



# ISAV2020

## دومین کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات

تهران - ایران ۲۹-۳۰ بهمن ماه ۱۳۹۹



### تحلیل خمش و ارتعاشات وابسته به اندازه در نانو صفحه میندلین مستطیلی با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و روش حل ناویر

مجید اسکندری شهرکی<sup>۱\*</sup>، محمود شریعتی<sup>۲</sup>، محسن حیدری بنی<sup>۳</sup>، جعفر اسکندری جم<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> ایران، مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، کدپستی ۹۱۷۷۹۴۸۹۷۴، دانشجوی دکتری مهندسی هوافضا.

<sup>۲</sup> ایران، مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، کدپستی ۹۱۷۷۹۴۸۹۷۴، استاد مهندسی مکانیک.

<sup>۳</sup> ایران، تهران، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، کدپستی ۱۷۷۴-۱۵۸۷۵، دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک

<sup>۴</sup> ایران، تهران، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، کدپستی ۱۷۷۴-۱۵۸۷۵، استاد مهندسی مکانیک

\*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: [mjdeskandari@gmail.com](mailto:mjdeskandari@gmail.com)

#### چکیده

در این مقاله سعی بر آن است که با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده، مشخصه های خمش و ارتعاشات نانو صفحه میندلین مستطیلی از جنس گرافن مطالعه شود. برای در نظر گرفتن آثار مقیاس کوچک از تئوری کوپل تنش اصلاح شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول می باشد و توسط یانگ در سال ۲۰۰۲ بیان گردید استفاده شده است. در تئوری کوپل تنش اصلاح شده، چگالی انرژی کرنشی تابعی از مؤلفه های تانسور کرنش، تانسور انحناء، تانسور تنش و قسمت متقارن تانسور تنش کوپل می باشد. بعد از به دست آوردن انرژی کرنشی، انرژی جنبشی، کار خارجی و قرار دادن آنها در معادله اصل همیلتون، معادلات اصلی و کمکی نانو صفحه به دست آورده می شود. سپس با جایگذاری شرایط مرزی و نیرویی در معادلات حاکم به بررسی خمش و ارتعاشات نانو صفحه گرافنی مستطیلی به ضخامت  $h$  با تکیه گاه ساده در اطراف می پردازیم. روش حل نیز روش ناویر می باشد.

**کلمات کلیدی:** تئوری تنش کوپل اصلاح شده، صفحه میندلین، نانو صفحه مستطیلی، روش حل ناویر، خمش، ارتعاشات.

## ۱- مقدمه

برای مطالعه مواد در مقیاس کوچک مطمئن ترین روش آزمایش در مقیاس اتمی و مولکولی می باشد. در این روش نانوساختار در ابعاد واقعی مورد مطالعه قرار می گیرد. در این روش برای تعیین خواص مکانیکی نانوساختارها از میکروسکوپ نیروی اتمی (AFM) برای اعمال بارهای مکانیکی مختلف بر روی نانوصفحات و اندازه گیری پاسخ استفاده می کنند. مشکلات اساسی در این روش دشواری کنترل بر شرایط آزمایش در این مقیاس و نیز هزینه های اقتصادی سنگین و نیز زمان بر بودن روش می باشد. از این رو از این روش تنها برای اعتبارسنجی روش های ساده و کم هزینه دیگر استفاده می شود.

شبیه سازی اتمی راه حل دیگری در مطالعه ساختارها در مقیاس کوچک می باشد. در این روش رفتار اتم ها و مولکول ها با در نظر گرفتن اثر بین مولکولی و بین اتمی بر حرکت آن ها که در نهایت تغییر فرم کل جسم را شامل می شود، مورد بررسی قرار می گیرد. استفاده از این روش هنگامی که مسئله دارای تغییر شکل بزرگ می باشد و یا مقیاس بزرگ تر از یک یا چند اتم باشد، هزینه محاسباتی بسیار زیادی داشته و مقرون به صرفه نیست. بنابراین، از این روش تنها برای مسائل با تغییر شکل کوچک استفاده می شود. با توجه به محدودیت های مطرح شده در روش های فوق برای مطالعه نانوساختارها، محققین به دنبال راهکارهای ساده تر در بررسی نانوساختارها بوده اند. مدل سازی ساختارهای در مقیاس کوچک، با استفاده از مکانیک محیط پیوسته راه حل دیگری در مطالعه این مواد می باشد. تئوری های محیط پیوسته ی وابسته به اندازه متنوعی وجود دارند که آثار اندازه را در نظر گرفته اند از جمله: تئوری میکرومورفیک، تئوری میکروساختار، تئوری میکروپولار، تئوری کوسرات، تئوری غیر موضعی، تئوری کوپل تنش اصلاح شده، تئوری الاستیسیته گرادین کرنشی که این ها گسترش یافته ی تئوری های میدانی کلاسیک هستند که در آن ها آثار اندازه گنجانده شده است.

## ۲- تئوری کوپل تنش اصلاح شده:

یانگ و همکارانش [۱] در سال ۲۰۰۲ با اصلاح کردن تئوری کوپل تنش که توسط توپین [۲]، میندلین و تیرستن [۳]، کوپتر [۴] و میندلین [۵] در سال ۱۹۶۴ ارائه شد، یک مدل کوپل تنش اصلاح شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول ماده<sup>۱</sup> برای تصویر کردن اثر اندازه می باشد را پیشنهاد کردند، در حالیکه تئوری کوپل تنش کلاسیک دارای دو پارامتر مقیاس طول ماده است. در تئوری کوپل تنش اصلاح شده، چگالی انرژی کرنشی در مختصات قائم سه بعدی برای جسمی که محدود به حجم  $V$  و سطح  $\Omega$  می باشد به صورت زیر بیان می شود [۶]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_j \chi_{ij}) dV \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

که در آن:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (3)$$

$\varepsilon_{ij}$  و  $\chi_{ij}$  به ترتیب قسمت متقارن تانسور انحنای<sup>۲</sup> و تانسور کرنش<sup>۳</sup> هستند.  $u_i$  و  $\theta_i$  به ترتیب بردار جابه جایی<sup>۴</sup> و بردار چرخشی<sup>۵</sup> تعریف شده اند.

<sup>۱</sup>Material length scale parameter

<sup>۲</sup>Symmetric part of the curvature tensor

<sup>۳</sup> Strain tensor

$$\theta = \frac{1}{2} \text{Curl } u \quad (۴)$$

$m_{ij}$  و  $\sigma_{ij}$  به ترتیب تانسور تنش و قسمت انحرافی تانسور کوپل تنش<sup>۶</sup> هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (۵)$$

$$m_{i,j} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \quad (۶)$$

که در آن  $\lambda$  و  $\mu$  ثوابت لامه،  $\delta_{ij}$  دلتای کرونگر و  $l$  پارامتر مقیاس طول ماده می باشد. از معادله (۳) و (۶) می توان دریافت که  $m_{ij}$  و  $\chi_{ij}$  متقارن هستند.

### ۳- مدل صفحه میندیلین:

معادلات جابه جایی برای صفحه میندیلین به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= z \varphi_x(x, y, t) \\ u_2(x, y, z, t) &= z \varphi_y(x, y, t) \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن  $\varphi_x$  و  $\varphi_y$  چرخش بردار نرمال حول محور  $x$  و  $y$  و  $w$  میزان جابه جایی نقطه میانی صفحه در راستای محور  $z$  می باشد. قسمت متقارن تانسور انحنای<sup>۷</sup> و تانسور کرنش و تنش و بردار چرخشی برای مدل صفحه میندیلین به صورت زیر می باشد:

$$\varepsilon_{xx} = z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \quad (۸)$$

$$\varepsilon_{yy} = z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \quad (۹)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (۱۰)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \quad (۱۱)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right) \quad (۱۲)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right) \quad (۱۳)$$

$$\theta_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_y \right) \quad (۱۴)$$

$$\theta_y = \frac{1}{2} \left( \varphi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (۱۵)$$

<sup>۶</sup>Displacement vector

<sup>۷</sup>Rotation vector

<sup>۸</sup>Deviatoric part of the couple stress tensor

<sup>۹</sup>Symmetric part of the curvature tensor

$$\theta_z = \frac{1}{2} z \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \quad (۱۶)$$

$$x_{xx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \quad (۱۷)$$

$$x_{yy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (۱۸)$$

$$x_{zz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \quad (۱۹)$$

$$x_{xy} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \quad (۲۰)$$

$$x_{xz} = \frac{1}{4} z \left( \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y \partial x} \right) \quad (۲۱)$$

$$x_{yz} = \frac{1}{4} z \left( \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \right) \quad (۲۲)$$

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \lambda z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \quad (۲۳)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \quad (۲۴)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \left( z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \quad (۲۵)$$

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} = \mu z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \quad (۲۶)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right) \quad (۲۷)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right) \quad (۲۸)$$

تغییرات انرژی کرنشی به صورت زیر بیان می شود:

$$\delta U = \int_V \left( \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + 2\sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz} + m_{xx} \delta x_{xx} + m_{yy} \delta x_{yy} + m_{zz} \delta x_{zz} + 2m_{xy} \delta x_{xy} + 2m_{xz} \delta x_{xz} + 2m_{yz} \delta x_{yz} \right) dV \quad (۲۹)$$

می توان جهت ساده نویسی ضرایب متغیرها را از  $F_1$  تا  $F_{15}$  مطابق معادله (۳۰) نام گذاری و آن ها را جداگانه به دست آورد.

$$\delta U = \int_V \left( F_1 \delta w_{,xx} + F_2 \delta w_{,yy} + F_3 \delta w_{,xy} + F_4 \delta w_{,x} + F_5 \delta w_{,y} + F_6 \delta \varphi_{x,yy} + F_7 \delta \varphi_{y,xx} + F_8 \delta \varphi_{y,xy} + F_9 \delta \varphi_{x,yx} + F_{10} \delta \varphi_{x,x} + F_{11} \delta \varphi_{y,y} + F_{12} \delta \varphi_{x,y} + F_{13} \delta \varphi_{y,x} + F_{14} \delta \varphi_x + F_{15} \delta \varphi_y \right) dV \quad (۳۰)$$

که در آن:

$$F_1 = -\frac{1}{4} \mu l^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \quad (۳۱)$$

$$F_2 = \frac{1}{4} \mu l^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \quad (32)$$

$$F_3 = \mu l^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \quad (33)$$

$$F_4 = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right) \quad (34)$$

$$F_5 = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right) \quad (35)$$

$$F_6 = F_8 = \frac{1}{4} \mu l^2 z^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \right) \quad (36)$$

$$F_7 = F_9 = \frac{1}{4} \mu l^2 z^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} \right) \quad (37)$$

$$F_{10} = (\lambda + 2\mu) z^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \lambda z^2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{1}{4} \mu l^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \quad (38)$$

$$F_{11} = \lambda z^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) z^2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{1}{4} \mu l^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \quad (39)$$

$$F_{12} = \mu z^2 \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + \mu l^2 \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (40)$$

$$F_{13} = \mu z^2 \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + \mu l^2 \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \quad (41)$$

$$F_{14} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right) \quad (42)$$

$$F_{15} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right) \quad (43)$$

#### ۴- معادله کارمجازی که توسط نیروی خارجی حاصل می‌گردد [۷]:

کارمجازی که توسط نیروی خارجی انجام می‌گیرد شامل سه بخش است:

۱- کار مجازی که توسط نیروهای حجمی روی  $V = \Omega * (-h/2, h/2)$  انجام می‌گیرد.

۲- کار مجازی که توسط نیروی برشی صفحه‌ای در سطوح بالایی و پایینی  $(\Omega)$  انجام می‌گیرد.

۳- کار مجازی که توسط نیروی برشی صفحه‌ای و بر روی سطوح جانبی  $S = \Gamma * (-h/2, h/2)$  انجام می‌گیرد. که  $\Omega$  صفحه

میانی ورق و  $\Gamma$  محیط میانی ورق می‌باشد.

اگر  $(f_x, f_y, f_z)$  را نیروی حجمی (forcebody) و  $(c_x, c_y, c_z)$  را ممان حجمی (body couple) و  $(q_x, q_y, q_z)$  نیروهای

باشند که بر روی سطح  $\Omega$  عمل می‌کنند و  $(t_x, t_y, t_z)$  تنش برشی کوشی (Cauchy tractions) و  $(S_x, S_y, S_z)$  ممان سطح

(Surface couple) باشند. در این صورت تغییرات (Variation) کارمجازی به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta w = - \left[ \int_{\Omega} (f_x \delta u + f_y \delta V + f_z \delta w + q_x \delta u + q_y \delta V + q_z \delta w + c_x \delta \theta_x + c_y \delta \theta_y + c_z \delta \theta_z) dx dy + \int_{\Gamma} (t_x \delta u + t_y \delta V + t_z \delta w + s_x \delta \theta_x + s_y \delta \theta_y + s_z \delta \theta_z) d\Gamma \right] \quad (44)$$

با توجه به اینکه در این تحقیق فقط نیروی خارجی  $q_z$  اعمال شده است کار مجازی به صورت:

$$\delta w = \int_0^a \int_0^b q(x, y) \delta w(x, y) dx dy \quad (45)$$

می باشد. تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر بیان می شود:

$$\delta T = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_3 \delta \dot{u}_3) dA dz = \int_A \left[ \rho h \dot{w} \delta \dot{w} + \frac{\rho h^3}{12} (\dot{\varphi}_x \delta \dot{\varphi}_x + \dot{\varphi}_y \delta \dot{\varphi}_y) \right] dA \quad (46)$$

که  $\rho$  چگالی می باشد. همچنین با استفاده از اصل همپلتون داریم  $[\lambda]$ :

$$\int_0^T (\delta T - (\delta U - \delta w)) dt = 0 \quad (47)$$

که در آن  $T$  انرژی جنبشی،  $U$  انرژی کرنشی و  $W$  کار نیروهای خارجی می باشد.

## ۵- معادله نهایی صفحه با اعمال نیروی کمانش و نیروی خارجی

با به کارگیری اصل همپلتون (معادله ۴۷) معادلات اصلی مطابق زیر به دست می آیند:

$$\left[ \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - \frac{\partial F_4}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F_5}{\partial y} \right) dz \right] = q(x, y) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (48)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial^2 F_6}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_9}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F_{12}}{\partial y} - \frac{\partial F_{10}}{\partial x} + F_{14} \right) dz = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (49)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial^2 F_7}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_8}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F_{11}}{\partial y} + F_{15} \right) dz = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (50)$$

## ۶- به دست آوردن معادلات صفحه میندین (شامل خمش و ارتعاشات)

با در نظر گرفتن مقادیر زیر:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{4} \mu l^2 h & C_2 &= \mu h k_s & C_3 &= \frac{1}{4} \mu l^2 I_2 \\ C_4 &= -\mu I_2 - \mu l^2 h & C_5 &= -\lambda I_2 - 2\mu I_2 - \frac{1}{4} \mu l^2 h & C_6 &= -\mu I_2 - \lambda I_2 + \frac{3}{4} \mu l^2 h \\ C_7 &= \rho h & C_8 &= \frac{\rho h^3}{12} & k_s &= \frac{5}{6} = 0.8 \end{aligned} \quad (51)$$

که در آن:

$$I_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z^i dz \quad (52)$$

معادلات کلی صفحه میندلین به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$2C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_1 \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x^3} - C_1 \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y^3} - C_1 \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial y^2} - C_1 \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial x^2 \partial y} - C_2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - C_2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = q(x, y) + C_7 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (53)$$

$$C_3 \left( \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + C_4 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + C_5 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + C_6 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + C_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + C_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C_2 \frac{\partial w}{\partial x} + C_2 \varphi_x = C_8 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (54)$$

$$C_3 \left( \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial x \partial y^3} \right) + C_6 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + C_4 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + C_5 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + C_1 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + C_1 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + C_2 \frac{\partial w}{\partial y} + C_2 \varphi_x = C_8 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (55)$$

## ۷- روش حل ناویر

روش حل ناویر برای صفحات مستطیلی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در همه لبه‌ها قابل استفاده است. به خاطر اینکه شرایط مرزی خودبه‌خود در این روش ارضا می‌شوند توابع مجهول سطح میانی صفحه به صورت سری‌های دوگانه مثلثاتی به صورت زیر بیان می‌شوند [۹۱۰]:

$$W(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t} \quad (56)$$

$$\varphi_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t} \quad (57)$$

$$\varphi_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t} \quad (58)$$

نیرو نیز از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t} \quad (59)$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y dx dy \quad (60)$$

$$Q_{mn} = \begin{cases} q_0 & \text{برای نیروی سینوسی} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{برای نیروی یکنواخت} \\ \frac{4Q_0}{ab} & \text{برای نیروی نقطه در مرکز صفحه} \end{cases} \quad (۶۱)$$

که در آن:

$$\alpha = \frac{\pi m}{a}, \quad \beta = \frac{\pi n}{b}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (۶۲)$$

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده نیز توسط روش ناویر طبق معادلات ذیل ارضاء می‌شوند:

$$\begin{cases} x = 0 \text{ در } \left\{ \begin{aligned} w(0, y) = w(a, y) = \sum \sum w_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0 \\ \varphi_y(0, y) = \varphi_y(a, y) = \sum \sum y_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y = 0 \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (۶۳)$$

$$\begin{cases} y = 0 \text{ در } \left\{ \begin{aligned} w(x, 0) = w(x, b) = \sum \sum w_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0 \\ \varphi_x(x, 0) = \varphi_x(x, b) = \sum \sum X_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0 \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (۶۴)$$

#### ۸- به دست آوردن ماتریس معادلات صفحه میندیلین در کلی‌ترین حالت:

پس از حل به کمک روش ناویر و نام‌گذاری ضرایب متغیرهای معادلات به صورت زیر خواهیم داشت:

$$U_1 = 2C_1 \alpha^2 \beta^2 + C_1 \alpha^4 + C_1 \beta^4 + C_2 \alpha^2 + C_2 \beta^2 \quad (۶۵)$$

$$U_2 = U_4 = -C_1 \alpha^3 - C_1 \alpha \beta^2 + C_2 \alpha \quad (۶۶)$$

$$U_3 = U_7 = -C_1 \beta^3 - C_1 \alpha^2 \beta + C_2 \beta \quad (۶۷)$$

$$U_5 = -C_3 \beta^4 - C_3 \alpha^2 \beta^2 - C_4 \beta^2 - C_5 \alpha^2 + C_2 \quad (۶۸)$$

$$U_6 = C_3 \alpha \beta^3 + C_3 \alpha^3 \beta - C_6 \alpha \beta \quad (۶۹)$$

$$U_8 = -C_3 \alpha^3 \beta - C_3 \alpha \beta^3 - C_6 \alpha \beta \quad (۷۰)$$

$$U_9 = C_3 \alpha^4 + C_3 \alpha^2 \beta^2 - C_4 \alpha^2 - C_5 \beta^2 + C_2 \quad (۷۱)$$

$$K_1 = -C_7 \quad (۷۲)$$

$$K_2 = K_3 = K_4 = K_6 = K_7 = K_8 = 0 \quad (۷۳)$$



$$K_5 = K_9 = -C_8 \quad (74)$$

ماتریس کلی معادلات صفحه میندیلین به همراه معادلات کمکی به شکل زیر حاصل خواهند شد:

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ U_4 & U_5 & U_6 \\ U_7 & U_8 & U_9 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ K_4 & K_5 & K_6 \\ K_7 & K_8 & K_9 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

جنس صفحه را مواد مختلفی از جمله اپوکسی، گرافن، مس و ... در نظر می‌گیرند. در این مقاله جنس صفحه را گرافن در نظر می‌گیریم. یک صفحه گرافن تک لایه دارای خصوصیات زیر است [۱۱]:

$$E = 1.06TPa, \nu = 0.25, h = 0.34nm, \rho = 2250 \text{ kg/m}^3$$

همچنین رابطه بین  $\nu$  و  $\mu$  و  $E$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (77)$$

که در آن  $E$  مدول یانگ و  $\lambda$  و  $\mu$  ضرایب لامه هستند [۱۲]. همچنین مقدار نیرو را  $q = 1N/m^2$  در نظر می‌گیریم.

## ۹- نتایج و بحث:

برنامه محاسباتی در نرم‌افزار Matlab نوشته شده و نتایج با استفاده از این برنامه به دست آمده‌اند. کلیه شرایط مرزی نیز به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده‌اند.

جدول (۱) میزان خمش نانوصفحه میندیلین تحت اثر بار یکنواخت صفحه‌ای برای نسبت طول به عرض و نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت متفاوت را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل پیداست با افزایش پارامتر مقیاس طول نسبت به ضخامت میزان خمش صفحه کم می‌شود. همچنین با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان خمش زیاد می‌شود.

شکل (۱) میزان خمش نانوصفحه میندیلین تحت اثر بار سینوسی برای نسبت طول به عرض و نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت متفاوت را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل پیداست با افزایش پارامتر مقیاس طول نسبت به ضخامت میزان خمش صفحه کم می‌شود. همچنین با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان خمش زیاد می‌شود.

جدول (۲) به مقایسه میزان خمش بدون بعد نانو صفحات مختلف تحت اثر بار سینوسی برای نسبت طول به عرض متفاوت پرداخته است. همان‌گونه که در جدول می‌بینیم میزان خمش بدون بعد برای نانو صفحه کیرشرف بیشترین مقدار و برای نانو صفحه میندیلین کمترین مقدار است.

جداول (۳) تا (۶) نشان می‌دهند فرکانس‌های مودهای مختلف  $(\omega_{11} - \omega_{12} - \omega_{21} - \omega_{22})$  نانو صفحه میندیلین با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه کاهش می‌یابد. همچنین هنگامی که اثر پارامتر اندازه در نظر گرفته نشود (تئوری کلاسیک) میزان فرکانس، کمترین میزان است و با افزایش اثر اندازه، فرکانس نیز افزایش پیدا می‌کند. همچنین میزان فرکانس برای مود اول کمترین مقدار است و برای مودهای بعد افزایش پیدا می‌کند.

شکل (۲) نشان می‌دهد فرکانس مودهای مختلف نانو صفحه میندیلین با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانوصفحه افزایش می‌یابد.

با مقایسه شکل (۲) و شکل (۳) درمیابیم با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان فرکانس ارتعاشی کاهش می‌یابد.

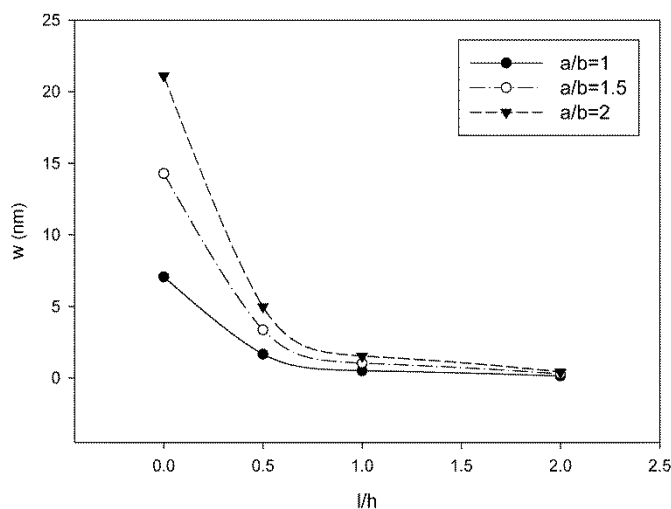
با مقایسه جدول (۷) و جدول (۸) نیز درمیابیم با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان فرکانس ارتعاشی کاهش می‌یابد.

جدول (۹) فرکانس مودهای مختلف  $(\omega_{11} - \omega_{12} - \omega_{21} - \omega_{22})$  را برای نانو صفحات مختلف نشان می‌دهند. طبق جدول

میزان فرکانس برای نانو صفحه میندیلین بیشترین مقدار و برای نانو صفحه مرتبه سوم کمترین مقدار است.

جدول ۱: میزان خمش نانوصفحه میندلین تحت اثر بار یکنواخت صفحه‌ای برای نسبت طول به عرض و نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت ( $a/h=30, q=1e-18 \text{ N/nm}^2$ )

$a/b$	$l/h$			
	۰	۰.۵	۱	۲
۱	۱۰.۷۶۸۷	۲.۵۳۶۸	۰.۷۷۶۷۲۱	۰.۲۱۲۵۶۹
۱.۵	۲۰.۷۵۰۳	۴.۸۸۶۶۸	۱.۴۹۲۸۳	۰.۴۰۴۷۶۶
۲	۲۷.۹۷۵۴	۶.۵۸۷۶۲	۲.۰۱۱۲	۰.۵۴۳۹۳۶



شکل ۱: مقایسه میزان خمش نانو صفحه میندلین تحت اثر بار سینوسی برای نسبت طول به عرض و پارامتر طول به ضخامت متفاوت ( $a/h=30, q=1e-18 \text{ N/nm}^2$ )

جدول ۲: مقایسه میزان خمش بدون بعد نانو صفحات مختلف تحت اثر بار سینوسی برای نسبت طول به عرض متفاوت ( $a/h=30, l/h=1, q=1e-18 \text{ N/nm}^2$ )

$a/b$	<i>Kirchhoff plate</i>	<i>Mindlin plate</i>	<i>Third order shear deformation plate</i>	<i>N order shear deformation plate (n=5)</i>
۱	۰.۲	۰.۰۷۲۲۶۴	۰.۱۹۹۱۲	۰.۱۹۹۰۷
۱.۵	۰.۲	۰.۰۷۲۱۲۱	۰.۱۹۹۲۷	۰.۱۹۹۲۳
۲	۰.۲	۰.۰۷۲۰۴۹	۰.۱۹۹۳۵	۰.۱۹۹۳۱

جدول ۳: مقایسه فرکانس‌های مود اول ( $\omega_{11}$ ) برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه میندلین ( $a/b=1, h=0.34$ )

$l/h$	$a/h$			
	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
۰	۳۱.۲۱۰۲	۱۳.۹۴۲۹	۷.۸۵۷۲	۵.۰۳۲۹
۰.۵	۶۴.۲۵۷۰	۲۸.۷۲۶۶	۱۶.۱۹۲۴	۱۰.۳۷۳۲
۱	۱۱۵.۴۷۵۷	۵۱.۹۰۵۲	۲۹.۳۱۴۵	۱۸.۷۹۶۵
۲	۲۱۵.۵۶۸۶	۹۹.۱۲۵۲	۵۶.۴۳۸۲	۳۶.۳۲۵۳

جدول ۴: مقایسه فرکانس‌های مود اول ( $\omega_{12}$ ) برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه میندلین ( $a/b=1, h=0.34$ )

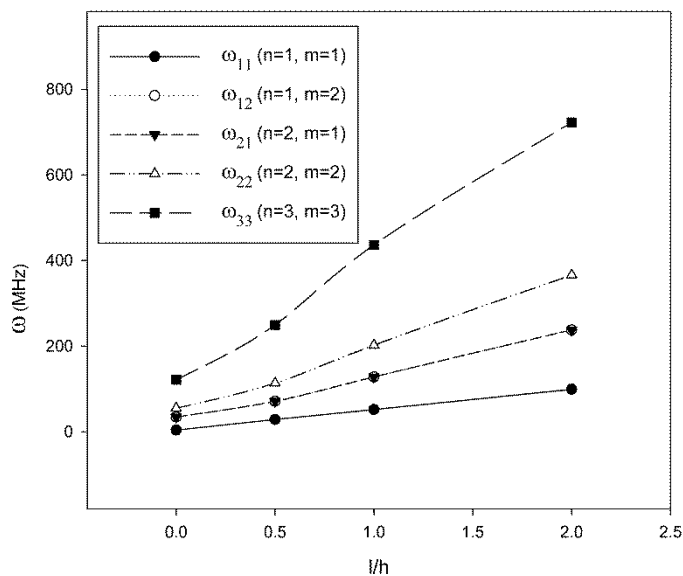
$a/h$	$l/h$			
	۰	۰.۵	۱	۲
۲۰	۷۶.۹۷۲۲	۱۵۸.۲۱۶۹	۲۸۰.۴۱۵۳	۴۹۲.۹۶۶۰
۳۰	۳۴.۶۴۲۵	۷۱.۳۱۴۰	۱۲۸.۰۲۱۷	۲۳۷.۹۱۷۴
۴۰	۱۹.۵۷۴۳	۴۰.۳۱۹۳	۷۲.۷۲۱۹	۱۳۷.۸۴۸۸
۵۰	۱۲.۵۵۳۹	۲۵.۸۶۶۳	۴۶.۷۵۷۵	۸۹.۴۵۹۳

جدول ۵: مقایسه فرکانس‌های مود اول ( $\omega_{21}$ ) برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه میندلین ( $a/b=1, h=0.34$ )

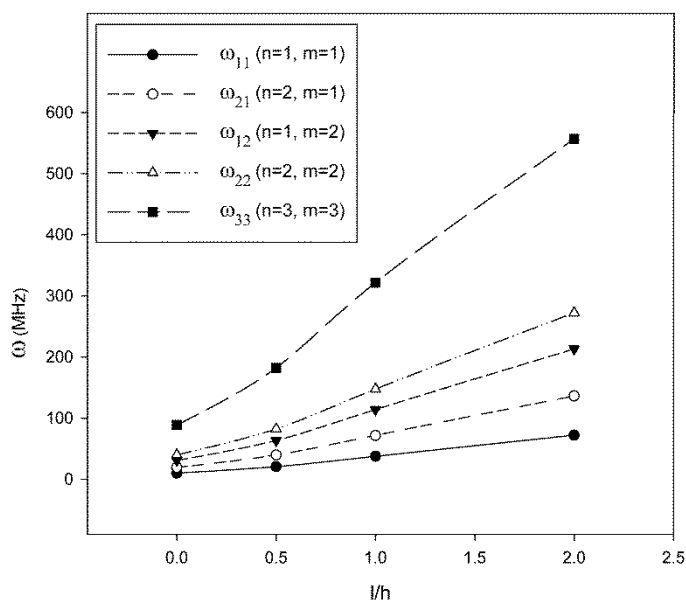
$a/h$	$l/h$			
	۰	۰.۵	۱	۲
۲۰	۷۶.۹۷۲۲	۱۵۸.۲۱۶۹	۲۸۰.۴۱۵۳	۴۹۲.۹۶۶۰
۳۰	۳۴.۶۴۲۵	۷۱.۳۱۴۰	۱۲۸.۰۲۱۷	۲۳۷.۹۱۷۴
۴۰	۱۹.۵۷۴۳	۴۰.۳۱۹۳	۷۲.۷۲۱۹	۱۳۷.۸۴۸۸
۵۰	۱۲.۵۵۳۹	۲۵.۸۶۶۳	۴۶.۷۵۷۵	۸۹.۴۵۹۳

جدول ۶: مقایسه فرکانس‌های مود اول ( $\omega_{22}$ ) برای نسبت پارامتر طول به ضخامت و نسبت طول به ضخامت صفحه متفاوت برای نانو صفحه میندلین ( $a/b=1, h=0.34$ )

$a/h$	$l/h$			
	۰	۰.۵	۱	۲
۲۰	۱۲۱.۵۵۰۵	۲۴۹.۵۲۹۷	۴۳۶.۵۳۷۸	۷۲۲.۲۳۷۹
۳۰	۵۵.۰۹۱۸	۱۱۳.۳۲۴۶	۲۰۲.۱۷۰۳	۳۶۵.۸۰۱۰
۴۰	۳۱.۲۱۰۲	۶۴.۲۵۷۰	۱۱۵.۴۷۵۷	۲۱۵.۵۶۸۶
۵۰	۲۰.۰۴۱۲	۴۱.۲۸۰۴	۷۴.۴۴۴۴	۱۴۱.۰۲۷۰



شکل ۲: مقایسه فرکانس‌های مدهای مختلف برای نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت برای نانو صفحه میندیلین (  $a/b=1, a/h=30$  )  
( $h=0.34$ )



شکل ۳: مقایسه فرکانس‌های مدهای مختلف برای نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت برای نانو صفحه میندیلین (  $a/b=1.5, a/h=30$  )  
( $h=0.34$ )

جدول ۷: مقایسه فرکانس‌های مدهای مختلف برای نسبت طول به ضخامت متفاوت برای نانو صفحه میندیلین (  $a/b=0.5, l/h=1, h=0.34$  )

Mode	$a/h$			
	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
$\omega_{11}$	۲۸۰.۴۱۵۳	۱۲۸.۰۲۱۷	۷۲.۷۲۱۹	۴۶.۷۵۷۵
$\omega_{12}$	۴۳۶.۵۳۷۸	۲۰۲.۱۷۰۳	۱۱۵.۴۷۵۷	۷۴.۴۴۴۴
$\omega_{21}$	۸۶۰.۲۹۸۰	۴۱۳.۹۲۵۲	۲۴۰.۰۵۰۴	۱۵۵.۹۲۷۲
$\omega_{22}$	۹۸۸.۵۰۸۷	۴۸۱.۲۴۸۴	۲۸۰.۴۱۵۳	۱۸۲.۵۸۲۷
$\omega_{33}$	۱۸۴۴.۹۰۵۶	۹۸۸.۵۰۸۷	۵۹۶.۸۰۶۹	۳۹۵.۷۰۹۱

جدول ۸: مقایسه فرکانس‌های مودهای مختلف برای نسبت طول به ضخامت متفاوت برای نانو صفحه میندلین ( $a/b=1, l/h=1, h=0.34$ )

Mode	a/h			
	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
$\omega_{11}$	۱۱۵.۴۷۵۷	۵۱.۹۰۵۲	۲۹.۳۱۴۵	۱۸.۷۹۶۵
$\omega_{12}$	۲۸۰.۴۱۵۳	۱۲۸.۰۲۱۷	۷۲.۷۲۱۹	۴۶.۷۵۷۵
$\omega_{21}$	۲۸۰.۴۱۵۳	۱۲۸.۰۲۱۷	۷۲.۷۲۱۹	۴۶.۷۵۷۵
$\omega_{22}$	۴۳۶.۵۳۷۸	۲۰۲.۱۷۰۳	۱۱۵.۴۷۵۷	۷۴.۴۴۴۴
$\omega_{33}$	۹۰۳.۷۰۹۴	۴۳۶.۵۳۷۸	۲۵۳.۵۶۷۴	۱۶۴.۸۳۹۷

جدول ۹: مقایسه فرکانس‌های مودهای مختلف برای صفحات مختلف و نسبت طول به ضخامت متفاوت ( $a/b=1, l/h=1$ )

Mode	a/h			
	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
<i>Mindlin plate</i>				
$\omega_{11}$	۴۳۶.۵۳۷۸	۱۱۵.۴۷۵۷	۵۱.۹۰۵۲	۲۹.۳۱۴۵
$\omega_{21}$	۹۸۸.۵۰۸۷	۲۸۰.۴۱۵۳	۱۲۸.۰۲۱۷	۷۲.۷۲۱۹
$\omega_{12}$	۹۸۸.۵۰۸۷	۲۸۰.۴۱۵۳	۱۲۸.۰۲۱۷	۷۲.۷۲۱۹
$\omega_{22}$	۱۴۴۴.۵۲۵۰	۴۳۶.۵۳۷۸	۲۰۲.۱۷۰۳	۱۱۵.۴۷۵۷
<i>Kirchhoff plate</i>				
$\omega_{11}$	۲۷۹.۴۸۲۵۱	۷۰.۲۹۸۵۵	۳۱.۲۷۹۴۰	۱۷.۶۰۱۶۹
$\omega_{21}$	۶۹۰.۳۷۷۲	۱۷۵.۲۰۹۰	۷۸.۰۹۱۷	۴۳.۹۷۰۴
$\omega_{12}$	۶۹۰.۳۷۷۲	۱۷۵.۲۰۹۰	۷۸.۰۹۱۷	۴۳.۹۷۰۴
$\omega_{22}$	۱۰۹۱.۷۴۲۴	۲۷۹.۴۸۲۵	۱۲۴.۷۷۶۶	۷۰.۲۹۸۵
<i>Third order shear deformation plate</i>				
$\omega_{11}$	۲۷۶.۵۸۲۶	۷۰.۱۰۴۹	۳۱.۲۴۰۷	۱۷.۵۸۹۴
$\omega_{12}$	۶۷۴.۳۸۳۶	۱۷۴.۰۳۸۵	۷۷.۸۵۳۳	۴۳.۸۹۴۱
$\omega_{21}$	۶۷۴.۳۸۳۶	۱۷۴.۰۳۸۵	۷۷.۸۵۳۳	۴۳.۸۹۴۱
$\omega_{22}$	۱۰۵۵.۳۲۱۱	۲۷۶.۵۸۲۶	۱۲۴.۱۷۵۲	۷۰.۱۰۴۹

## ۱۰- نتیجه گیری:

در این مقاله به بررسی خمش و ارتعاشات نانو صفحه میندلین گرافنی با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده پرداخته شد. همان‌گونه که در جداول و اشکال دیدیم میزان خمش نانوصفحه میندلین تحت اثر بار یکنواخت صفحه‌ای با افزایش پارامتر مقیاس طول نسبت به ضخامت کم می‌شود. همچنین با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان خمش زیاد می‌شود. همچنین میزان خمش بدون بعد برای نانو صفحه کیرشهف بیشترین مقدار و برای نانو صفحه میندلین کمترین مقدار است. همچنین فرکانس‌های مودهای مختلف نانو صفحه میندلین با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه کاهش می‌یابد. همچنین هنگامی که اثر پارامتر اندازه در نظر گرفته

نشود(تئوری کلاسیک) میزان فرکانس ، کمترین میزان است و با افزایش اثر اندازه، فرکانس نیز افزایش پیدا می کند. همچنین میزان فرکانس برای مود اول کمترین مقدار است و برای مودهای بعد افزایش پیدا می کند. همچنین با افزایش نسبت ابعاد صفحه میزان فرکانس ارتعاشی نانوصفحه میندلین کاهش می یابد. همچنین میزان فرکانس برای نانو صفحه میندلین بیشترین مقدار و برای نانو صفحه مرتبه سوم کمترین مقدار است.

#### مراجع:

1. Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., Tong, P., " Couple stress Based Strain gradient theory for elasticity".Int.J.Solids Struct.39, pp. 2731–2743,( 2002).
2. Toupin, R.A., "Elastic materials with couple stresses".Arch.Rational Mech.Anal.11, pp. 385–414, (1962).
3. Mindlin, R.D., Tiersten, H.F., " Effects of couple-stresses in linear elasticity" Arch. Rational Mech. Anal.11, pp. 415–448, (1962).
4. Koiter, W.T., "Couple stresses in the theory of elasticity",I and II.Proc .K. Ned. Akad .Wet. (B) 67, pp. 17–44, (1964).
5. Mindlin, R.D., "Micro-structure in linear elasticity".Arch.RationalMech.Anal .16, pp. 51–78, (1964).
6. Tsiatas.G.C , "A new kirchhoff model based on a modified couple stress theory",International Journal of solids and structures,No.46, pp2757-2764,(2009)
7. Tai.T, HoChoi.D, "size-dependent functionally graded kirchhoff and mindlin plate theory based on a modified couple stress theory",Composite Structures,No.95,pp142-153,(2013).
8. B.Akgoz, Omer Civalek "Free vibration analysis for single –layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory"materials and design No.42,pp 164-171, ( 2012)
9. Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X , "Asize-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory",European Journal of mechanics A/Solids, No.30,pp 517-524, (2011)
10. Tai.T, HoChoi.D, "size-dependent functionally graded kirchhoff and mindlin plate theory based on a modified couple stress theory",Composite Structures,No.95,pp142-153,(2013).
11. B.Akgoz, Omer Civalek "Free vibration analysis for single –layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory"materials and design No.42,pp 164-171,( 2012)
12. Roque.C.M.C, Ferreira.A.J.M, Reddy.J.N, "Analysis of mindlin micro plates with a modified couple stress theory and meshlessmethod", Applied Mathematical Modeling, No.37, pp 4626-4633, (2013).