} \mu l^2 h \quad (24)$$

$$I_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z^i \, dz \quad (i = 0, 1, 2, n-1, n, n+1, 2n-4, 2n-2, 2n) \quad (25)$$

$$J_1 = I_1 - A_6 I_n \quad (26)$$

$$J_{n+1} = I_{n+1} - A_6 I_{2n} \quad (27)$$

$$K_2 = I_2 - 2A_6 I_{n+1} - A_6^2 I_{2n} \quad (28)$$

وهمچنین:

$$B_1 = 2A_{12} + l^2 A_7 + \frac{1}{2} l^2 A_8 + 2A_9 \quad (29)$$

$$B_2 = \frac{1}{2} B_1 = A_{12} + A_9 + \frac{1}{2} l^2 A_7 + \frac{1}{4} l^2 A_8 \quad (30)$$

$$B_3 = -\mu h + 2A_7 - A_8 - A_{11} \quad (31)$$

$$B_4 = A_9 - A_{10} + \frac{1}{4} l^2 A_8 - A_{12} \quad (32)$$

$$B_5 = 3A_{12} - \frac{3}{2} l^2 A_7 + \frac{3}{4} l^2 A_8 - (\lambda + \mu) I_2 \\ + 2(\lambda + \mu) A_6 I_{n+1} - (\lambda + \mu) A_6^2 I_{2n} \quad (33)$$

$$B_6 = -\mu I_2 + 2\mu A_6 I_{n+1} - \mu A_6^2 I_{2n} - 4A_{12} \\ + 2l^2 A_7 - l^2 A_8 \quad (34)$$

$$B_7 = \frac{1}{4} \mu l^2 I_2 - \frac{1}{2} \mu l^2 A_6 I_{n+1} + \frac{1}{4} \mu l^2 A_6^2 I_{2n} \quad (35)$$

$$B_8 = -(\lambda + 2\mu) I_2 + 2A_{10} - A_9 - A_{12} \\ + \frac{1}{2} l^2 A_7 - \frac{1}{4} l^2 A_8 \quad (36)$$

$$B_9 = \frac{5}{4} l^2 A_8 - \frac{1}{2} \mu l^2 n A_6^2 I_{2n-2} - l^2 A_7 - \frac{1}{2} l^2 n A_7 \\ + 3A_{12} - (\lambda + \mu) I_2 - (\lambda + \mu) A_6^2 I_{2n} \\ + 2(\lambda + \mu) A_6 I_{n+1} \quad (37)$$

$$B_{10} = \frac{3}{2} l^2 A_7 + \frac{1}{2} l^2 n A_7 - \frac{3}{2} l^2 A_8 \\ + \frac{1}{2} \mu l^2 n A_6^2 I_{2n-2} - \mu I_2 \\ - \mu A_6^2 I_{2n} + 2\mu A_6 I_{n+1} - 4A_{12} \quad (38)$$

$$B_{11} = \rho A_6^2 I_{2n} \quad (39)$$

$$B_{12} = \rho A_6 I_{n+1} - \rho A_6^2 I_{2n} \quad (40)$$

که در آن:

$$\alpha = \frac{\pi m}{a}, \beta = \frac{\pi n}{b}, i = \sqrt{-1} \quad (50)$$

خواهیم داشت:

$$M_1 = B_1 \alpha^2 \beta^2 + B_2 \alpha^4 + B_2 \beta^4 - B_3 \alpha^2 - B_3 \beta^2 - P_x \alpha^2 - P_y \beta^2 \quad (51)$$

$$M_2 = M_4 = B_4 \alpha^3 + B_4 \alpha \beta^2 - B_3 \alpha \quad (52)$$

$$M_3 = M_7 = B_4 \beta^3 + B_4 \alpha^2 \beta - B_3 \beta \quad (53)$$

$$M_5 = -B_7 \beta^4 - B_7 \alpha^2 \beta^2 - B_6 \beta^2 - B_8 \alpha^2 - B_3 \quad (54)$$

$$M_6 = B_7 \alpha \beta^3 + B_7 \alpha^3 \beta - B_5 \alpha \beta \quad (55)$$

$$M_8 = -B_7 \alpha^3 \beta - B_7 \alpha \beta^3 - B_9 \alpha \beta \quad (56)$$

$$M_9 = B_7 \alpha^4 + B_7 \alpha^2 \beta^2 - B_{10} \alpha^2 - B_8 \beta^2 - B_3 \quad (57)$$

$$N_1 = -B_{11} \alpha^2 - B_{11} \beta^2 - \rho h \quad (58)$$

$$N_2 = N_4 = B_{12} \alpha \quad (59)$$

$$N_3 = N_7 = B_{12} \beta \quad (60)$$

$$N_5 = N_9 = -B_{13} \quad (61)$$

$$N_6 = N_8 = 0 \quad (62)$$

و سرانجام ماتریس کلی معادلات صفحه مرتبه سوم به شکل زیر حاصل خواهند شد:

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_4 & M_5 & M_6 \\ M_7 & M_8 & M_9 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ N_4 & N_5 & N_6 \\ N_7 & N_8 & N_9 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

یک صفحه گرافن تک لایه دارای خصوصیات زیر است [7]:

$$E = 1.06 \text{TPa}, \nu = 0.25, h = 0.34 \text{nm}, \rho =$$

$$2250 \text{kg/m}^3 \quad q = 1 \text{N/m}^2$$

نتایج و بحث

برنامه محاسباتی در نرم افزار Matlab نوشته شده و نتایج با استفاده از این برنامه به دست آمده اند. کلیه شرایط مرزی نیز به صورت تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده اند.

جدول (۱) میزان خمش بدون بعد نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر بار یکنواخت صفحه ای برای نسبت طول به عرض و نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت را نشان می دهد. همان گونه که در شکل پیداست با افزایش پارامتر طول نسبت به ضخامت میزان خمش بدون بعد نانوصفحه کم می شود. همچنین با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان خمش بدون بعد زیاد می شود. همچنین میزان خمش

بدون بعد نانو صفحه مرتبه سوم از مرتبه پنجم بیشتر است. جدول (۲) میزان خمش نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر بار سینوسی برای نسبت طول به عرض و نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت را نشان می دهد. همان گونه که در شکل پیداست با افزایش پارامتر طول نسبت به ضخامت میزان خمش نانوصفحه کم می شود. همچنین با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان خمش زیاد می شود.

جدول (۳) به مقایسه میزان خمش بدون بعد نانو صفحات مختلف تحت اثر بار یکنواخت صفحه ای برای نسبت طول به عرض متفاوت پرداخته است. همانگونه که در جدول می بینیم میزان خمش بدون بعد برای نانو صفحه کیرشهف بیشترین مقدار و برای نانو صفحه میندلین کمترین مقدار است.

شکل (۱) میزان نیروی بحرانی کمانش بدون بعد نانو صفحات مختلف تحت اثر نیروی تک محوره صفحه ای در جهت X با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه رفتار متفاوتی به شرح ذیل دارد:

- نیروی بحرانی بدون بعد با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه میندلین، افزایش می یابد.
- نیروی بحرانی بدون بعد با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه برشی مرتبه سوم و پنجم، اندکی کاهش می یابد.
- نیروی بحرانی بدون بعد با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کیرشهف، ثابت می ماند.

جدول (۴) میزان نیروی بحرانی کمانش بدون بعد نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر نیروی دو محوره در جهت Y, X برای نسبت طول به ضخامت و نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت را نشان می دهد. همانگونه که می بینیم میزان نیروی بحرانی بدون بعد نانو صفحه مرتبه n ام با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانو صفحه افزایش و با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش می یابد. جدول (۵) نشان می دهد میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر نیروی تک محوره در جهت X با افزایش نسبت پارامتر طول به ضخامت افزایش می یابد. جدول (۶) نشان می دهد فرکانس مودهای مختلف نانوصفحه مرتبه n ام با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانوصفحه افزایش می یابد. شکل (۲) به مقایسه فرکانسها برای نانو صفحه مرتبه n ام با درجه های متفاوت می پردازد. همانگونه که می بینیم با افزایش مرتبه صفحه میزان فرکانس با شیب ملایمی افزایش می یابد. جدول (۷) نشان می دهد فرکانس مودهای مختلف نانو صفحه مرتبه n ام با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه کاهش می یابد.

جدول ۴. میزان نیروی بحرانی کمانش بدون بعد نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر نیروی دو محوره در جهت X و Y برای نسبت طول به ضخامت و نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت ($a/b=1$)

a/h	l/h				
	0	0.5	1	1.5	2
5	1.000	2.180	5.694	11.536	19.711
10	1.000	2.048	5.183	10.402	17.708
20	1.000	2.012	5.046	10.102	17.179
30	1.000	2.005	5.021	10.045	17.080
40	1.000	2.003	5.012	10.025	17.045
50	1.000	2.002	5.007	10.016	17.029

جدول ۵. میزان نیروی بحرانی کمانش نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر نیروی تک محوره در جهت X برای نسبت طول به عرض و نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت ($a/b=1$)

a/h	l/h				
	0	0.5	1	1.5	2
5	46.20	100.74	263.06	532.99	910.71
10	13.45	27.55	69.70	139.89	238.13
20	3.51	7.06	17.69	35.42	60.23
30	1.57	3.15	7.89	15.78	26.83
40	0.89	1.77	4.44	8.88	15.10
50	0.57	1.14	2.84	5.69	9.67

جدول ۶. مقایسه فرکانسها برای نسبت پارامتر طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه مرتبه n ام (MHZ) ($a/b=2, a/h=30$)

Mode	l/h			
	0	0.5	1	2
ω_{11}	8.7284	12.3536	19.5411	36.0389
ω_{21}	13.9441	19.7447	31.2407	57.6223
ω_{12}	29.4967	41.8251	66.2277	122.1954
ω_{22}	34.6497	49.1546	77.8533	143.6613
ω_{33}	77.0069	109.6563	174.0385	321.4395

جدول ۱. مقایسه میزان خمش بدون بعد نانو صفحه مرتبه n ام تحت اثر بار یکنواخت صفحه ای برای نسبت طول به عرض و نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت ($a/h=30, q=1e-18 N/nm^2$)

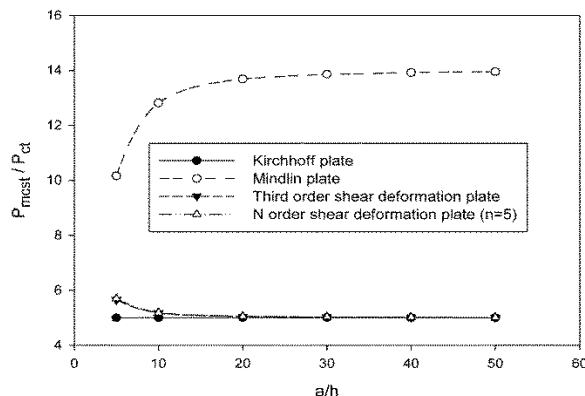
a/b	l/h							
	0		0.5		1		2	
	$n=3$	$n=5$	$n=3$	$n=5$	$n=3$	$n=5$	$n=3$	$n=5$
1	1.0000	1.0000	0.4987	0.4986	0.1992	0.1992	0.0586	0.0585
1.5	1.0000	1.0000	0.4991	0.4990	0.1994	0.1994	0.0586	0.0586
2	1.0000	1.0000	0.4992	0.4991	0.1995	0.1995	0.0587	0.0586

جدول ۲. میزان خمش نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر بار سینوسی برای نسبت طول به عرض و نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت ($q=1e-18 N/nm^2, a/h=30$)

a/b	l/h			
	0	0.5	1	2
1	7.0619	3.5200	1.4058	0.4132
1.5	14.2887	7.1260	2.8467	0.8368
2	21.1015	10.5265	4.2057	1.2364

جدول ۳. مقایسه میزان خمش بدون بعد نانو صفحه های مختلف تحت اثر بار یکنواخت صفحه ای برای نسبت طول به عرض متفاوت ($a/h=30, q=1e-18 N/nm^2, l/h=1$)

a/b	Kirchhoff plate	Mindlin plate	Third order shear deformation plate	N order shear deformation plate ($n=5$)
1	0.2000	0.0721	0.1992	0.1992
1.5	0.2000	0.0719	0.1994	0.1994
2	0.2000	0.0719	0.1995	0.1995

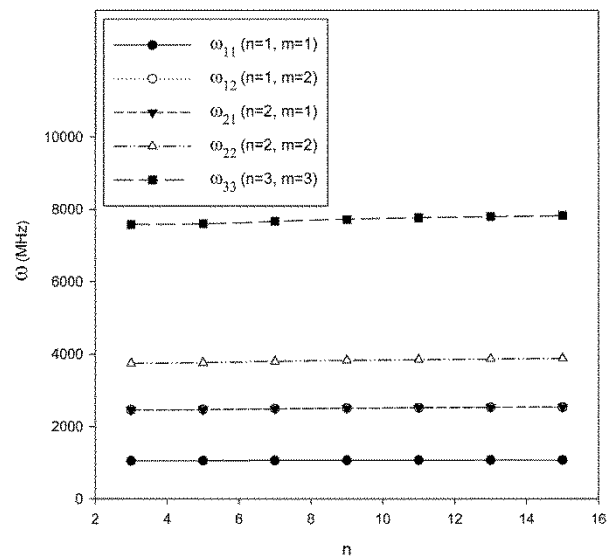


شکل ۱. مقایسه میزان نیروی بحرانی کمانش بدون بعد نانوصفحات مختلف تحت اثر نیروی تک محوره در جهت X برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت ($a/b=1$ و $l/h=1$)

می‌یابد. و با افزایش مرتبه صفحه میزان فرکانس با شیب ملایمی افزایش می‌یابد. همچنین فرکانس مودهای مختلف نانو صفحه مرتبه n ام با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه کاهش می‌یابد.

مراجع

- [1] Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., Tong, P., " Couple stress Based Strain gradient theory for elasticity".Int.J.Solids Struct.39, pp. 2731–2743,(2002).
- [2] Toupin, R.A., "Elastic materials with couple stresses".Arch.Rational Mech.Anal.11, pp. 385–414,(1962).
- [3] Mindlin, R.D., Tiersten, H.F., " Effects of couple-stresses in linear elasticity" Arch. Rational Mech. Anal.11, pp. 415–448, (1962).
- [4] Koiter, W.T., "Couple stresses in the theory of elasticity",I and II.Proc .K. Ned. Akad .Wet.(B) 67,pp. 17–44,(1964).
- [5] Mindlin, R.D., "Micro-structure in linear elasticity".Arch.RationalMech.Anal .16, pp. 51–78, (1964).
- [6] Tsiatas.G.C , "A new kirchhoff model based on a modified couple stress theory",International Journal of solids and structures,No.46, pp2757-2764,(2009)
- [7] Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X , "A size-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory",European Journal of mechanics A/Solids, No.30,pp 517-524, (2011)
- [8] Farajpour.A, Shahidi.A.R, Mohammadi.M, Mahzoon. M, "Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics, Composite Structures, No.94, pp 1605-1615,(2012).



شکل ۲. مقایسه فرکانسها برای برای نانو صفحه مرتبه n ام با درجه های متفاوت (MHz) ($a/b=1, a/h=5$)

جدول ۷. مقایسه فرکانسها برای نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه مرتبه n ام ($a/b=1.5, l/h=1$)(MHz)

Mode	a/h					
	5	10	20	30	40	50
ω_{11}	774.63	200.75	50.70	22.58	12.71	8.14
ω_{21}	1435.78	381.54	97.19	43.35	24.42	15.64
ω_{12}	2211.69	602.09	154.90	69.24	39.03	25.00
ω_{22}	2802.36	774.63	200.75	89.89	50.70	32.49
ω_{33}	5722.08	1660.58	444.62	200.75	113.58	72.89

نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی خمش و کمانش و ارتعاشات نانو صفحه مرتبه n ام با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده پرداخته شد. همانگونه که در جداول و اشکال دیدیم میزان خمش بدون بعد نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر بار یکنواخت صفحه ای با افزایش پارامتر طول نسبت به ضخامت نانوصفحه کم می‌شود. همچنین با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان خمش بدون بعد زیاد می‌شود. میزان خمش بدون بعد نانو صفحه مرتبه سوم از مرتبه پنجم بیشتر است. میزان نیروی بحرانی کمانش بدون بعد نانوصفحه مرتبه n ام تحت اثر نیروی دو محوره در جهت Y, X با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانو صفحه افزایش و با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش می‌یابد. و نیز میزان نیروی بحرانی کمانش تک محوره به مراتب بیشتر از دو محوره می‌باشد. همچنین نیروی بحرانی کمانش نانوصفحه مرتبه پنجم بیشتر از مرتبه سوم است. همچنین فرکانس مودهای مختلف نانو صفحه مرتبه n ام با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانوصفحه افزایش