



Kharazmi University

## Using generalized confidence Intervals to compare two processes capability indices

Mehdi Jabbari Nooghabi<sup>1</sup>, Nasrin Talkhi<sup>2</sup>, Zohreh Parvaneh<sup>3</sup>

1. Department of Statistics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

✉E-mail: [jabbarinm@um.ac.ir](mailto:jabbarinm@um.ac.ir)

2. Department of Biostatistics, School of Health, Mashhad University of Medical Sciences, Mashhad, Iran.

E-mail: [talkhin961@mums.ac.ir](mailto:talkhin961@mums.ac.ir)

3. Department of Statistics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

E-mail: [zo.parvaneh@alumni.um.ac.ir](mailto:zo.parvaneh@alumni.um.ac.ir)

---

### Article Info

### ABSTRACT

---

#### Article type:

Research Article

#### Article history:

Received:

1 May 2019

Received in revised form:

18 June 2021

Accepted:

11 July 2021

Published online:

20 June 2023

#### Keywords:

Generalized

confidence

interval,

Process capability

indices,

lower

specification

limits,

upper specification

limit,

target value.

#### Introduction

When the production process is under statistical control, process capability indices are used to measure process capability. In the past, manufacturers used histograms, frequency charts, and quality control charts to compare process data with technical specifications.

Today, the concept of efficiency ratio is called process capability index and was first proposed by Juran et al. (1974). He introduced the first and foremost process capability index,  $C_p$ . Then Kane (1986) introduced the  $C_{pk}$  capability index to address the limitations of  $C_p$ . The  $C_{pm}$  capability index is then formally stated by Chan et al. (1988), which complements the  $C_{pk}$  capability index. The  $C_{pmk}$  capability index is a combination of the  $C_{pk}$  and  $C_{pm}$  capability indices introduced by Pearn and Lin (2002). Most evaluations of process capability indices focus only on their points estimation, so it is possible to make unreliable comments about process capability.

In other words, the use of these process capability indicators is an important part of statistical process control applications to achieve continuous quality improvements. These indicators are used to provide a small measure of manufacturing performance in industry or to measure the performance of a product. Many statisticians and quality engineers emphasize research on process capability indicators to suggest more

---

---

effective methods for measuring process capability. The capability index is a measure based on process parameters and specification limit.

So far, confidence intervals for the difference between process capability indices for the two processes have been obtained using pivotal quantity method and also using the bootstrap resampling simulation method.

In situations such as selecting a supplier and assessing process improvement, it is of interest to compare capability indices for two different processes.

### **Material and Methods**

In this paper, first, a generalized confidence interval for the  $C_{pmk}$  capability indices ratio of two different processes is presented and then this comparison is performed by performing an appropriate hypothesis test and providing an example.

To compare the  $C_{pmk}$  index in the two processes, the confidence interval structures are not accurate and the confidence intervals are obtained only according to approximate methods. Due to the importance of using the  $C_{pmk}$  index, then the generalized confidence interval for  $\frac{C_{pmk1}}{C_{pmk2}}$  is presented and using the confidence interval obtained for the ratio variable, the relevant hypothesis test is tested.

The generalized confidence interval idea was first proposed by Weerahandi (1995). When there is no standard pivotal quantity or it is difficult to obtain it, the use of the generalized confidence interval method will be more valuable. In other words, the definition of a confidence interval is generalized when we are faced with problems such as constructing exact confidence regions for the difference between the mean of two normal distributions without assuming equality of variance.

In addition, using simulating, the generalized confidence interval was compared with the bootstrap confidence interval. Bootstrap sampling was introduced in 1979 by Efron. In this paper, the standard bootstrap confidence interval and percentile bootstrap for the  $\frac{C_{pmk1}}{C_{pmk2}}$  ratio is also calculated.

### **Results**

The simulation results were performed using 5000 replications for the generalized confidence interval and 1000 times for the bootstrap confidence interval, and the coverage probability (CR) and mean distance length (AL) were also calculated. The SB-CI, PB-CI, G-CI are the standard bootstrap confidence interval, the percentile bootstrap confidence interval, and the generalized confidence interval, respectively. In this simulation, two different samples of the same size and the normal distribution were

---

---

performed for three different samples of size (20, 40 and 60). The simulation results showed that the generalized confidence interval works better than the bootstrap confidence interval. Therefore, the confidence interval presented in this paper can be generalized to compare the capability indices of several processes or pairwise comparisons. In addition, the data in the used example in this paper, taken from Chen and Tong (2003), are from two suppliers who prepare aluminum foil for an electronics company in Taiwan. Aluminum foil as a key component determines the quality of batteries and voltage is one of the most important quality characteristics of aluminum foil. The generalized confidence interval of  $(1-\alpha)*100\%$  for the  $C_{pmk}$  ratio of the two processes when  $\alpha = 0.05$  was obtained as (1.741, 3.387), which indicates that process 1 is more efficient than process 2.

### Conclusion

Generalized pivotal quantity and generalized confidence intervals are very useful tools for inferring industrial statistics problems. Process capability indices are important quantities that are used to determine the process efficiency of manufactured products. According to the results obtained for the  $C_{pmk}$  ratio in the two communities, it can be seen that the generalized confidence interval can be well used to compare the performance of the two processes.

---

**How to cite:** Jabbari Nooghabi, M., Talkhi, N., Parvaneh, Z. (2023). Using generalized confidence Intervals to compare two processes capability indices. *Mathematical Researches*, 9 (1), 72-84.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---



Kharazmi University

مقایسه شاخص قابلیت  $C_{pmk}$  دو فرآیند به کمک فاصله اطمینان تعمیم یافتهمهدی جباری نوقابی<sup>۱</sup>، نسرين تلخی<sup>۲</sup>، زهره پروانه<sup>۳</sup>۱. نویسنده مسئول، گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران. رایانامه: [jabbarinm@um.ac.ir](mailto:jabbarinm@um.ac.ir)۲. گروه آمار زیستی، دانشکده بهداشت، دانشگاه علوم پزشکی مشهد، مشهد، ایران. رایانامه: [talkhin961@mums.ac.ir](mailto:talkhin961@mums.ac.ir)۳. گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران. رایانامه: [zo.parvaneh@alumni.um.ac.ir](mailto:zo.parvaneh@alumni.um.ac.ir)

## چکیده

## اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

اولین و اصلی ترین شاخص قابلیت فرآیند،  $C_p$  توسط جوران و پس از آن برای رفع معایب  $C_p$  شاخص قابلیت  $C_{pmk}$  و بعد از آن شاخص قابلیت  $C_{pm}$  توسط چان و همکاران به صورت رسمی بیان شده است. شاخص قابلیت  $C_{pmk}$  ترکیبی از شاخص های قابلیت  $C_{pm}$  و  $C_p$  است و توسط پیرن و همکارن (۲۰۰۲) معرفی شده است. شاخص های قابلیت فرآیند یا  $C_{pmk}$  که ترکیبی از شاخص های قابلیت  $C_{pm}$  و  $C_p$  هستند، ابزاری برای اندازه گیری کارایی فرآیند در تولید هستند. تاکنون فواصل اطمینان برای تفاوت بین شاخص های قابلیت فرآیند برای دو فرآیند با استفاده از روش کمیت محوری تعمیم یافته و همچنین با استفاده از روش شبیه سازی بازنمونه گیری بوت استرپ به دست آمده اند. در حالت هایی مثل انتخاب تامین کننده ی بهتر و ارزیابی پیشرفت فرآیند، مقایسه ی شاخص های قابلیت دو فرآیند متفاوت می تواند مورد توجه قرار گیرد. در این مقاله ابتدا یک فاصله اطمینان تعمیم یافته برای نسبت شاخص قابلیت  $C_{pmk}$  دو فرآیند متفاوت ارائه می شود و سپس با انجام آزمون فرضیه ی مناسب و ارائه یک مثال، این مقایسه انجام می شود. علاوه براین با استفاده از شبیه سازی این فاصله اطمینان تعمیم یافته با فاصله اطمینان بوت استرپ مقایسه شد و نتایج نشان داد فاصله اطمینان تعمیم یافته بهتر عمل می کند. شاخص قابلیت  $C_{pmk}$  بر اساس این فرض است که فرآیند مورد نظر دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و انحراف معیار  $\sigma$  است.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۱۱

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۳/۲۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۲۰

تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰

## واژه های کلیدی:

شاخص های قابلیت فرآیند،  
فاصله اطمینان تعمیم یافته،  
حد مشخصه فنی پایین،  
حد مشخصه فنی بالا،  
مقدار هدف.

استناد: جباری نوقابی، مهدی؛ تلخی، نسرين؛ پروانه، زهره؛ (۱۴۰۲). مقایسه شاخص قابلیت  $C_{pmk}$  دو فرآیند به کمک فاصله اطمینان تعمیم یافته.

پژوهش های ریاضی، ۹ (۱)، ۸۴-۵۵.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## ۱. مقدمه

هر کارخانه‌ای محصولاتش را با این هدف که آنها را به مشتریان زیادی به فروش برساند و به سود بیشتری دست یابد، تولید می‌کند. مصرف‌کنندگان تنها محصولاتی را که با انتظاراتشان مطابقت دارد تقاضا می‌کنند. بنابراین، فرآیند تولید باید قابلیت تولید محصولی با کیفیت مورد انتظار را داشته باشد. هنگامی که فرآیند تولید تحت کنترل آماری است، شاخص‌های قابلیت فرآیند برای اندازه‌گیری قابلیت فرآیند به کار برده می‌شوند. در گذشته تولیدکنندگان برای مقایسه داده‌های فرآیند با حدود مشخصات فنی از هیستوگرام، نمودار فراوانی و نمودارهای کنترل کیفیت استفاده می‌کردند. در این روش داده‌های یک فرآیند تحت کنترل آماری به شیوه‌ای اصولی گردآوری و روی این نمودارها رسم می‌شوند و در نتیجه قضاوت در مورد کارایی فرآیند به صورت چشمی و براساس ارتباط بین توزیع فرآیند و حدود مشخصات فنی بود. مفهوم نسبت کارایی که اکنون شاخص قابلیت فرآیند نامیده می‌شود برای اولین بار توسط جوران و همکاران (۱۹۷۴) مطرح شده است. او اولین و اصلی‌ترین شاخص قابلیت فرآیند،  $C_p$  را معرفی کرد. سپس کین (۱۹۸۶) برای رفع معایب  $C_p$ ، شاخص قابلیت  $C_{pk}$  را معرفی کرده است. و بعد از آن شاخص قابلیت  $C_{pm}$  توسط چان و همکاران (۱۹۸۸) به صورت رسمی بیان شده است که تکمیل‌کننده شاخص قابلیت  $C_{pk}$  است. شاخص قابلیت  $C_{pmk}$  ترکیبی از شاخص‌های قابلیت  $C_{pk}$  و  $C_{pm}$  است که توسط پیرن و لین (۲۰۰۲) معرفی شده است. بیشترین ارزیابی در مورد شاخص‌های قابلیت فرآیند تنها روی برآورد نقطه‌ای آن‌ها متمرکز است و بنابراین این امکان وجود دارد که اظهارنظرهای غیرقابل اعتمادی درباره‌ی قابلیت فرآیند صورت پذیرد. به عبارت دیگر استفاده از این شاخص‌های قابلیت فرآیند بخش مهمی از کاربردهای کنترل فرآیندهای آماری برای دستیابی به پیشرفت‌های مستمر در کیفیت به شمار می‌رود. این شاخص‌ها برای فراهم آوردن یک اندازه کمی از عملکرد ساخت در صنایع و یا اندازه‌گیری کارایی یک محصول به کار برده می‌شوند. بسیاری از آماردان‌ها و مهندسين کیفیت بر پژوهش روی شاخص‌های قابلیت فرآیند به منظور پیشنهاد روش‌های مؤثرتری در مورد سنجش قابلیت فرآیند تأکید می‌کنند. شاخص قابلیت یک اندازه بر اساس پارامترهای فرآیند و حدود مشخصات فنی است.

شاخص‌های شناخته شده  $C_p$  و  $C_{pk}$  و  $C_{pm}$  و  $C_{pmk}$  بر اساس این فرض هستند که فرآیند مورد نظر دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و انحراف معیار  $\sigma$  است. اگر  $U$  و  $L$  به ترتیب نشان دهنده‌ی حد مشخصه فنی بالا و پایین (این حدود از پراکندگی مجاز مشخصه‌ی کیفیت در محصول که به وسیله‌ی مهندسان ساخت، مشتری و یا طراحان محصول برای رسیدن به هدف مشخصی و بدون در نظر گرفتن کیفیت عوامل تولیدی و حدود کنترل تعیین می‌گردند. حدود کنترل محدوده‌ای از تغییرپذیری و تلرانس طبیعی فرآیند را نشان می‌دهد که آماره مربوط به کیفیت کالاهای تولیدی در آن محدوده به صورت کاملاً تصادفی نوسان دارند) و  $T$  مقدار هدف (که از قبل توسط محقق تعیین می‌شود و اختلاف میانگین از آن در نظر گرفته می‌شود) باشد [۱۴]، این شاخص‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C_p = \frac{U - L}{6\sigma},$$

$$C_{pk} = \min\left(\frac{U - \mu}{2\sigma}, \frac{\mu - L}{3\sigma}\right),$$

$$C_{pm} = \frac{U - L}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

9

$$C_{pmk} = \frac{\min(U - \mu, \mu - L)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

در این مقاله فرض شده است حدود مشخصات فنی  $(L, U)$  و مقدار هدف  $T$  برای دو فرآیند یکسان است.

یک فاصله اطمینان دقیق برای  $C_p$  با استفاده از توزیع کی دو به دست می‌آید. جهت مقایسه‌ی شاخص  $C_{pmk}$  در دو فرآیند ساختارهای فاصله اطمینان دقیق نیستند و فواصل اطمینان فقط بر حسب روش‌های تقریبی حاصل می‌شود. با توجه به اهمیت استفاده از شاخص  $C_{pmk}$ ، در ادامه فاصله اطمینان تعمیم یافته برای  $\frac{C_{pmk1}}{C_{pmk2}}$  ارائه و با استفاده از فاصله اطمینان به دست آمده برای متغیر نسبت، آزمون فرضیه مربوطه مورد آزمون قرار می‌گیرد.

## ۲. مقایسه شاخص قابلیت $C_{pmk}$ دو فرآیند

در این بخش، شاخص قابلیت  $C_{pmk}$  دو فرآیند با استفاده از روش فاصله اطمینان تعمیم یافته مقایسه می‌شود و برای این منظور، علاقه‌مند به انجام آزمون فرضیه  $H_0 : C_{pmk1} = C_{pmk2}$  در مقابل  $H_1 : C_{pmk1} \neq C_{pmk2}$  هستیم. در ادامه برای آزمون فرضیه ضمن ارائه آماره آزمون، توزیع آماره آزمون نیز ارائه می‌شود.

### ۱.۲. فاصله اطمینان تعمیم یافته

یک جامعه با تابع توزیع تجمعی  $F(x|\zeta)$  را در نظر بگیرید که  $X$  بردار متغیر تصادفی و  $\zeta = (\theta, \delta)$  بردار پارامترهای مجهول است. در حالت خاص  $\theta$  پارامتر مورد علاقه (پارامتری که برای آن فاصله اطمینان به دست آورده می‌شود) و  $\delta$  پارامتر مزاحم است. علاقه‌مند به یافتن برآورد فاصله‌ای برای  $\theta$  بر اساس مقادیر مشاهده شده  $X$  هستیم. برای مثال، در حالتی که متغیر مورد نظر دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  باشد، پیدا کردن کمیت محوری برای توابع خطی از  $\mu$  یا  $\sigma$  مشکل نیست، اما کمیت محوری برای تابعی از پارامترها مثل  $\mu^2 + \sigma^2$  ممکن است وجود نداشته باشد. بنابراین، باید تعریف کمیت محوری متعارف را توسعه داد تا بتوان برآورد فاصله‌ای را به شکل کاربردی مورد استفاده قرار داد. قبل از ارائه فاصله اطمینان تعریف ۱،۲ و قضیه ۱،۲ بیان می‌شود.

تعریف ۱،۲. فرض کنید  $R = r(X; x, \zeta)$  تابعی از  $X$  و  $\zeta$  و تابعی از مقدار مشاهده شده  $X$  نیز باشد. اگر کمیت تصادفی  $R$  در دو شرط زیر صدق کند، آن گاه  $R$  یک کمیت محوری تعمیم یافته است:

۱. توزیع  $R$  به پارامترهای مجهول بستگی نداشته باشد.

۲. کمیت مشاهده شده  $r = r(X; x, \zeta)$  به پارامتر مزاحم  $\delta$  وابسته نباشد.

ایده فاصله اطمینان تعمیم یافته اولین بار توسط ویرهاندی (۱۹۹۵) مطرح شد. وقتی که کمیت محوری متعارف وجود نداشته باشد یا به دست آوردن آن مشکل باشد، استفاده از روش فاصله اطمینان تعمیم یافته ارزش بیشتری خواهد داشت. به عبارت دیگر، زمانی تعریف یک فاصله اطمینان تعمیم داده می شود تا بدون فرض برابری واریانس با مسائلی مانند ساخت نواحی دقیق اطمینان برای اختلاف میانگین دو توزیع نرمال مواجه باشیم.

قضیه ۱،۲. فرض کنید فرآیند ۱ با اندازه نمونه  $n_1$  و فرآیند ۲ با اندازه نمونه  $n_2$  به ترتیب دارای توزیع‌های نرمال با میانگین  $\mu_1$  و  $\mu_2$  و انحراف معیار  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  باشند. اگر  $R_{\mu_i}$  و  $R_{\sigma_i^2}$  به ترتیب کمیت‌های محوری تعمیم یافته برای  $\mu_i$  و  $\sigma_i^2$  باشند به طوری که،

$$R_{\mu} = R_{\mu_i} = \bar{x}_i - \frac{Z_i s_i}{\sqrt{U_i}} \sqrt{\frac{n_i - 1}{n_i}}, \quad i = 1, 2$$

$$R_{\sigma^2} = R_{\sigma_i^2} = \frac{(n_i - 1) s_i^2}{U_i}, \quad i = 1, 2$$

که در آن  $Z_i = \frac{\bar{x}_i - \mu_i}{\sigma_i / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$  و  $U_i = \frac{(n_i - 1) s_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi_{n_i - 1}^2$ ،  $M = \frac{L+U}{2}$ ، آنگاه کمیت محوری تعمیم یافته برای  $\frac{C_{pmk1}}{C_{pmk2}}$  به صورت (۱) است:

(۱)

$$R_{C_{pmk}} = \frac{R_{C_{pmk1}}}{R_{C_{pmk2}}},$$

که در آن  $R_{C_{pmki}}$  کمیت محوری تعمیم یافته برای  $C_{pmki}$  است. به طوری که

$$R_{C_{pmki}} = \frac{(U - L) - |R_{\mu_i} - M|}{3 \sqrt{R_{\sigma_i^2} + (R_{\mu_i} - T)^2}}, \quad i = 1, 2$$

برهان. با توجه به ویژگی کمیت محوری، توزیع  $R_\mu$  و همچنین  $R_{\sigma^2}$  به  $(\mu_i, \sigma_i^2)$  بستگی ندارند، بنابراین، توزیع  $R_{C_{pmki}}$  نیز به  $(\mu_i, \sigma_i^2)$  بستگی ندارد. توزیع  $R_\mu$  و  $R_{\sigma^2}$  در مرجع [۱۳] آمده است. از طرفی  $rC_{pmki} = C_{pmki}$  است، پس  $R_{C_{pmki}}$  یک کمیت محوری تعمیم یافته برای  $i = 1, 2$  است. بنابراین،  $T$  یک کمیت محوری تعمیم یافته برای  $\frac{C_{pmk1}}{C_{pmk2}}$  به صورت زیر است:

(۲)

$$R_{C_{pmk}} = \frac{R_{C_{pmk1}}}{R_{C_{pmk2}}}$$

واضح است که  $rC_{pmk} = \frac{C_{pmk1}}{C_{pmk2}}$  و همچنین توزیع  $R_{C_{pmk}}$  به پارامترهای مجهول بستگی ندارد، بنابراین،  $R_{C_{pmk}}$  کمیت محوری تعمیم یافته برای  $\frac{C_{pmk1}}{C_{pmk2}}$  است.

با توجه به قضیه ۱، ۲ یک فاصله اطمینان تقریبی  $\% (1 - \alpha) \cdot 100$  برای  $\frac{C_{pmk1}}{C_{pmk2}}$  عبارتست از:

(۳)

$$[R_{C_{pmk:\frac{\alpha}{2}}}, R_{C_{pmk:1-\frac{\alpha}{2}}}]$$

که در آن  $R_{C_{pmk:\frac{\alpha}{2}}}$  چندک  $\frac{\alpha}{2}$  و  $R_{C_{pmk:1-\frac{\alpha}{2}}}$  چندک  $1 - \frac{\alpha}{2}$  توزیع  $R_{C_{pmk}}$  است. چون در اینجا نمی‌توان توزیع  $R_{C_{pmk}}$  را به شکل بسته نوشت، بنابراین با استفاده از شبیه سازی چندک‌ها را محاسبه می‌کنیم. اگر  $R_{C_{pmk:\frac{\alpha}{2}}} > 1$  یا  $R_{C_{pmk:1-\frac{\alpha}{2}}} < 1$  باشد، کارایی دو فرآیند متفاوت است [۱۵].

## ۲.۲. فاصله اطمینان بوت‌استرپ

در این بخش به فاصله اطمینان بوت‌استرپ استاندارد و بوت‌استرپ صدکی برای نسبت  $\frac{C_{pmk1}}{C_{pmk2}}$  اشاره می‌کنیم. این نوع نمونه‌گیری در سال ۱۹۷۹ توسط افرون ارایه شد. فواصل اطمینان بوت‌استرپ استاندارد و بوت‌استرپ صدکی  $\% (1 - \alpha) \cdot 100$  به ترتیب عبارتند از:

$$\left( \hat{\theta}^* - z_{1-\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{\theta}^*}, \hat{\theta}^* + z_{1-\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{\theta}^*} \right)$$

$$\left( \hat{\theta}^* \left( \frac{\alpha}{2} * B \right), \hat{\theta}^* \left( \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) * B \right) \right)$$



که در آن  $\hat{e}_j^*$ ،  $\hat{e}^*$  و  $S_{\hat{e}^*}$  به صورت زیر هستند:

$$\hat{e}_j^* = \frac{\hat{C}_{pm1j}^*}{\hat{C}_{pm2j}^*}, \quad \hat{e}^* = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B \hat{e}_j^*, \quad S_{\hat{e}^*} = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{j=1}^B (\hat{e}_j^* - \hat{e}^*)^2}$$

و  $\hat{C}_{pm1j}^*$  و  $\hat{C}_{pm2j}^*$  به ترتیب برآورد  $C_{pm1}$  و  $C_{pm2}$  از  $n$  نمونه بوت استرپ هستند ( $j = 1, \dots, B$ ) [۴].

### ۳. شبیه‌سازی

در این قسمت نتایج شبیه‌سازی برای فاصله اطمینان تعمیم‌یافته و بوت استرپ ارائه می‌شود. این نتایج با استفاده از ۵۰۰۰ بار تکرار برای فاصله اطمینان تعمیم‌یافته و ۱۰۰۰ بار برای فاصله اطمینان بوت استرپ انجام شده است و احتمال پوشش (CR) و متوسط طول فاصله (AL) نیز محاسبه شدند. در این جداول،  $SB - CI$ ،  $PB - CI$ ،  $GB - CI$  به ترتیب فاصله اطمینان بوت استرپ استاندارد، فاصله اطمینان بوت استرپ صدکی و فاصله اطمینان تعمیم‌یافته می‌باشند. در این شبیه‌سازی دو نمونه متفاوت با اندازه یکسان و برابر از توزیع نرمال برای سه نمونه مختلف به اندازه (۲۰ و ۴۰ و ۶۰) انجام شد.  $n_1$  اندازه نمونه فرآیند اول و  $n_2$  اندازه نمونه فرآیند دوم است ( $n = n_1 = n_2$ ). مراحل شبیه‌سازی برای محاسبه احتمال پوشش درست و متوسط طول فاصله به روش اطمینان تعمیم‌یافته برای نسبت  $\frac{C_{pmk1}}{C_{pmk2}}$  بدین شرح صورت گرفته است.

فرآیند ۱ دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu_1$  و واریانس  $\sigma_1^2$  و فرآیند ۲ دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu_2$  و واریانس  $\sigma_2^2$  است. مقادیر حد مشخصه فنی بالا (U) و پایین (L) به ترتیب برابر ۳۵۳ و ۲۷۳ و مقدار هدف T برابر ۳۱۳ می‌باشد.

۱- مقادیر  $C_{pmk1}$ ،  $C_{pmk2}$  و  $a = \frac{C_{pmk1}}{C_{pmk2}}$  به دست آمده است.

۲- نمونه تصادفی به اندازه  $n$  از توزیع نرمال با میانگین  $\mu_i$  و انحراف معیار  $\sigma_i$  و از توزیع کای-دو با درجه آزادی  $n_i - 1$  ( $i = 1, 2$ )، تولید شده است و واریانس‌های دو فرآیند برآورد شده است.

۳- به منظور محاسبه کمیت محوری تعمیم‌یافته، نمونه تصادفی نرمال استاندارد و نمونه تصادفی کای-دو را به صورت  $Z_1 \sim N(0,1)$ ،  $Z_2 \sim N(0,1)$ ،  $U_1 \sim \chi_{n_1-1}^2$  و  $U_2 \sim \chi_{n_2-1}^2$  تولید و سپس کمیت‌های محوری  $R_{C_{pmk1}}$  و  $R_{C_{pmk2}}$  محاسبه شدند.

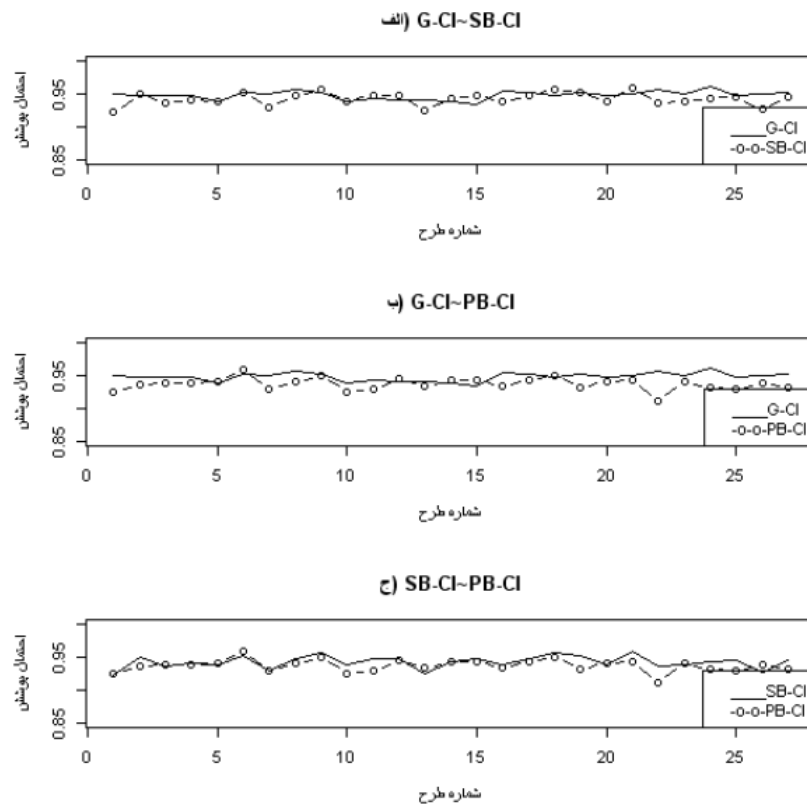
۴- مراحل ۲ و ۳ به اندازه ۱۰۰۰ مرتبه تکرار شدند.

۵-  $R_{C_{pmk1}}(0.025)$ ،  $R_{C_{pmk1}}(0.975)$  در چندک‌های ۲،۵ و ۹۷،۵ توزیع  $R_{C_{pmk}}$  قرار داده شده است که فاصله اطمینان ۹۵٪ برای دو فرآیند محاسبه شده و با ۵۰۰۰ بار تکرار، متوسط طول فاصله اطمینان به دست آمده است.

۶- در هر مرحله از تکرار، مقادیر به دست آمده  $R_{C_{pmk1}}(0.025)$ ،  $R_{C_{pmk1}}(0.975)$  از مرحله ۵ با مقدار به دست آمده  $a$  در مرحله ۱ مقایسه شد. درستی  $a \geq R_{C_{pmk1}}(0.025)$  و  $a \leq R_{C_{pmk1}}(0.975)$  بررسی و با ۵۰۰۰ بار اجرای شبیه سازی احتمال پوشش درست فرآیند محاسبه شده است. این نتایج در جدول ۱ گزارش شده است.

جدول ۱. نتایج شبیه‌سازی در سطح اطمینان ۹۵٪ برای  $C_{pmk1}/C_{pmk2}$ 

$\mu_1$	$\mu_2$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$n$	SB-CI		PB-CI		G-CI		
					CR	AL	CR	AL	CR	AL	
۳۱۰	۳۰۵	۱۰	۹	۲۰	۰.۹۲۲۰	۱.۴۷۸۳	۰.۹۲۶۰	۱.۴۷۶۵	۰.۹۵۰۱	۱.۵۰۷۲	
				۴۰	۰.۹۵۰۰	۱.۰۱۷۳	۰.۹۳۶۰	۱.۰۱۰۲	۰.۹۴۸۲	۱.۰۲۹۳	
				۶۰	۰.۹۳۶۰	۰.۸۲۳۹	۰.۹۳۹۰	۰.۸۲۲۵	۰.۹۴۸۲	۰.۸۳۵۵	
				۲۰	۰.۹۴۲۰	۱.۰۴۲۷	۰.۹۳۸۰	۱.۰۲۷۳	۰.۹۴۸۳	۱.۰۵۷۴	
				۴۰	۰.۹۳۸۰	۰.۷۲۱۹	۰.۹۴۲۰	۰.۷۱۷۷	۰.۹۳۸۷	۰.۷۲۴۱	
				۶۰	۰.۹۵۳۰	۰.۵۸۴۸	۰.۹۵۹۰	۰.۵۸۸۶	۰.۹۵۲۴	۰.۵۸۵۷	
	۲۰	۰.۹۳۰۰	۰.۷۳۸۸	۰.۹۳۰۰	۰.۷۲۷۹	۰.۹۵۰۸	۰.۷۳۲۶				
	۴۰	۰.۹۴۷۰	۰.۵۱۳۶	۰.۹۴۱۰	۰.۵۰۶۵	۰.۹۵۶۵	۰.۵۱۰۱				
	۶۰	۰.۹۵۶۰	۰.۴۱۸۷	۰.۹۵۰۰	۰.۴۱۶۸	۰.۹۵۳۲	۰.۴۱۶۷				
	۳۱۵	۳۰۰	۱۰	۹	۲۰	۰.۹۴۰۰	۲.۳۷۱۶	۰.۹۲۶۰	۲.۳۲۵۹	۰.۹۳۹۶	۲.۳۶۱۸
					۴۰	۰.۹۴۸۰	۱.۶۱۰۱	۰.۹۳۹۰	۱.۵۹۰۷	۰.۹۴۳۴	۱.۶۰۲۵
					۶۰	۰.۹۴۸۰	۱.۲۹۹۶	۰.۹۴۵۰	۱.۲۹۵۴	۰.۹۴۰۲	۱.۳۰۱۲
۲۰					۰.۹۲۶۰	۱.۶۸۱۳	۰.۹۳۴۰	۱.۶۲۷۱	۰.۹۴۲۱	۱.۶۶۵۸	
۴۰					۰.۹۴۳۰	۱.۱۴۷۳	۰.۹۴۳۰	۱.۱۳۴۲	۰.۹۳۹۶	۱.۱۵۳۹	
۶۰					۰.۹۴۹۰	۰.۹۳۲۲	۰.۹۴۴۰	۰.۹۳۳۲	۰.۹۳۴۹	۰.۹۳۱۶	
۲۰	۰.۹۳۸۰	۱.۲۲۵۶	۰.۹۳۴۰	۱.۲۴۰۳	۰.۹۵۳۹	۱.۲۲۰۴					
۴۰	۰.۹۴۸۰	۰.۸۳۷۹	۰.۹۴۴۰	۰.۸۵۸۱	۰.۹۵۲۳	۰.۸۴۹۲					
۶۰	۰.۹۵۷۰	۰.۶۹۳۴	۰.۹۵۱۰	۰.۶۹۲۷	۰.۹۴۷۰	۰.۶۹۲۹۰					
۳۲۰	۲۹۵	۱۰	۹	۲۰	۰.۹۵۲۰	۲.۹۶۰۷	۰.۹۳۲۰	۲.۸۵۲۶	۰.۹۵۲۵	۲.۸۸۴۴	
				۴۰	۰.۹۴۰۰	۱.۹۷۴۵	۰.۹۴۲۰	۱.۹۴۲۳	۰.۹۴۸۷	۱.۹۳۵۱	
				۶۰	۰.۹۵۹۰	۱.۵۷۸۰	۰.۹۴۳۰	۱.۵۵۰۷	۰.۹۵۰۵	۱.۵۷۸۶	
				۲۰	۰.۹۳۶۰	۲.۲۷۰۶	۰.۹۱۲۰	۲.۲۸۱۹	۰.۹۵۶۶	۲.۱۹۹۳	
				۴۰	۰.۹۳۹۰	۱.۵۳۴۵	۰.۹۴۱۰	۱.۵۶۱۳	۰.۹۵۰۲	۱.۴۹۹۵	
				۶۰	۰.۹۴۴۰	۱.۲۵۰۴	۰.۹۳۲۰	۱.۲۴۲۳	۰.۹۶۰۸	۱.۲۳۵۹	
	۲۰	۰.۹۴۶۰	۱.۸۱۵۹	۰.۹۳۰۰	۱.۸۰۱۲	۰.۹۴۷۶	۱.۷۱۷۶				
	۴۰	۰.۹۲۷۰	۱.۲۵۲۵	۰.۹۳۸۰	۱.۲۴۹۱	۰.۹۴۹۴	۱.۲۲۵۴				
	۶۰	۰.۹۴۶۰	۱.۰۱۳۲	۰.۹۳۳۰	۱.۰۱۰۲	۰.۹۵۲۸	۱.۰۰۶۱				



نمودار ۱. نمودار احتمال پوشش فواصل اطمینان برای  $C_{pmk1}/C_{pmk2}$

نمودار ۱ (الف) و (ب) نشان می‌دهد برای فاصله اطمینان  $C_{pmk1}/C_{pmk2}$ ، احتمال پوشش  $G - CI$  حول ۰,۹۵ است و همچنین در بیشتر نقاط احتمال پوشش برابر  $G - CI$  بالاتر از احتمال پوشش  $SB - CI$  و  $PB - CI$  می‌باشد. بنابراین، این نتایج نشان می‌دهد فاصله اطمینان تعمیم‌یافته از فواصل اطمینان بوت‌استرپ استاندارد و صدکی بهتر است. نمودار ۱ (ج) نیز نشان می‌دهد احتمال پوشش  $SB - CI$  و  $PB - CI$  در بسیاری از نقاط معادل هم هستند. بنابراین، فواصل اطمینان بوت‌استرپ استاندارد و صدکی عملکرد یکسانی دارند.

**مثال ۱.** داده‌های جدول ۲ که از چن و تانگ (۲۰۰۳) گرفته شده است، مربوط به دو تأمین کننده است که فویل آلومینیوم را برای یک شرکت الکترونیکی در تایوان آماده می‌کنند. فویل آلومینیوم به عنوان مؤلفه کلیدی، کیفیت باطری‌ها را تعیین می‌کند و ولتاژ نیز یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های کیفی فویل آلومینیوم است. مشخصه‌های تولید ولتاژ ( $U, L, T$ )، به صورت (۵۱۰, ۵۲۰, ۵۳۰) است. اگر ولتاژ خارج از فاصله (۵۱۰, ۵۳۰) باشد، فویل آلومینیوم شکسته خواهد شد و بنابراین پذیرفته

نمی‌شود. پنجاه نمونه تصادفی از تأمین‌کننده‌های ۱ و ۲ توسط بازرس کنترل کیفیت گرفته شده است. فرآیند هر تأمین‌کننده تقریباً نرمال و تحت کنترل آماری است.

فاصله اطمینان تعمیم یافته %  $(1 - \alpha) 100$  برای نسبت  $C_{pmk}$  دو فرآیند وقتی  $\alpha = 0.05$  عبارت است از (1.741, 3.387) که بیانگر کاراتر بودن فرآیند ۱ نسبت به فرآیند ۲ است.

جدول ۲، داده‌های ولتاژ دو تأمین‌کننده برای فویل آلومینیوم. واحد اندازه‌گیری:  $WV^*$ .

تأمین‌کننده ۲					تأمین‌کننده ۱				
522.5	524.4	523.5	521.3	521.7	521.1	517.0	520.1	519.5	519.9
524.2	522.9	524.9	527.1	523.3	521.7	521.2	520.1	518.7	517.1
518.7	517.3	527.5	523.5	523.9	517.2	517.7	522.9	517.9	520.4
520.4	520.4	519.7	521.9	518.7	518.9	518.4	519.1	521.0	520.7
517.5	528.1	517.7	526.8	523.7	520.6	520.3	520.8	518.4	517.9
526.3	518.5	522.6	514.7	523.8	519.6	519.9	520.6	519.0	516.6
520.4	519.6	522.7	524.4	523.2	523.1	522.1	518.3	522.6	519.6
522.2	519.3	524.1	525.2	520.6	521.5	516.5	520.7	519.8	519.9
525.2	520.9	516.7	521.9	520.1	521.3	517.8	518.9	521.2	519.2
526.3	520.9	521.7	523.1	522.6	523.8	522.0	519.5	517.4	521.3

\* حداکثر مقدار ولتاژ خازن را ولتاژ کار خازن یا Working Voltage می‌نامند.

## نتیجه‌گیری

کمیت محوری تعمیم یافته و فاصله اطمینان تعمیم یافته ابزار بسیار مفیدی برای استنباط در مورد مسایل آمار صنعتی می‌باشند. شاخص‌های قابلیت فرآیند کمیت‌های با اهمیتی هستند که برای تعیین کارایی فرآیند محصولات تولیدی استفاده می‌شوند. با توجه به نتایج به دست آمده برای نسبت  $C_{pmk}$  در دو جامعه، ملاحظه می‌شود که فاصله اطمینان تعمیم یافته به خوبی می‌تواند برای مقایسه کارایی دو فرآیند مورد استفاده قرار گیرد. همچنین نتایج شبیه‌سازی نیز نشان داد که فاصله اطمینان تعمیم یافته نسبت به فاصله اطمینان بوت‌استرپ بهتر عمل می‌کند. بنابراین، فاصله اطمینان ارائه شده در این مقاله می‌تواند برای مقایسه شاخص قابلیت چندین فرآیند و یا مقایسه‌های زوجی تعمیم داده شود.

## سپاسگزاری

نویسندگان لازم می‌دانند که از زحمات و تلاش‌های سردبیر محترم و داوران گرامی برای ارائه نظرات مفید که باعث بهبود مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشند.

## References

1. Chen, J. P. and Tong, L. I., (2003), Bootstrap confidence interval of the difference between two process capability indices, *Int J Adv Manuf Technol*, 21:249-256.
2. Kanichukattu, J. K. and Luke, J. A., (2013), Comparison between two process capability indices using generalized confidence intervals, *Int J Adv Manuf Technol*.
3. Kotz, S. and Johnson, N. L., (1993), *Process capability indices*. Chapman and Hall, London.
4. Kotz, S. and Lovelace, C. R., (1988), *Process Capability Indices in Theory and Practice*, Arnold, London.
5. Montgomery, D. C., (2005), *Introduction to Statistical Quality Control*, Wiley, New York, 6th ed.
6. Pearn, W. L. and Kotz, S., (2006), *Encyclopedia and Handbook of Process Capability Indices*, World Scientific, Vol. 12.
7. Kane, Victor E., (1986), *Process capability indices*. *Journal of Quality Technology*, 18:41– 52.
8. Chan, L. K., Cheng, S. W., & Spiring, F. A. (1988). A new measure of process capability: C<sub>pm</sub>. *Journal of Quality Technology*, 20(3), 162-175.
9. Pearn, W. L., & Lin, P. C. (2002). Computer program for calculating the p-value in testing process capability index C<sub>pmk</sub>. *Quality and Reliability Engineering International*, 18(4), 333-342.
10. Juran, J. M., Gryna, F. M. and Bingham, R. S., (1974), *Quality Control Handbook*. McGraw-Hill, New York.
11. Weerahandi, S., (1995), *Exact statistical methods for data analysis*, Springer, New York.
12. Weerahandi, S. (1995). Generalized confidence intervals. In *Exact statistical methods for data analysis* (pp. 143-168). Springer, New York, NY.
13. Kurian, K. M., Mathew, T., & Sebastian, G. (2008). Generalized confidence intervals for process capability indices in the one-way random model. *Metrika*, 67(1), 83-92.
۱۴. پرچمی، ع.؛ ماشین‌چی، م.؛ ۱۳۵۶، کنترل کیفیت آماری، چاپ اول، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.
15. Daniels, L., Edgar, B., Burdick, R. K., & Hubele, N. F. (2004). Using confidence intervals to compare process capability indices. *Quality engineering*, 17(1), 23-32.