



ISAV2020

دومین کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات

تهران - ایران ۲۹-۳۰ بهمن ماه ۱۳۹۹



بررسی ارتعاشات نانو صفحه مستطیلی مرتبه N ام با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح شده و روش حل ناویر

مجید اسکندری شهرکی^{۱*}، محمود شریعتی^۲، محسن حیدری بنی^۳، جعفر اسکندری جم^۴، بهزاد بیاتی چالشتی^۵

^۱ ایران، مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، کدپستی ۹۱۷۷۹۴۸۹۷۴، دانشجوی دکتری مهندسی هوافضا.

^۲ ایران، مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، کدپستی ۹۱۷۷۹۴۸۹۷۴، استاد مهندسی مکانیک.

^۳ ایران، تهران، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، کدپستی ۱۷۷۴-۱۵۸۷۵، دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک

^۴ ایران، تهران، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، کدپستی ۱۷۷۴-۱۵۸۷۵، استاد مهندسی مکانیک

^۵ ایران، تهران، دانشگاه تهران، کدپستی ۱۴۱۷۹۳۵۸۴۰، دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک بیوسیستم

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: mjdeskandari@gmail.com

چکیده

در این مقاله، با استفاده از تئوری غیرکلاسیک کوپل تنش اصلاح شده، اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاشات نانو ورق مورد بررسی قرار گرفته است. جهت بدست آوردن فرکانس های طبیعی ورق در مقیاس نانو از تئوری تنش کوپل اصلاح شده با بکارگیری فرضیات تئوری تغییر شکل برشی مرتبه N ام استفاده شده است. در تئوری کوپل تنش اصلاح شده، چگالی انرژی کرنشی تابعی از مولفه های تانسور کرنش، تانسور انحناء، تانسور تنش و قسمت متقارن تانسور تنش کوپل می باشد. بعد از به دست آوردن انرژی کرنشی، جنبشی و کار خارجی و قرار دادن آنها در اصل همیلتون، معادلات اصلی و کمکی نانو صفحه به دست آورده می شود. سپس با جایگذاری شرایط مرزی و نیرویی در معادلات حاکم به بررسی ارتعاشات نانو صفحه مرتبه N ام مستطیلی به ضخامت h با تکیه گاه ساده در اطراف می پردازیم. روش حل نیز روش ناویر می باشد.

کلمات کلیدی: تئوری تنش کوپل اصلاح شده؛ صفحه مرتبه N ام؛ نانو صفحه مستطیلی؛ روش حل ناویر؛ ارتعاشات.

۱- تئوری کوپل تنش اصلاح شده:

یانگ و همکارانش [۱] در سال ۲۰۰۲ با اصلاح کردن تئوری کوپل تنش که توسط توپین [۲]، میندلین و تیرستن [۳]، کوپتر [۴] و میندلین [۵] در سال ۱۹۶۴ ارائه شد، یک مدل کوپل تنش اصلاح شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول ماده^۱ برای تصویر کردن اثر اندازه می باشد را پیشنهاد کردند، در حالیکه تئوری کوپل تنش کلاسیک دارای دو پارامتر مقیاس طول ماده است. در تئوری کوپل تنش اصلاح شده، چگالی انرژی کرنشی در مختصات قائم سه بعدی برای جسمی که محدود به حجم V و سطح Ω می باشد به صورت زیر بیان می شود [۶]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

که در آن:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (3)$$

χ_{ij} و ε_{ij} به ترتیب قسمت متقارن تانسور انحنا و تانسور کرنش هستند. u_i و θ_i به ترتیب بردار جابه جایی و بردار چرخشی تعریف شده اند.

$$\theta = \frac{1}{2} \text{Curl } u \quad (4)$$

σ_{ij} و m_{ij} به ترتیب تانسور تنش و قسمت انحرافی تانسور کوپل تنش هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

$$m_{i,j} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \quad (6)$$

که در آن λ و μ ثوابت لامه، δ_{ij} دلتای کرونگر و l پارامتر مقیاس طول ماده می باشد. از معادله (۳) و (۶) می توان دریافت که χ_{ij} و m_{ij} متقارن هستند.

۲- مدل صفحه مرتبه N ام:

معادلات جابه جایی برای صفحه مرتبه N ام به صورت زیر تعریف می شوند:

$$u_1(x, y, z, t) = z \varphi_x(x, y, t) - \frac{1}{n} \left(\frac{z}{h}\right)^{n-1} z^n \left(\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + \varphi_x(x, y, t)\right)$$

$$u_2(x, y, z, t) = z \varphi_y(x, y, t) - \frac{1}{n} \left(\frac{z}{h}\right)^{n-1} z^n \left(\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} + \varphi_y(x, y, t)\right) \quad (7)$$

$$n=3, 5, 7, 9, \dots$$

$$u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t)$$

که در آن φ_x و φ_y چرخش بردار نرمال حول محور x و y و w میزان جابه جایی نقطه میانی صفحه در راستای محور z می باشد. تغییرات انرژی کرنشی به صورت زیر بیان می شود:

¹Material length scale parameter

$$\delta U = \int_V \left(\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + 2\sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz} + m_{xx} \delta x_{xx} + m_{yy} \delta x_{yy} + m_{zz} \delta x_{zz} + 2m_{xy} \delta x_{xy} + 2m_{xz} \delta x_{xz} + 2m_{yz} \delta x_{yz} \right) dV \quad (8)$$

۳- معادله کار مجازی که توسط نیروی خارجی حاصل می‌گردد [۷]:

کار مجازی که توسط نیروی خارجی انجام می‌گیرد به صورت زیر است:

$$\delta w = \int_0^a \int_0^b q(x,y) \delta w(x,y) dx dy \quad (9)$$

تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta T = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_3 \delta \dot{u}_3) dA dz \quad (10)$$

که ρ چگالی می‌باشد. همچنین با استفاده از اصل همیلتون داریم [۸]:

$$\int_0^T (\delta T - (\delta U - \delta w)) dt = 0 \quad (11)$$

که در آن T انرژی جنبشی، U انرژی کرنشی و W کار نیروهای خارجی می‌باشد.

۴- معادله نهایی صفحه با اعمال نیروی کماتش و نیروی خارجی

با به کارگیری اصل همیلتون (معادله ۱۱) معادلات اصلی مطابق زیر به دست می‌آیند:

$$\left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - \frac{\partial F_4}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F_5}{\partial y} \right) dz \right] \quad (12)$$

$$= q(x,y) + \rho I_0 w_{,tt} - A_6^2 \rho I_{2n} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{,tt} + A_6 \rho J_{n+1} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right)_{,tt}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial^2 F_6}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_9}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F_{12}}{\partial y} - \frac{\partial F_{10}}{\partial x} + F_{14} \right) dz = \rho K_2 \varphi_{x,tt} - A_6 \rho J_{n+1} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{,tt} \quad (13)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial^2 F_7}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_8}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F_{11}}{\partial y} + F_{15} \right) dz = \rho K_2 \varphi_{y,tt} - A_6 \rho J_{n+1} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{,tt} \quad (14)$$

که در آن‌ها داریم:

$$J_1 = I_1 - A_6 I_n \quad (15)$$

$$J_{n+1} = I_{n+1} - A_6 I_{2n} \quad (16)$$

$$K_2 = I_2 - 2A_6 I_{n+1} - A_6^2 I_{2n} \quad (17)$$

۵- به دست آوردن معادلات صفحه مرتبه N ام در کلی‌ترین حالت

معادلات کلی صفحه مرتبه N ام به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + B_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_4 \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x^3} + B_4 \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial y^2} + B_4 \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial x^2} + B_3 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + B_3 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + B_4 \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y^3} \quad (18)$$

$$= q(x,y) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - B_{11} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + B_{12} \left(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right)$$

$$-B_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_5 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y \partial x} + B_6 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_7 \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x \partial y^3} - B_7 \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial y^4} + B_7 \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial y \partial x^3} - B_7 \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial y^2 \partial x^2} \quad (19)$$

$$- B_3 \frac{\partial w}{\partial x} - B_3 \varphi_x - B_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_8 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} = -B_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + B_{13} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$-B_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + B_9 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y \partial x} + B_{10} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + B_7 \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x^4} + B_7 \frac{\partial^4 \varphi_y}{\partial x^2 \partial y^2} - B_7 \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial y \partial x^3} - B_7 \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial x \partial y^3} \quad (20)$$

$$- B_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - B_3 \frac{\partial w}{\partial y} - B_3 \varphi_y + B_8 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = -B_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} + B_{13} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

۶- روش حل ناویر

روش حل ناویر برای صفحات مستطیلی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در همه لبه‌ها قابل استفاده است. به خاطر اینکه شرایط مرزی خودبه‌خود در این روش ارضا می‌شوند توابع مجهول سطح میانی صفحه به صورت سری‌های دوگانه مثلثاتی به صورت زیر بیان می‌شوند [۹ و ۱۰]:

$$W(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t} \quad (21)$$

$$\varphi_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t} \quad (22)$$

$$\varphi_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t} \quad (23)$$

نیرو نیز از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t} \quad (24)$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y dx dy \quad (25)$$

ماتریس کلی معادلات صفحه مرتبه N ام به همراه معادلات کمکی به شکل زیر حاصل خواهند شد:

$$\left(\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_4 & M_5 & M_6 \\ M_7 & M_8 & M_9 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ N_4 & N_5 & N_6 \\ N_7 & N_8 & N_9 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

جنس صفحه را مواد مختلفی از جمله اپوکسی، گرافن، مس و ... در نظر می‌گیرند. در این مقاله جنس صفحه را گرافن در نظر می‌گیریم. یک صفحه گرافن تک لایه دارای خصوصیات زیر است [۱۱]:

$$E = 1.06 \text{TPa}, \nu = 0.25, h = 0.34 \text{nm}, \rho = 2250 \text{kg/m}^3$$

که در آن E مدول یانگ و λ و μ ضرایب لامه هستند [۱۲]. همچنین مقدار نیرو را $q = 1 \text{N/m}^2$ در نظر می‌گیریم.

۷- نتایج و بحث:

برنامه محاسباتی در نرم‌افزار Matlab نوشته شده و نتایج با استفاده از این برنامه به دست آمده‌اند. کلیه شرایط مرزی نیز به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده‌اند.

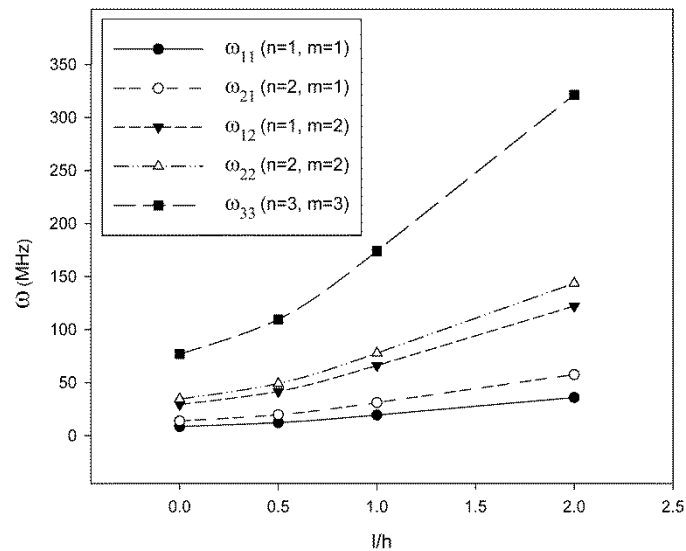
جدول (۱) نشان می‌دهد فرکانس‌های مود اول (ω_{11}) نانو صفحه مرتبه N ام با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش می‌یابد. همچنین هنگامی که اثر پارامتر اندازه در نظر گرفته نشود (تئوری کلاسیک) میزان فرکانس، کمترین میزان است و با افزایش اثر اندازه، فرکانس نیز افزایش پیدا می‌کند.

شکل (۱) نشان می‌دهد فرکانس مودهای مختلف نانو صفحه مرتبه N ام با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت نانو صفحه افزایش می‌یابد.

جدول (۲) به مقایسه فرکانس مودهای مختلف برای نانو صفحه مرتبه N ام با درجات متفاوت می‌پردازد. همان‌گونه که می‌بینیم با افزایش مرتبه نانو صفحه میزان ارتعاشی نیز افزایش می‌یابد.

جدول ۱: مقایسه فرکانس‌های مود اول برای نسبت طول به ضخامت و پارامتر طول به ضخامت متفاوت برای نانو صفحه مرتبه N ام
(a/b=1)(MHz)

l/h	a/h			
	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
۰	۱۲۱.۶۳۴۲	۳۱.۲۱۶۱	۱۳.۹۴۴۱	۷.۸۵۷۶
۰.۵	۱۷۳.۸۹۱۱	۴۴.۲۶۹۹	۱۹.۷۴۴۷	۱۱.۱۲۰۲
۱	۲۷۶.۵۸۲۶	۷۰.۱۰۴۹	۳۱.۲۴۰۷	۱۷.۵۸۹۴
۲	۵۱۱.۳۱۰۷	۱۲۹.۳۵۳۹	۵۷.۶۲۲۳	۳۲.۴۳۸۷



شکل ۱: مقایسه فرکانس مودهای مختلف برای نسبت پارامتر طول به ضخامت متفاوت برای نانو صفحه مرتبه N ام (MHz)

$$(a/b=2, a/h=30)$$

جدول ۲: مقایسه فرکانس مودهای مختلف برای نانو صفحه مرتبه N ام با درجات متفاوت (a/b=1, a/h=5)(MHz)

Mode	n			
	۷	۹	۱۱	۱۳
ω_{11}	۱۰۶۳.۳۱۴۱	۱۰۶۷.۳۹۵۱	۱۰۷۰.۵۴۸۰	۱۰۷۳.۰۱۴۰
ω_{12}	۲۴۹۱.۳۷۸۷	۲۵۰۷.۹۶۰۴	۲۵۲۰.۹۵۵۵	۲۵۳۱.۲۱۳۸
ω_{21}	۲۴۹۱.۳۷۸۷	۲۵۰۷.۹۶۰۴	۲۵۲۰.۹۵۵۵	۲۵۳۱.۲۱۳۸
ω_{22}	۳۷۹۵.۵۳۵۵	۳۸۲۵.۲۶۵۱	۳۸۴۸.۶۸۲۳	۳۸۶۷.۲۰۶۳
ω_{33}	۷۶۶۸.۸۷۷۶	۷۷۲۴.۶۷۶۳	۷۷۶۷.۷۱۵۸	۷۸۰۱.۰۷۶۰

۸- نتیجه گیری:

در این مقاله به بررسی ارتعاشات نانو صفحه مرتبه N ام با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده پرداخته شد. همان گونه که در جداول و اشکال دیدیم فرکانس های مودهای مختلف نانو صفحه مرتبه N ام با افزایش نسبت طول به ضخامت نانو صفحه کاهش می یابد. همچنین هنگامی که اثر پارامتر اندازه در نظر گرفته نشود (تئوری کلاسیک) میزان فرکانس، کمترین میزان است و با افزایش اثر اندازه، فرکانس نیز افزایش پیدا می کند. همچنین با افزایش مرتبه نانو صفحه میزان فرکانس ارتعاشی نیز افزایش می یابد.

مراجع:

1. Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., Tong, P., " Couple stress Based Strain gradient theory for elasticity". Int.J.Solids Struct.39, pp. 2731–2743,(2002).
2. Toupin, R.A., "Elastic materials with couple stresses". Arch.Rational Mech.Anal.11, pp. 385–414, (1962).
3. Mindlin, R.D., Tiersten, H.F., " Effects of couple-stresses in linear elasticity" Arch. Rational Mech. Anal.11, pp. 415–448, (1962).
4. Koiter, W.T., "Couple stresses in the theory of elasticity", I and II. Proc .K. Ned. Akad .Wet. (B) 67, pp. 17–44, (1964).
5. Mindlin, R.D., "Micro-structure in linear elasticity". Arch.RationalMech.Anal. 16, pp. 51–78, (1964).
6. Tsiatas.G.C , "A new kirchhoff model based on a modified couple stress theory", International Journal of solids and structures, No.46, pp2757-2764,(2009)
7. Tai.T, HoChoi.D, "size-dependent functionally graded kirchhoff and mindlin plate theory based on a modified couple stress theory", Composite Structures, No.95, pp142-153,(2013).
8. B.Akgoz, Omer Civalek "Free vibration analysis for single –layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory" materials and design No.42, pp 164-171,(2012)
9. Wang.B ,Zhou.S ,Zhao.J ,Chen.X , "A size-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory", European Journal of mechanics A/Solids, No.30, pp 517-524, (2011)
10. Tai.T, HoChoi.D, "size-dependent functionally graded kirchhoff and mindlin plate theory based on a modified couple stress theory", Composite Structures, No.95, pp142-153,(2013).
11. B.Akgoz, Omer Civalek "Free vibration analysis for single –layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory" materials and design No.42, pp 164-171,(2012)

12. Roque.C.M.C, Ferreira.A.J.M, Reddy.J.N,"Analysis of mindlin micro plates with a modified couple stress theory and meshlessmethod", Applied Mathematical Modeling, No.37, pp 4626-4633, (2013).