

کاربرد طرح عددی با دقت مرتبه بالا بر اساس خانواده ذاتا غیرنوسانی با ضرایب وزنی در الگوریتم فشار-مبنا برای تسخیر ناپیوستگی‌ها

مجتبی بلاج

دانشجوی دکتری، گروه هوافضا، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

محمد حسن جوارشکیان*

استاد، گروه مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

چکیده

در این تحقیق طرح عددی با دقت مرتبه بالا بر مبنای خانواده وزنی ذاتا غیرنوسانی برای جلوگیری از نوسانات غیرفیزیکی بر مبنای حل کننده ریمان برای جریان‌های تراکم‌پذیر پایا و ناپایا یک‌بعدی و دوبعدی در یک الگوریتم فشار مبنا توسعه داده شده است. روش حل بر مبنای حجم محدود است که از حل کننده ضمنی و یک شبکه منظم که متغیرها در یک مکان ذخیره می‌شوند استفاده شده است. محدودکنندگی به وسیله یک طرح عددی با دقت مرتبه بالای ذاتا بدون نوسان اعمال شده است. برای ارزیابی روش عددی از یک لوله ضربه که حاوی موج ضربه‌ای، ناپیوستگی تماسی و امواج انبساطی است، استفاده شده است و نتایج بدست آمده با نتایج تحلیلی و نتایج معتبر منتشر شده مقایسه شده است. روش توسعه داده شده برای پیکربندی لاکس در جریان غیرلزج دو بعدی ارزیابی شده است. علاوه بر آن از این روش برای شبیه‌سازی جریان پایای دوبعدی در یک کانال حاوی برآمدگی استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش توسعه داده شده قادر است به خوبی ناپیوستگی‌های فیزیکی و عددی را تسخیر کند.

واژه‌های کلیدی: تسخیر ناپیوستگی، الگوریتم فشار-مبنا، ذاتا غیرنوسانی با ضرایب وزنی.

Application of High-resolution scheme based on WENO Scheme in Pressure-Based Algorithm for capturing discontinuities

M. Balaj

Department of Aerospace Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

M. H. Javarehshkian

Department of Aerospace Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

Abstract

In this study, a high-resolution scheme based on the WENO family has been developed in a pressure-based algorithm to prevent non-physical fluctuations based on Riemannian solver for steady and unsteady one dimensional and two-dimensional compressible flows. The solution method is based on finite volume which uses an implicit solver with a structured collocated grid. Boundedness is applied by a high resolution essentially non-oscillatory scheme. To evaluate the numerical method, a shock tube containing shock wave, contact discontinuity and expansion waves has been considered, and the results obtained have been compared with the analytical results and the valid published results. The developed method is evaluated for lax configuration in two-dimensional inviscid flow. In addition, this method has been used to simulate two-dimensional steady flow in a channel containing bump. The results show that the developed method is able to capture the physical and numerical discontinuities well.

Keywords: Capturing Discontinuity, Pressure-Based Algorithm, Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO).

محققان بسیاری در رابطه با آن مطالعات بنیادینی را انجام دادند. تفاوت عمده‌ای که بین طرح کاهش تغییرات کل^۲ و طرح عددی ذاتا بدون نوسان وجود دارد، دقت حل در نواحی ناپیوستگی است. به عبارت دیگر در طرح عددی کاهش تغییرات کل هنگام مواجه شدن با ناپیوستگی، طرح عددی به صورت مرتبه اول عمل می‌نماید و در نواحی که متغیرهای جریان تغییرات آرامی دارند درون یا برون‌یابی با دقت مرتبه بالا انجام می‌شود. در سال ۱۹۹۴ لیو و همکارانش [۵] روش دیگری تحت عنوان طرح عددی ذاتا غیر نوسانی وزنی^۳ را ارائه نمودند. تفاوت روش WENO با روش ENO در افزایش دقت حل در نواحی با تغییرات آرام می‌باشد که با استفاده از یک سری ضرایب وزنی حاصل می‌شود. پس از آن روش‌های ذاتا غیر نوسانی وزنی دیگری بر مبنای روش WENO معرفی شدند. همه این روش‌ها [۶-۱۷] مشابه روش WENO در خانواده روش‌های ذاتا غیر نوسانی قرار می‌گیرند و سعی دارند که نمونه اولیه ارائه شده توسط لیو و همکارانش [۵] را بهبود دهند.

۱- مقدمه

اخیرا محققان به دنبال روش‌هایی هستند که در رژیم‌های جریان مختلف به صورت همزمان کاربرد داشته باشند. به عنوان مثال در یک کمپرسور گریز از مرکز تقریبا همه رژیم‌های مادون صوت، گذر صوتی و مافوق صوت وجود دارد. به این ترتیب برای شبیه‌سازی عددی این چنین مسائلی نیاز به روش عددی است که در همه این رژیم‌ها کارآمد باشد. اخیرا محققان توجه ویژه‌ای برای توسعه طرح‌های عددی با دقت مرتبه بالا دارند.

توسعه طرح‌های عددی با دقت مرتبه بالا و جمله استهلاکی بهینه با اعمال شرط محدودکنندگی مناسب، هنوز یکی از زمینه‌های تحقیقاتی روز می‌باشد. این طرح‌ها اغلب به کمک درون‌یابی غیرخطی جمله استهلاکی بهینه را به صورت خودکار در هر شبکه محاسبه می‌کنند. اولین بار طرح عددی ذاتا بدون نوسان^۱ برای جریان‌های هذلولوی توسط هارتن و همکاران [۱-۴] ارائه شد و پس از آن

² Total Variation Diminishing

³ Weighted Essentially Non-Oscillatory

¹ Essentially Non-Oscillatory

خانواده طرح عددی WENO جدیدترین طرح عددی است که تمامی مشکلات طرح‌های عددی قبل را برطرف نموده است و در نواحی ناپیوستگی با حفظ دقت مرتبه بالا به خوبی می‌تواند رفتارها را پیش بینی نماید.

طرح‌های عددی با دقت مرتبه بالا بیشتر در الگوریتم‌های چگالی مینا توسعه داده شده‌اند [۱- ۱۷]. روش حل عددی باید توانایی شبیه-سازی جریان‌های تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر را داشته باشد. الگوریتم چگالی مینا در جریان‌های تراکم‌ناپذیر تقریباً ناکارآمد است. چگالی در ماک‌های کمتر از ۰/۳ تقریباً بدون تغییر است. به این ترتیب بهتر است متغیرهای اصلی در الگوریتم، سرعت و فشار و دما باشند تا توانایی الگوریتم را برای حل جریان‌های تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر فراهم نماید. تلاش‌های زیادی برای رفع محدودیت‌های الگوریتم چگالی مینا انجام شده است. شناخته شده‌ترین روش برای پایدار کردن و اصلاح الگوریتم چگالی مینا در جریان‌های تراکم‌ناپذیر استفاده از تراکم‌پذیری مجازی [۱۸] یا پیش‌شرط [۱۹] است. گرچه با وجود این اصلاحات نتایج خوبی برای پیش‌بینی جریان تراکم‌ناپذیر ارائه شده است اما نقاط ضعفی نیز دارند. علاوه بر این از آنجایی که دستگاه معادلات در الگوریتم چگالی مینا به صورت کوپل و صریح حل می‌شود، هزینه محاسباتی بیشتری نسبت به الگوریتم فشار مینا دارد. البته الگوریتم فشار مینا برای پیش-بینی مناسب جریان‌های تراکم‌پذیر نیاز به یکسری اصلاحات دارند. با این حال می‌توان گفت الگوریتم فشار مینا با انجام اصلاحات می‌تواند به ابزاری قدرتمند برای پیش‌بینی رفتارهای جریان در همه رژیم‌ها تبدیل شود.

مطالعات زیادی [۲۰ - ۳۰] برای توسعه روش‌های عددی بر مبنای الگوریتم فشار مینا برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر تا به امروز انجام شده است. تا به حال همچنان تلاش‌ها برای توسعه الگوریتم‌های فشار مینا در مطالعه جریان‌های سرعت بالا ادامه دارد [۳۱ - ۴۳]. اکثر این روش‌ها بر روی اصلاحات الگوریتم فشار مینا تمرکز نموده‌اند. عده‌ای از محققین معتقدند که الگوریتم فشار مینایی که در آن همه معادلات در یک دستگاه و به صورت همزمان حل می‌شوند برای توسعه و کاربرد در سرعت‌های بالا کارآمد هستند [۹۳ - ۴۳]. اما همانطور که گفته شد، اغلب این روش‌ها از طرح‌های عددی پایه همچون اختلاف بالادست، اختلاف مرکزی یا ترکیب این دو استفاده کرده‌اند. علاوه بر این بیشتر این تحقیقات در زمینه جریان پایا انجام شده است. اغلب این روش‌ها به دلیل ماهیت کوپل معادلات حاکم، هزینه محاسباتی زیادی را نیز دارند. گروهی از محققین تلاش کرده‌اند تا طرح‌های عددی با دقت مرتبه بالا که خاصیت محدودکنندگی دارند را در الگوریتم فشار مینا توسعه دهند. از جمله طرح‌های با دقت مرتبه بالایی که در الگوریتم فشار مینا استفاده شد، طرح عددی NVD^۱ است که در تحقیقی توسط جوارشکیان [۲۰] برای بررسی جریان گذر صوتی و مافوق صوتی در یک کانال حاوی برآمدگی استفاده شد. برخی از محققین سعی نمودند طرح عددی TVD را در الگوریتم فشار مینا توسعه دهند. جوارشکیان و عیسی [۲۲] اولین کسانی بودند که شرط کاهش تغییرات کل را برای متغیرهای مشخصه

اعمال کردند و در الگوریتم فشار مینا توسعه دادند. نتایج این توسعه نشان داد که الگوریتم فوق نتایج مطلوبی در جریان‌های پایا و ناپایا که دارای ناپیوستگی است تولید می‌نماید. اما نقطه ضعف این روش این است که در ناپیوستگی تکنیک درونیایی به دقت مرتبه اول تغییر می‌کند. مطالعات نشان می‌دهند روش‌هایی که در سراسر ناحیه حل از جمله ناپیوستگی‌ها را با مرتبه بالا محاسبه نماید در الگوریتم فشار مینا توسعه داده نشده است.

هدف از این تحقیق توسعه الگوریتم فشار مینا با طرح‌های عددی که در سراسر ناحیه حل از تکنیک با دقت مرتبه بالا استفاده شود می‌باشد. در این تحقیق محدودکنندگی به وسیله یک طرح عددی با دقت مرتبه بالای وزنی ذاتا بدون نوسان برای جلوگیری از نوسانات غیرفیزیکی بر مبنای حل کننده ریمان در یک الگوریتم فشار مینا، به منظور حل معادلات حاکم برای شبیه‌سازی دقیق رفتار امواج ضربه‌ای و ناپیوستگی در جریان‌های تراکم‌پذیر، اعمال می‌شود. روش حل بر مبنای حجم محدود است که از حل کننده ضمنی و یک شبکه منظم که متغیرها در یک مکان ذخیره می‌شوند استفاده می‌شود. اهداف اصلی طرح به صورت کلی در زیر لیست شده است.

- ✓ توسعه یک الگوریتم با توانایی تسخیر امواج ضربه‌ای و ناپیوستگی
- ✓ استفاده از یک طرح عددی با دقت مرتبه بالا ذاتا بدون نوسان که دقت آن در تمامی نواحی حل حفظ شود و امکان افزایش مرتبه دقت بدون محدودیت فیزیکی در آن وجود داشته باشد.
- ✓ روش توسعه داده شده دارای خاصیت محدودکنندگی به-صورت ذاتی است.
- ✓ روش به صورت خودکار عمل می‌نماید و نیاز به تنظیمات متناسب با نوع جریان ندارد.
- ✓ معادلات جریان به صورت ضمنی با استفاده از حلگر ریمان برای توسعه روش حل برای جریان‌های تراکم‌پذیر قابل استفاده می‌شوند.

۲- مبانی و روش

۲-۱- گسسته‌سازی معادلات

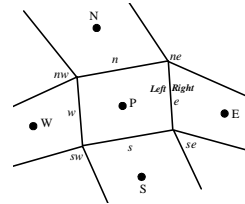
معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی برای حل جریان سیال دوبعدی غیرلزج به صورت زیر قابل بیان است.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j\Phi) = S_\Phi \quad (۱)$$

در رابطه (۱)، پارامتر Φ برای معادله پیوستگی، مومنتوم در جهت x ، مومنتوم در جهت y و انرژی به ترتیب برابر u ، v و e است. S_Φ جمله چشمه مربوط به پارامتر Φ است که برای معادله پیوستگی برابر صفر و برای بقیه معادلات علاوه بر چشمه شامل جمله گرادیان فشار و جمله‌های غیرخطی معادلات مومنتوم و انرژی نیز می‌باشد. به منظور خطی‌سازی معادلات جمله چشمه به صورت صریح از گام قبل در نظر گرفته شده و در گام جدید معلوم فرض می‌شود. پس از انتگرال‌گیری از معادله فوق و با استفاده از نظریه گاوس داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial t}[(\rho\Phi)^{n+1} - (\rho\Phi)^n] + I_e + I_n - I_w - I_s = S_\Phi \delta V \quad (۲)$$

^۱ Normalized Variable Diminishing



شکل ۱- نحوه نامگذاری و قرارگیری نقاط در حجم محدود در نظر گرفته شده برای گسسته سازی معادلات

محاسبه می‌شوند. طرح عددی که برای محاسبه شارهای جابه‌جایی در سطح سلول استفاده می‌شود نقش بسیار مهمی در دقت، نوسان‌های عددی و محدودکنندگی نتایج دارد. در واقع به دنبال طرح عددی هستیم که توانایی تسخیر ناپیوستگی‌هایی همچون امواج ضربه‌ای و ناپیوستگی تماسی را بدون نوسان داشته باشد. از این جهت که ناپیوستگی‌ها همواره در جریان‌های با سرعت و ماخ بالا حضور دارند توجه به این نکته ضروری است. تقریباً همگی طرح‌های عددی توسعه داده شده برای پیش‌بینی جریان در نواحی پیوسته جریان بدون تغییرات شدید مناسب هستند، اما رفتار طرح‌های عددی مختلف در حضور ناپیوستگی‌ها بسیار متفاوت است. طرح اختلاف بالادست معمول ترین طرح عددی برای محاسبه شار جابه‌جایی در سطح سلول است و نشان داده شده است که این طرح عددی به نحوی است که شرط غالب قطری را به خوبی برقرار می‌کند و مشکل نوسان در اطراف ناپیوستگی را ندارد. اما همانطور که در بالا گفته شد، طرح‌های عددی همچون اختلاف مرکزی یا اختلاف بالادست اغلب توانایی مناسبی برای بررسی پدیده‌های جریانی در نزدیکی تغییرات شدید مثل امواج ضربه‌ای را ندارند. در این تحقیق از طرح‌های عددی با دقت مرتبه بالا بر مبنای خانواده WENO استفاده می‌شود. برای حفظ مزیت پایداری روش قدیمی اختلاف بالا دست و افزایش مرتبه دقت با استفاده از طرح عددی WENO، از روش تصحیح عقب افتاده به‌صورت زیر استفاده شده است.

$$I = I^C + I^D = I^{CWENO} + I^{cupwind} - I^{cupwind} + I^D \quad (9)$$

معمولاً شار مربوط به عبارت پخش به‌خوبی با روش‌های معمولی قابل محاسبه و ارزیابی است. اما شار مربوط به جابه‌جایی تاثیر بسیاری در فرآیند حل عددی دارد. دو جمله مربوط به شار WENO (I^{CWENO}) و قسمت اضافی شار اختلاف بالادست ($-I^{cupwind}$) در عبارت مربوط به چشمه در نظر گرفته می‌شود. به این ترتیب عملاً در ساختار طرح اختلاف بالادست تغییری ایجاد نمی‌شود و ضرایب اصلی معادله تغییر نمی‌کند. اما دقت حل عددی به دلیل در نظر گرفتن تاثیرات طرح عددی با دقت مرتبه بالا، به طور چشم‌گیری افزایش می‌یابد. با در نظر گرفتن این موارد فرم کلی معادلات گسسته شده به‌صورت زیر خواهد بود.

$$a_p \Phi_p^{n+1} = \sum_m^{E,W,N,S} a_m \Phi_m + S'_\Phi \quad (10)$$

در رابطه اخیر، ضرایب a_p و a_m ضرایب شناخته شده مربوط به طرح عددی اختلاف بالادست است. S'_Φ عبارت چشمه است و تاثیرات مربوط به عدم تعامد شبکه، نیروهای خارجی، $\frac{\rho \delta v}{\delta t} \Phi_p$ در گام زمانی قدیمی و شارهای مرتبه بالا را شامل می‌شود.

۲-۲- محاسبه شار عددی در سطح سلول

به‌منظور محاسبه شار عددی در سطح سلول با استفاده از طرح عددی WENO، شار، به شار دو طرف سطح سلول و یک جمله پخشی مرتبط است. شارهای دو طرف سطح سلول با استفاده از درون‌یابی از مراکز سلول‌ها قابل محاسبه می‌باشند. به طور مثال برای محاسبه شار در سطح سلول e، گره P و E را در نظر بگیرید (شکل ۱). عبارت مناسب برای محاسبه شار جابه‌جایی در سطح سلول، با استفاده از مقادیر بقایی درون‌یابی شده در سمت راست و چپ سلول، به‌صورت زیر

زیر نویس‌های استفاده شده در جملات مختلف در شکل ۱ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود حرف کوچک سطح سلول را نشان می‌دهد و حرف بزرگ مرکز سلول را مشخص می‌نماید. در معادله بالا I شار است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$I_e = \int_{A_e} \vec{f} \cdot \vec{dA} = \vec{f}_e \cdot \vec{A}_e \quad (3)$$

که در آن $\vec{f} = \rho \Phi \vec{u}$ شار جرمی است. برای معادله پیوستگی رابطه زیر برقرار است.

$$\Phi = 1 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} [(\rho)^{n+1} - (\rho)^n] + F_e + F_n - F_w - F_s = 0 \quad (4)$$

برای خطی‌سازی معادلات ممنتوم و انرژی، می‌توان معادله پیوستگی را در Φ ضرب کرده و از معادله ممنتوم یا انرژی کم نمایم. در این حالت چگالی در گام جدید از معادله بقا حذف شده و معادلات فوق خطی می‌گردد. با انجام عملیات اشاره شده شکل کلی معادله مطابق زیر می‌شود:

$$(4) - (5) \times \Phi_p^{n+1} \rightarrow \rho_p^n \frac{\delta V}{\delta t} [\Phi_p^{n+1} - \Phi_p^n] + (I_e - F_e \Phi_p^{n+1}) + (I_n - F_n \Phi_p^{n+1}) - (I_w - F_w \Phi_p^{n+1}) - (I_s - F_s \Phi_p^{n+1}) = S_\Phi \cdot \delta V \quad (5)$$

به طور کلی شار از دو قسمت شار پخشی و شار جابه‌جایی تشکیل می‌شود.

$$I = I^C + I^D \quad (6)$$

$$I^C = F_e \Phi_e$$

$$I^D = D_e (\phi_p - \phi_E)$$

بنابراین با توجه به عبارت شار، رابطه (۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\rho_p^{n+1} \frac{\delta V}{\delta t} \Phi_p^{n+1} + (F_e \phi_e^{n+1} + D_e (\phi_p^{n+1} - \phi_E^{n+1}) - F_e \Phi_p^{n+1}) + (F_n \phi_n^{n+1} + D_n (\phi_p^{n+1} - \phi_N^{n+1}) - F_n \Phi_p^{n+1}) - (F_w \phi_w^{n+1} + D_w (\phi_p^{n+1} - \phi_W^{n+1}) - F_w \Phi_p^{n+1}) - (F_s \phi_s^{n+1} + D_s (\phi_p^{n+1} - \phi_S^{n+1}) - F_s \Phi_p^{n+1}) = S_\Phi \cdot \delta V + \rho_p^n \frac{\delta V}{\delta t} \Phi_p^n \quad (7)$$

می‌توان هر یک از معادلات پیوستگی، مومنوم و انرژی را به کمک روابط ارائه شده در بالا، به فرم زیر بازنویسی کرد.

$$a_p \Phi_p^{n+1} = a_E \Phi_E^{n+1} + a_W \Phi_W^{n+1} + a_N \Phi_N^{n+1} + a_S \Phi_S^{n+1} + S_\Phi \quad (8)$$

رابطه فوق یک معادله را برای حل ضمنی Φ در گام زمانی جدید تشکیل می‌دهد. در این دستگاه معادله a_S, a_N, a_W, a_E, a_p ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهند. در روابط بالا مواردی که با حروف زیرنویس بزرگ نشان داده شده است در مرکز شبکه و مواردی که با زیرنویس کوچک نشان داده شده است در سطح سلول و به شیوه میان‌یابی

است.

$$I_e^c = \frac{1}{2}(I_e^{Left} + I_e^{Right} - \bar{R}|\bar{\lambda}|L(Q_e^{Right} - Q_e^{Left})) \quad (11)$$

برای یک شبکه نامتعامل متغیرهای بقایی و بردار شار جابه‌جایی که به ترتیب با Q و I^{ξ} نشان داده می‌شود در زیر آورده شده است. ξ بردار عمود بر سطح است.

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix}, I^{\xi} = \begin{pmatrix} \rho U^{\xi} \\ \rho U^{\xi} u + P G_x^{\xi} \\ \rho U^{\xi} v + P G_y^{\xi} \\ \rho U^{\xi} (e + P/\rho) \end{pmatrix} \quad (12)$$

$U^{\xi} = uG_x^{\xi} + vG_y^{\xi}$
 $G_x^{\xi} = y_{ne} - y_{se}, \quad G_y^{\xi} = -(x_{ne} - x_{se})$
 در رابطه بالا u, v, P, e به ترتیب سرعت در راستای محور x ، سرعت در راستای محور y ، فشار استاتیک و انرژی داخلی است. همانطور که مشخص است، به کمک حل تقریبی مسئله ریمان تاثیرات پارامتری مثل فشار به جای ظاهر شدن در عبارت چشمه در شارهای جابه‌جایی در نظر گرفته می‌شود که قطعاً باعث بهبود نتایج در جریان‌های تراکم‌پذیر خواهد شد. موارد نشان داده شده با \sim نشان دهنده مقادیر میانگین‌گیری شده Roe در دو طرف سمت راست و چپ سطح سلول است. ماتریس‌های ویژه (\bar{L} و \bar{R}) و ماتریس مقادیر ویژه (\bar{A}) بایستی بر اساس مقادیر میانگین‌گیری شده Roe در سطح سلول محاسبه شوند. برای محاسبه مقادیر راست و چپ سلول می‌توان از یک طرح WENO پنج نقطه‌ای استفاده کرد که به WENO3R مرتبه سوم معروف است. به عنوان نمونه برای سطح سلول e ، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$Q_e^{Left} = \frac{w_1}{2}(-Q_{i-1} + 3Q_i) + \frac{w_2}{2}(Q_i + Q_{i+1}) \quad (13)$$

$$Q_e^{Right} = \frac{w_1}{2}(Q_{i-1} + Q_i) + \frac{w_2}{2}(3Q_i - Q_{i+1}) \quad (14)$$

w_1 و w_2 ضرایب غیرخطی وزنی هستند که به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$w_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad w_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{d_1}{(\beta_1 + \epsilon)^2} \\ \alpha_2 = \frac{d_2}{(\beta_2 + \epsilon)^2} \end{array} \right\} \quad (15)$$

β_1 و β_2 شاخص‌های یکنواختی هستند و از رابطه زیر قابل محاسبه هستند.

$$\beta_1 = (Q_i - Q_{i-1})^2, \quad \beta_2 = (Q_{i+1} - Q_i)^2 \quad (16)$$

در رابطه (13) ضرایب خطی وزنی d_1 و d_2 به ترتیب برابر با $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ هستند. برای رابطه (14) این ضرایب متفاوت هستند و به ترتیب برابر $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ هستند. همچنین پیشنهاد شده است برای جلوگیری از صفر شدن مخرج $\epsilon = 10^{-6}$ در نظر گرفته شود.

۳- نتایج

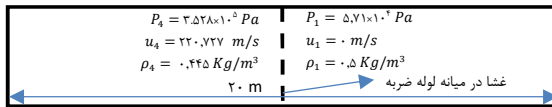
در این بخش نتایج شبیه‌سازی مسائل یک‌بعدی و دوبعدی غیرلزج پایا و گذرا ارائه شده است. نتایج بدست آمده با نتایج عددی ارائه شده در سایر مقالات یا نتایج تحلیلی مقایسه شده است. مسئله اول یک لوله ضربه یک‌بعدی است که در آن رژیم‌های مختلف جریان در یک حل عددی گذرا مشاهده می‌شود. در ادامه نتایج دوبعدی گذرا در مسئله ریمان که توسط لکس و همکارش [۴۴] معرفی شده است بررسی می‌شود. نتایج در این نمونه آزمایش با نتایج حل چگالی مینا با طرح عددی مشابه که توسط لکس و همکارش ارائه شده است مقایسه شده

است. در انتها نتایج دوبعدی پایا شبیه‌سازی جریان داخل یک کانال حاوی یک برآمدگی در رژیم‌های مختلف جریان از مادون‌صوت تا مافوق‌صوت مورد بررسی قرار گرفته است. در این بخش نتایج با نتایج NVD فشار مینا نیز مقایسه شده است.

۳-۱- جریان یک‌بعدی ناپایا، لوله ضربه

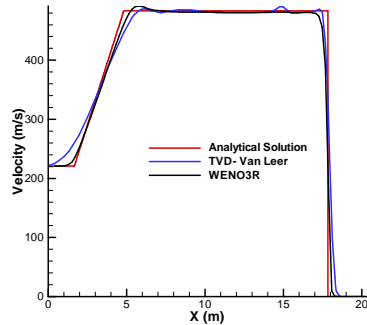
در این قسمت برای نشان دادن تاثیر طرح عددی دقت مرتبه بالا در کاهش پخش عددی، یک لوله ضربه به عنوان جریان ناپایای تراکم‌پذیر غیرلزج جهت آزمایش انتخاب شده است. لوله ضربه از جمله نمونه‌های آزمایش پرکاربردی است که اگرچه هندسه ساده‌ای دارد اما رفتارهای پیچیده‌ای از جریان به همراه ناپیوستگی را به همراه دارد و همواره مورد توجه بسیاری از محققان [۳۲ - ۴۳ و ۴۵ و ۴۶] قرار گرفته است.

شکل ۲ هندسه و شرایط اولیه مسئله لوله ضربه را نشان می‌دهد. در این نمونه طول لوله ۲۰ متر و فشار و چگالی اولیه مطابق اطلاعات ارائه شده در شکل ۲ در نظر گرفته شده است. در این مسئله فرض شده است که دو گاز در دو طرف دیافراگم از لحاظ خواص فیزیکی کاملاً یکسان هستند ($C_p = 1005 \text{ J/kg.K}$ و $\gamma = 1/4$). در همه مرزها فرض شده است که تغییرات همه پارامترها صفر باشد. پس از پاره شدن دیافراگم یک موج ضربه‌ای برای افزایش فشار ناحیه ۱ به سمت راست حرکت می‌کند و یک موج انبساطی برای کاهش فشار در منطقه ۴ به سمت چپ حرکت می‌کند. در ناحیه ۲ نیز به دلیل تغییرات دمایی بین دو ناحیه، یک پیوستگی تماسی نیز مشاهده می‌شود. همانطور که مشخص است مسئله لوله ضربه علی‌رغم اینکه هندسه ساده‌ای دارد اما فیزیک پیچیده‌ای را در دل خود به همراه دارد. با در نظر گرفتن محدودیت‌های عدد کورانت، گام زمانی متناسب با سایز شبکه به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که عدد کورانت $(\frac{u+a}{\Delta x})\Delta t$ کمتر از ۰/۱ باشد. نتایج در زمان ۱۰ میلی ثانیه بررسی شده است. از آنجایی که دقت نتایج در شبکه‌های با تعداد سلول‌های کمتر بهتر قابل بررسی است از دو شبکه ۵۰ و ۱۰۰ برای این مسئله استفاده شده است و نتایج آن در ادامه ارائه شده است.



شکل ۲- هندسه یک بعدی لوله ضربه

شکل ۳ توزیع چگالی، عدد ماخ، فشار و سرعت مربوط به تغییرات چگالی در طول لوله ضربه در زمان ۱۰ میلی ثانیه را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، در این نتایج ناپیوستگی مربوط به موج ضربه‌ای و ناپیوستگی تماسی تنها در تغییرات مربوط به چگالی و عدد ماخ به صورت همزمان قابل بررسی است. به همین دلیل استقلال حل از شبکه در تغییرات عدد ماخ در شکل ۳-ب بررسی شده است. استقلال حل از شبکه نشان می‌دهد که نتایج به درستی با افزایش تعداد سلول‌ها به حل تحلیلی نزدیک می‌شود و این نشان می‌دهد که



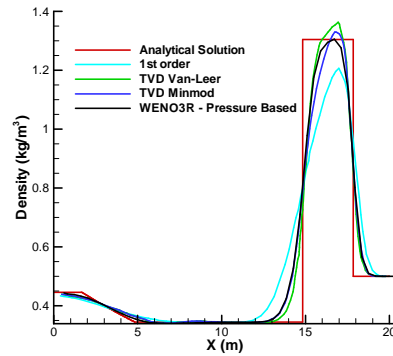
ه) تغییرات سرعت برای شبکه با ابعاد ۱۰۰

شکل ۳- نتایج مربوط به لوله ضربه برای طرح‌های عددی مختلف در زمان ۱۰ میلی ثانیه در ابعاد مختلف شبکه

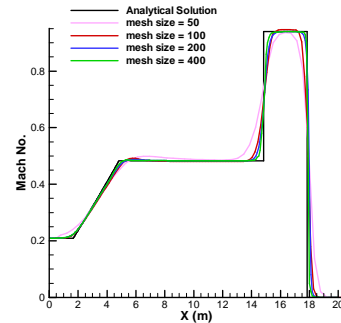
گسسته‌سازی حل عددی به درستی انجام شده است. در این بررسی سعی شده است که نتایج فشار مبنای طرح عددی WENO با نتایج فشار مبنای طرح عددی TVD که در مرجع [۴۶] ارائه شده است مقایسه شود. مقایسه این نتایج نشان می‌دهد که هر دو طرح عددی بر خلاف طرح عددی مرتبه اول، به طور نسبی با دقت قابل قبولی نتایج را پیش بینی کرده‌اند. اما به طور کلی طرح عددی WENO با توجه به دقت بالاتری که دارد نتایج دقیق‌تری را نسبت به سایر طرح‌های عددی در ناحیه یکنواخت (ناحیه بدون حضور تغییرات شدید و ناپیوستگی) و نواحی ناپیوستگی پیش‌بینی کرده است. گرچه این موضوع قابل پیش‌بینی بود.

۲-۳- جریان دوبعدی ناپایا، پیکربندی لاکس

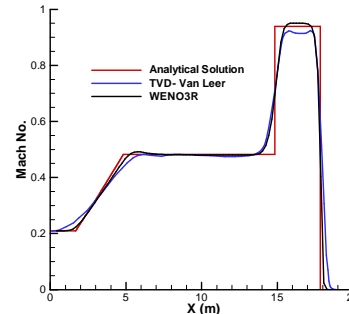
پیکربندی لاکس [۴۴] برای بررسی نمونه‌های مختلف برخورد جریان‌ها بوجود آمده پیچیده در این قسمت مورد ارزیابی قرار گرفته‌است. این مسئله مشابه یک لوله ضربه است که نسبت فشار و چگالی متفاوتی در دو بعد و نواحی مختلف در آن اعمال شده است. به این ترتیب با این شرایط، برخورد امواج ضربه‌ای، امواج انبساطی و شرایط تماسی بایکدیگر از انواع نمونه‌هایی است که در این آزمایش مورد بررسی قرار می‌گیرد. این آزمایش در دو بعد انجام می‌شود تا بتوان قدرت روش توسعه داده شده را در توانایی تسخیر تغییرات شدید بررسی نمود. همانطور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، بازه صفر تا ۱ به دو قسمت مساوی تقسیم شده است که منجر به ایجاد چهار قسمت مساوی برای اعمال شرایط اولیه می‌شود. این تصویر پنجره‌گون می‌تواند دارای شرایط اولیه متفاوتی باشد و خطوط بین نواحی را می‌توان به صورت غشا تصور نمود. زمانی که غشاها پاره می‌شوند با توجه به شرایط اطراف غشا، امواجی به اطراف حرکت می‌کنند. تداخل این امواج و ناپیوستگی‌ها منجر به ایجاد شرایط پیچیده‌ای می‌شود که هر روشی قادر به شبیه‌سازی آن نیست. در مقاله پیش‌رو پیکربندی شماره ۸ لاکس در نظر گرفته شده است. لاکس و لیو [۴۴] در یک بررسی جامع ۱۹ پیکربندی مختلف را معرفی کرده‌اند و شرایط برخورد امواج را در این پیکربندی‌ها با یک روش چگالی مبنای طرح WENO ارائه کرده‌اند. شرایط اولیه مربوط به پیکربندی شماره ۸ لاکس در شکل ۴ نشان داده شده است. در شبکه‌بندی مورد استفاده برای این آزمایش ۴۰۰ گره افقی و ۴۰۰ گره عمودی در نظر گرفته شده است تا نتایج بدست آمده با نتایج ارائه شده در مرجع [۴۴] قابل مقایسه باشند.



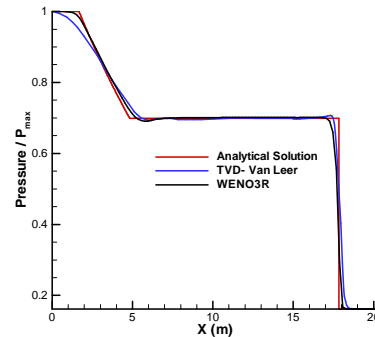
الف) تغییرات چگالی برای شبکه با ابعاد ۵۰



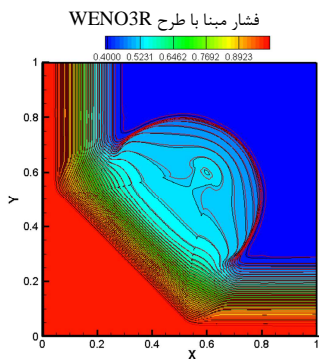
ب) استقلال حل از شبکه و بررسی تغییرات عدد ماخ در شبکه‌های مختلف



ج) تغییرات عدد ماخ برای شبکه با ابعاد ۱۰۰



د) تغییرات فشار بی بعد شده برای شبکه با ابعاد ۱۰۰

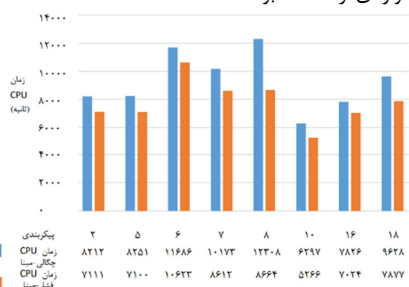


شکل ۴- فشار مینا با طرح WENO3R
(ب) خطوط هم‌تراز فشار - خطوط قرمز رنگ روش چگالی مینا و خطوط سیاه رنگ روش فشار مینا با طرح WENO3R

شکل ۶- نتایج با استفاده از الگوریتم‌های مختلف برای پیکربندی شماره ۸ در زمان ۰/۲۵

همانطور که در شکل ۶ مشخص است، به صورت کیفی، نتایج الگوریتم چگالی مینا و فشار مینا مطابقت بسیار خوبی باهم دارند و این نشان می‌دهد که روش فشار مینای توسعه داده شده به خوبی توانایی تسخیر ناپیوستگی‌ها را دارد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که این پیکربندی شامل برهم‌کنش امواج ضربه، امواج انبساطی و ناپیوستگی تماسی است. حضور ناپیوستگی تماسی تنها در خطوط هم‌تراز چگالی مشخص است. در واقع از مقایسه خطوط هم‌تراز فشار و چگالی، ناپیوستگی تماسی به راحتی قابل تشخیص است. در بسیاری از تحقیقات منتشر شده که فقط نتایج چگالی ارائه شده است، امکان بررسی موقعیت ناپیوستگی تماسی وجود ندارد.

بررسی‌های انجام شده روی تعدادی از پیکربندی‌های لکس نشان می‌دهد که هزینه محاسباتی روش چگالی مینا با یک دقت یکسان بیشتر از روش بر مینای الگوریتم فشار مینا است. نتیجه این بررسی‌ها در شکل ۷ آورده شده است. همه این نتایج با استفاده از یک کامپیایلر فرترن در ویندوز ۱۰، ۶۴ بیت با یک پردازشگر با مشخصات (Core(TM) Intel (3.6 GHz) i7-4790 و به کارگیری ۱۶ گیگابایت حافظه رم محاسبه شده‌اند. شبکه مربعی منظم ۴۰۰ در ۴۰۰ استفاده شده است. همانطور که نتایج نشان می‌دهد، استفاده از الگوریتم فشار مینا ۱۵ درصد هزینه محاسباتی را نسبت به الگوریتم چگالی مینا کاهش داده است. این موضوع به خاطر ساختار معادلات حاکم و نحوه حل معادلات در الگوریتم چگالی مینا قابل پیش‌بینی بود و در ارتباط با آن قبلاً در مقدمه مواردی ارائه شده بود.



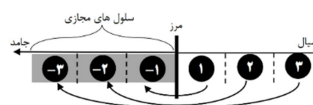
شکل ۷- زمان CPU برای شبیه‌سازی با الگوریتم فشار مینا و چگالی مینا برای تعدادی از پیکربندی‌های لکس

$\rho = 1$ $u = -0.6259$ $v = 0.1$ $p = 1$	$\rho = 0.5197$ $u = 0.1$ $v = 0.1$ $p = 0.4$
$\rho = 0.8$ $u = 0.1$ $v = 0.1$ $p = 1$	$\rho = 1$ $u = 0.1$ $v = -0.6259$ $p = 1$

شکل ۴- شرایط اولیه مربوط به پیکربندی شماره ۸ لکس

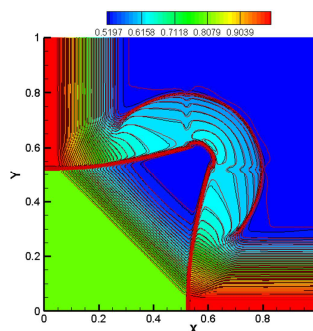
تغییرات کلیه متغیرها در کلیه مرزهای اطراف هندسه لکس صفر در نظر گرفته شده است. این مهمترین شرط مرزی در نظر گرفته شده برای این نمونه آزمایش است. در واقع کلیه شرایط مرزی در این شبیه‌سازی، عددی هستند و شرط مرزی فیزیکی برای این نمونه نمی‌تواند در نظر گرفت.

یکی از روش‌های معمول برای اعمال شرط مرزی، ایجاد سلول‌های مجازی در اطراف مرز است تا از آنها برای میان‌یابی استفاده شود. این موضوع در شکل ۵ به صورت تصویری نشان داده شده است. به عنوان مثال برای دقت مرتبه ۵ به سه سلول مجازی در خارج از فضای فیزیکی برای میان‌یابی روی مرز نیاز است. متناسب با نوع شرط مرزی، متغیرهای اسکالر (فشار، چگالی و دما) و بردار سرعت در سلول‌های مجازی به صورت کاملاً آینه‌ای یا با اندکی تغییرات لحاظ می‌شوند. به عنوان مثال، برای شرط مرزی لغزشی، سرعت عمود بر مرز برابر قرینه آن در طرف سیال با علامت منفی لحاظ می‌شود و متغیرهای اسکالر و بردار سرعت مماسی تنها برابر مقدار قرینه آن در طرف سیال در نظر گرفته می‌شود و نیازی به تغییر علامت نیست. در کلیه مرزهای هندسه لکس، متغیرها در محل سلول مجازی به صورت کاملاً آینه‌ای و برابر مقدار قرینه آن در طرف سیال در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۵- شرایط مرزی مجازی در نظر گرفته شده در مرزها در شبیه‌سازی پیکربندی لکس

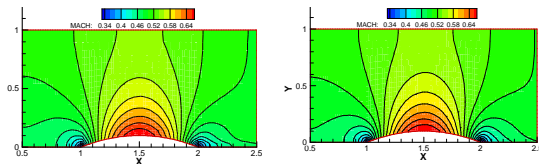
شکل ۶- الف و ب به ترتیب خطوط هم‌تراز چگالی و فشار مربوط به پیکربندی ۸ ارائه کرده است. در نتایج ارائه شده در این شکل از طرح عددی یکسان WENO3R استفاده شده است. خطوط چگالی مینا با یک کد فرترن بر اساس روش ارائه شده در مرجع [۴۷] محاسبه شده است.



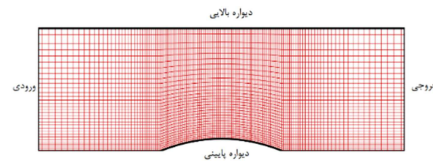
شکل ۶- الف) خطوط هم‌تراز چگالی - خطوط قرمز رنگ روش چگالی مینا و خطوط سیاه رنگ روش

۳-۳- جریان دوبعدی پایا، جریان در داخل کانال حاوی برآمدگی

در بخش جریان پایا در یک هندسه دوبعدی در رژیم جریان مادون‌صوت تا مافوق‌صوت در داخل یک کانال حاوی برآمدگی به کمک روش فشار مبنای توسعه داده شده، مطالعه شده است. هندسه کانال و برآمدگی در شکل ۸ نشان داده شده است. ارتفاع کانال و طول کانال به ترتیب ۱ متر و ۳ متر است. برآمدگی در وسط دیواره پایین قرار داده شده است و طول وتر این برآمدگی ۱ متر است. در این تحقیق، برای جریان مادون و گذر صوتی، نسبت ارتفاع به وتر برآمدگی ۱۰ درصد است. در حالی که این نسبت برای جریان مافوق‌صوت ۴ درصد در نظر گرفته شده است. این هندسه در واقع یک نمونه آزمایش برای ارزیابی روش‌های عددی توسعه داده شده است و در بسیاری از تحقیقات (۲۱ و ۲۲) استفاده شده است. نتایج بدست آمده از روش توسعه داده شده با نتایج فشار مبنای NFD^۱ [۲۱] مقایسه شده است.



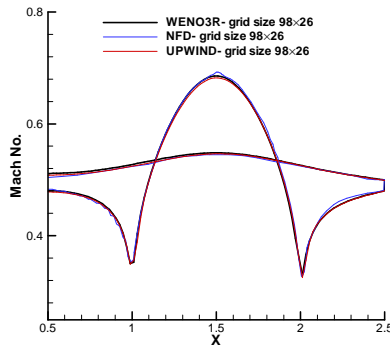
شکل ۹- خطوط هم‌تراز عدد ماخ در جریان با ماخ ورودی ۰/۵ استفاده از الگوریتم فشار مینا



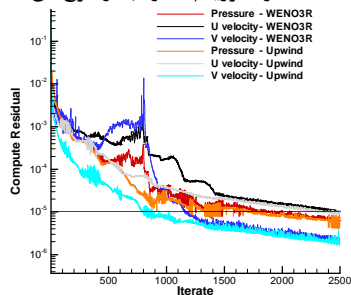
شکل ۸- شبکه منظم برای هندسه کانال حاوی برآمدگی

۳-۳-۱- جریان مادون صوت

برای شبیه‌سازی جریان پایا مادون‌صوت داخل کانال حاوی برآمدگی، عدد ماخ ورودی کانال ۰/۵ در نظر گرفته شده است. برای این منظور فشار و دمای کل در ورودی به ترتیب ۱۲۰۱۹۸/۹ پاسکال و ۳۰۲/۵۵ کلوین به عنوان شرط مرزی ورودی تنظیم شده است. بر اساس عدد ماخ ورودی، فشار و دمای کل، سایر متغیرهای جریان از جمله سرعت و فشار استاتیک در ورودی قابل محاسبه هستند. فشار در خروجی کانال برابر با فشار مرجع (۱۰۱۳۳۰ پاسکال) لحاظ شده است. مابقی متغیرهای جریان در خروجی از داخل میدان حل، برون‌یابی می‌شوند. برای دیواره‌های بالا و پایین از شرط مرزی لغزش و عدم پرش استفاده شده است. برای شبیه‌سازی از یک شبکه منظم با ابعاد ۹۸×۲۶ که نسبتاً بزرگ است استفاده شده است تا دقت روش توسعه داده شده در مقایسه با سایر روش‌ها به خوبی قابل ارزیابی باشد. در شکل ۹ خطوط هم‌تراز عدد ماخ برای شبیه‌سازی با طرح عددی مرتبه اول و WENO3R رسم شده است. علاوه بر آن در شکل ۱۰ توزیع عدد ماخ برای طرح‌های عددی مختلف با هم مقایسه شده است. همانطور که از نتایج مشخص است و پیش‌بینی می‌شد، نتایج در جریان مادون‌صوت با استفاده از روش‌های مختلف به یکدیگر بسیار نزدیک هستند. این بیشتر به این دلیل است که در جریان برای این هندسه و شرایط ماخ ورودی تنظیم شده، هیچ تغییرات شدیدی از لحاظ فیزیکی وجود ندارد. از آنجایی که دقت حل برای طرح‌های عددی مختلف در شرایط مادون‌صوت تقریباً برای همه روش‌ها یکسان است، می‌توان نرخ همگرایی روش WENO3R و روش مرتبه اول را با هم مقایسه کرد. شکل ۱۱



شکل ۱۰- توزیع عدد ماخ در دیواره پایین و بالا در جریان با ماخ ورودی ۰/۵ استفاده از الگوریتم فشار مینا و طرح‌های عددی مختلف



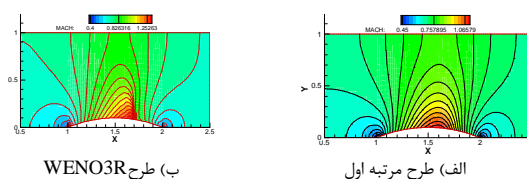
شکل ۱۱- نرخ همگرایی برای الگوریتم فشار مینا در طرح‌های عددی WENO3R و طرح عددی مرتبه اول

۳-۳-۲- جریان گذر صوتی

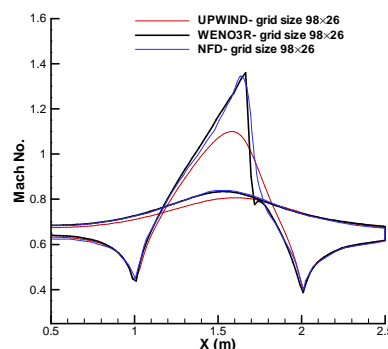
برای شبیه‌سازی جریان پایا گذر صوتی داخل کانال حاوی برآمدگی با برآمدگی ۱۰ درصد، عدد ماخ ورودی کانال به نحوی تنظیم شده است که در فیزیک واقعی مسئله یک موج ضربه‌ای در سطح بالا و در انتهای برآمدگی به وجود آید. به این ترتیب توانایی روش‌های مختلف عددی برای پیش‌بینی فیزیک مسئله امکان‌پذیر خواهد بود. برای این منظور فشار و دمای کل در ورودی به ترتیب ۱۳۷۴۹۸/۷۷ پاسکال و ۳۱۴/۰۵ کلوین به عنوان شرط مرزی ورودی تنظیم شده است. با ورودی‌های

^۱ Normalized Flux Diminishing

تنظیم شده به عنوان فشار و دمای کل در ورودی، جریان با ماخ ۰/۶۷۵ وارد کانال می‌شود. مشابه شرایط مرزی خروجی در جریان مادون‌صوت، فشار در خروجی کانال برابر با فشار مرجع (۱۰۱۳۳۰ پاسکال) لحاظ شده است. برای دیواره‌های بالا و پایین از شرط مرزی لغزش و عدم پرش استفاده شده است. برای شبیه‌سازی از همان شبکه قبلی استفاده شده است. در شکل ۱۲ خطوط هم‌تراز عدد ماخ برای شبیه‌سازی با طرح عددی مرتبه اول و WENO3R رسم شده است. همانطور که دیده می‌شود، روش توسعه داده شده با طرح عددی WENO3R به خوبی ناحیه با تغییرات شدید انتهای برآمدگی را تسخیر نموده است. این درحالی است که روش مرتبه اول با این تعداد نقاط شبکه، قادر به بررسی این فیزیک نبوده است. البته الگوریتم فشار مینا با طرح عددی NFD قادر به شبیه‌سازی این فیزیک است. در شکل ۱۳ توزیع عدد ماخ برای طرح‌های عددی مختلف در جریان گذر صوتی نمایش داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که گرچه طرح NFD حضور موج ضربه‌ای را شبیه‌سازی کرده است، اما دقت روش توسعه داده شده با طرح WENO3R بیشتر است. چراکه در طرح عددی NFD برای محدود کردن نتایج در ناحیه تغییرات شدید، دقت روش به دقت مرتبه اول کاهش می‌یابد.



شکل ۱۲- کانتور عدد ماخ در جریان با ماخ ورودی ۰/۶۷۵ با استفاده از الگوریتم فشار مینا

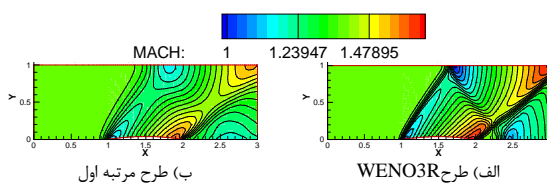


شکل ۱۳- توزیع عدد ماخ در دیواره پایین و بالا در جریان با ماخ ورودی ۰/۶۷۵ با الگوریتم فشار مینا و طرح‌های عددی مختلف

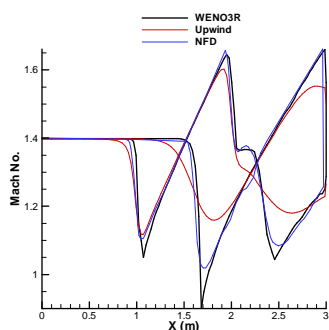
۳-۳-۳- جریان مافوق صوت

برای بررسی جریان مافوق صوت در هندسه کانال حاوی برآمدگی از برآمدگی ۴ درصد استفاده شده است. با توجه به فیزیک مافوق صوت جریان، فشار و دما و سرعت در ورودی کانال به نحوی تنظیم شده است که جریان مافوق صوت و ماخ ورودی ۱/۴ حاصل شده است. فشار و دما در ورودی به ترتیب ۱۰۱۳۳۰ پاسکال و ۲۸۸ کلوین قرار داده شده است. به این ترتیب تمامی پارامترهای جریان با توجه به عدد ماخ، فشار و دما مشخص و قابل محاسبه هستند. تمامی پارامترهای جریان در خروجی از داخل فضای حل و از طریق برون‌یابی بدست می‌آیند. از

یک شبکه منظم با ابعاد ۳۰×۹۰ برای شبیه‌سازی استفاده شده است. پس از شبیه‌سازی جریان، خطوط هم‌تراز عدد ماخ در شکل ۱۴- الف و ب نمایش داده شده است. در این شکل مشاهده می‌شود که موج ضربه‌ای مایل در ابتدای برآمدگی و انعکاس موج ضربه‌ای از دیواره بالایی و برهم کنش شوک‌های مایل در انتهای برآمدگی به خوبی توسط روش توسعه داده شده فشارمینای WENO3R تسخیر و شبیه‌سازی شده است. این درحالی است که حل بدست آمده با طرح عددی مرتبه اول با پخش بسیار زیادی همراه است به گونه‌ای که امکان بررسی تغییرات شدید در ناحیه حل تقریباً وجود ندارد. شکل ۱۵ توزیع عدد ماخ را در دیواره بالا و پایین فضای حل برای طرح‌های عددی مختلف نشان می‌دهد. همانطور که دیده می‌شود با اینکه روش NFD [۲۱] با توجه به دقت مرتبه دومی که دارد نتایج با پخش عددی کمتر را شبیه‌سازی نموده است. موج ضربه‌ای مایلی که در ابتدای برآمدگی ایجاد شده است به سطح بالای کانال برخورد می‌کند و به داخل میدان حل منعکس می‌شود. در نقطه برخورد موج ضربه‌ای به سطح بالایی، ساقه ماخ تشکیل می‌شود که باعث می‌گردد جریان بعد از آن مادون صوت شود. همانطور که در شکل ۱۵ دیده می‌شود با اینکه روش NFD [۲۱] قادر به شبیه‌سازی کامل پدیده‌های جریانی در این هندسه نیست، اما با توجه به دقت مرتبه دومی که دارد نتایج را با پخش عددی کمتر نسبت به روش مرتبه اول شبیه‌سازی نموده است. روش NFD و مرتبه اول، جریان مادون‌صوت بعد از انعکاس موج ضربه‌ای را پیش‌بینی نکرده‌اند. این درحالی است که نتایج روش حاضر این موضوع را به خوبی پیش‌بینی کرده است. به هر حال روش فشارمینای توسعه داده شده با طرح WENO3R با توجه به دقت مرتبه سوم که در سرتاسر نواحی حل دارد توانایی بهتری در تسخیر ناپیوستگی‌های فیزیکی و عددی دارد. عملکرد روش توسعه داده شده با افزایش عدد ماخ بهتر دیده شده است.



شکل ۱۴- کانتور عدد ماخ در جریان با ماخ ورودی ۱/۴ با استفاده از الگوریتم فشار مینا



شکل ۱۵- توزیع عدد ماخ در دیواره پایین و بالا در جریان با ماخ ورودی ۱/۴ با استفاده از الگوریتم فشار مینا و طرح‌های عددی مختلف

۴- نتیجه‌گیری

همانطور که در این تحقیق به صورت مفصل بحث و بررسی شد مشخص است که با توجه به کاربردهای عملی نیازمند یک روش کارآمد برای پیش‌بینی رفتار سیال در همه رژیم‌های جریان هستیم. در این رابطه مزایای توسعه یک الگوریتم فشار مینا بر مبنای درون‌یابی با دقت مرتبه بالا برای حل جریان تراکم‌پذیر پایا و ناپایا بررسی شد. معیار محدودکنندگی استفاده شده، طرح عددی ذاتا غیر نوسانی با ضرایب وزنی WENO با دقت مرتبه سوم بود که برای تمامی شارهای جرمی، مومنتوم و انرژی در معادلات مربوطه اعمال شد. البته با توجه به نحوه گسسته‌سازی معادلات یکی از مزیت‌های روش توسعه داده شده این است که از این جهت منعطف است و امکان اعمال هر طرح عددی با دقت مرتبه بالا در آن وجود دارد. نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی‌های عددی در جریان‌های پایا و ناپایا با استفاده از روش فشارمبنای توسعه داده شده به خوبی نشان داد که مطابقت خوبی با نتایج تحلیلی و حل عددی چگالی‌مینا وجود دارد. نتایج نشان داد که روش حاضر هزینه محاسباتی پایین‌تری نسبت به روش چگالی مینا دارد. همانطور که قبلا به آن اشاره شده بود این موضوع به دلیل ساختار گسسته‌سازی و حل هم‌زمان معادلات حل در الگوریتم چگالی مینا است. روش حاضر به خوبی نتایج بدون نوسان را اطراف ناپیوستگی‌ها و تغییرات شدید حتی بهتر از طرح‌های TVD و NFD شبیه‌سازی کرده است که قابل پیش‌بینی بود. به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که روش حاضر برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر دارای تغییرات شدید مثل امواج ضربه‌ای یا انبساطی کاملا مناسب است.

۵- نمادها

علائم

t	زمان (sec)
ρ	چگالی (kg/m^3)
S_Φ	چشمه مربوط به پارامتر Φ
u	سرعت در جهت x (m/s)
v	سرعت در جهت y (m/s)
T	دما (K)
U	بردار سرعت (m/s)
V	حجم سلول (m^3)
I	شار
f	شار جرمی
A	سطح سلول (m^2)
P	فشار استاتیک (Pa)
D	ضریب پخش
e	انرژی داخلی (J)
Q	مقادیر بقایی
Λ	ماتریس مقادیر ویژه
R	ماتریس بردار ویژه راست
L	ماتریس بردار ویژه چپ
w	ضریب غیرخطی وزنی در طرح عددی WENO
β	شاخص یکنواختی در طرح عددی WENO
d	ضریب خطی وزنی در طرح عددی WENO
a	سرعت صوت (m/s)
C_p	گرمای ویژه گاز (J/kg.K)

γ نسبت گرمای ویژه گاز (-)
 $a_p/a_E/a_W/a_N/a_S$ ماتریس ضرایب دستگاه معادلات

زیرنویس

P یا i	مرکز سلول
e	سطح غربی سلول
w	سطح شرقی سلول
n	سطح شمالی سلول
s	سطح جنوبی سلول
ne	نقطه شمال غربی
E	مرکز سلول غربی
N	مرکز سلول شمالی
S	مرکز سلول جنوبی
W	مرکز سلول شرقی
se	نقطه جنوب غربی

بالانویس

n	گام زمانی m
C	شار جابه‌جایی
D	شار پخشی
ξ	بردار عمود بر سطح در راستای ۱ یا ۲
L یا Lef	سمت چپ سلول
R یا Right	سمت راست سلول

۶- مراجع

- [1] Harten A, Osher S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. I. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 24(2), pp. 279-309, 1987.
- [2] Harten A, Osher S, Engquist B, Chakravarthy SR. Some results on uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes. *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 2(3-5), pp. 347-77, 1986.
- [3] Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravarthy SR. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III. In *Upwind and high-resolution schemes* (pp. 218-290). Springer, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [4] Harten A. ENO schemes with subcell resolution. *Journal of Computational Physics*, Vol. 83(1), pp. 148-84, 1989.
- [5] Liu XD, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of computational physics*, Vol. 115(1), pp. 200-12, 1994.
- [6] Jiang GS. *Efficient implementation of weighted ENO schemes*. Department of Mathematics, University of California, Los Angeles; 1995.
- [7] Chai D, Xi G, Sun Z, Wang Z, Huang Z. An efficient modified WENO scheme based on the identification of inflection points. *Computers & Fluids*. Vol. 170, pp. 176-86, 2018.
- [8] Liu S, Shen Y, Peng J, Zhang J. Two-step weighting method for constructing fourth-order hybrid central WENO scheme. *Computers & Fluids*. Vol. 207, p. 104590, 2020.
- [9] Rathan S, Gande NR, Bhise AA. Simple smoothness indicator WENO-Z scheme for hyperbolic conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*. Vol. 157, pp. 255-75, 2020.
- [10] Wang Y, Du Y, Zhao K, Yuan L. A new 6th-order WENO scheme with modified stencils. *Computers & Fluids*. Vol. 208, p.104625, 2020.
- [11] Zhu Y, Hu X. An L2-norm regularized incremental-stencil WENO scheme for compressible flows. *Computers & Fluids*. Vol. 213, p.104721, 2020.
- [12] Wu C, Wu L, Li H, Zhang S. Very high order WENO schemes using efficient smoothness indicators. *Journal of Computational Physics*. Vol. 432, p. 110158, 2021.

- [33] Bijl H, Wesseling P. A unified method for computing incompressible and compressible flows in boundary-fitted coordinates. *Journal of Computational Physics*, Vol. 141(2), pp. 153-73, 1998.
- [34] Moukalled F, Darwish M. A high-resolution pressure-based algorithm for fluid flow at all speeds. *Journal of Computational Physics*, Vol. 168(1), pp. 101-30, 2001.
- [35] Darbandi M, Schneider GE. Analogy-based method for solving compressible and incompressible flows. *Journal of Thermophysics and heat Transfer*, Vol. 12(2), pp. 239-47, 1998.
- [36] Darbandi M, Schneider GE. Performance of an analogy-based all-speed procedure without any explicit damping. *Computational mechanics*, Vol. 26(5), pp. 459-69, 2000.
- [37] van der Heul DR, Vuik C, Wesseling P. A conservative pressure-correction method for flow at all speeds. *Computers & Fluids*, Vol. 32(8), pp. 1113-32, 2003.
- [38] Cubero A, Fueyo N. Preconditioning based on a partially implicit implementation of momentum interpolation for coupled solvers. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Vol. 53(6), pp. 510-35, 2008.
- [39] Darwish M, Sraj I, Moukalled F. A coupled finite volume solver for the solution of incompressible flows on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, Vol. 228(1), pp. 180-201, 2009.
- [40] Chen ZJ, Przekwas AJ. A coupled pressure-based computational method for incompressible/compressible flows. *Journal of Computational Physics*, Vol. 229(24), pp. 9150-65, 2010.
- [41] Darwish M, Moukalled F. A fully coupled Navier-Stokes solver for fluid flow at all speeds. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Vol. 65(5), pp. 410-44, 2014.
- [42] Xiao CN, Denner F, van Wachem BG. Fully-coupled pressure-based finite-volume framework for the simulation of fluid flows at all speeds in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, Vol. 346, pp. 91-130, 2017.
- [43] Denner F, Xiao CN, van Wachem BG. Pressure-based algorithm for compressible interfacial flows with acoustically-conservative interface discretisation. *Journal of Computational Physics*, Vol. 367, pp. 192-234, 2018.
- [44] Lax PD, Liu XD. Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 19(2), pp. 319-40, 1998.
- [45] Darbandi M, Mokarizadeh V. A modified pressure-based algorithm to solve flow fields with shock and expansion waves. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Vol. 46(5), pp. 497-504, 2004.
- [46] Xiao Ch, Denner F, Wachem B. Fully-coupled pressure-based finite-volume framework for the simulation of fluid flows at all speeds in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, Vol. 346, pp. 91-130, 2017.
- [47] San O, Kara K. Numerical assessments of high-order accurate shock capturing schemes: Kelvin-Helmholtz type vortical structures in high-resolutions. *Computers & Fluids*, Vol. 89, pp. 254-76, 2014.
- [13] Li P, Gao Z. Simple high order well-balanced finite difference WENO schemes for the Euler equations under gravitational fields. *Journal of Computational Physics*. Vol. 437, p.110341, 2021.
- [14] Pan L, Cao G, Xu K. Fourth-order gas-kinetic scheme for turbulence simulation with multi-dimensional WENO reconstruction. *Computers & Fluids*. Vol. 221, p.104927, 2021.
- [15] Hu F. High-order mapped WENO methods with improved efficiency. *Computers & Fluids*. Vol. 219, p. 104874, 2021.
- [16] Luo X, Wu SP. Improvement of the WENO-Z+ scheme. *Computers & Fluids*. Vol. 218, p.104855, 2021.
- [17] Wang PP, Zhang AM, Meng ZF, Ming FR, Fang XL. A new type of WENO scheme in SPH for compressible flows with discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 381: p. 113770, 2021.
- [18] Chorin AJ. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of computational physics*. , Vol. 2(1), pp. 12-26, 1967.
- [19] Hejranfar K, Parseh K. Preconditioned characteristic boundary conditions based on artificial compressibility method for solution of incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, Vol. 345, pp. 543-64, 2017.
- [20] Djavarehshkian M. A new NVD scheme in pressure-based finite-volume methods. *In14th Australasian Fluid Mechanics conference*, Adelaide University, Adelaide, Australia, pp. 339-342, 2001.
- [21] Djavarehshkian MH, Reza-Zadeh S. Application of normalized flux in pressure-based algorithm. *Computers & fluids*, Vol. 36(7), pp. 1224-34, 2007.
- [22] Issa RI, Javareshkian MH. Pressure-based compressible calculation method utilizing total variation diminishing schemes. *AIAA journal*, Vol. 36(9), pp. 1652-7, 1998.
- [23] Shyy W, Chen MH, Sun CS. Pressure-based multigrid algorithm for flow at all speeds. *AIAA journal*, Vol. 30(11), pp. 2660-9, 1992.
- [24] Demirdžić I, Lilek Ž, Perić M. A collocated finite volume method for predicting flows at all speeds. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 16(12), pp. 1029-50, 1993.
- [25] Lien FS, Leschziner MA. A pressure-velocity solution strategy for compressible flow and its application to shock/boundary-layer interaction using second-moment turbulence closure.
- [26] Lien FS, Leschziner MA. A general non-orthogonal collocated finite volume algorithm for turbulent flow at all speeds incorporating second-moment turbulence-transport closure, Part 1: Computational implementation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 114(1-2), pp. 123-48, 1994.
- [27] Politis ES, Giannakoglou KC. A PRESSURE-BASED ALGORITHM FOR HIGH-SPEED TURBOMACHINERY FLOWS. *International journal for numerical methods in fluids*, Vol. 25(1), pp. 63-80, 1997.
- [28] Chen KH, Pletcher RH. Primitive variable, strongly implicit calculation procedure for viscous flows at all speeds. *AIAA journal*, Vol. 29(8), pp. 1241-9, 1991.
- [29] Karimian SM, Schneider GE. Pressure-based control-volume finite element method for flow at all speeds. *AIAA journal*, Vol. 33(9), pp. 1611-8, 1995.
- [30] Karimian SM, Schneider GE. Pressure-based computational method for compressible and incompressible flows. *Journal of thermophysics and heat transfer*, Vol. 8(2), pp. 267-74, 1994.
- [31] Darbandi M, Schneider GE. Momentum variable procedure for solving compressible and incompressible flows. *AIAA journal*. Dec:35(12), pp. 1801-5, 1997.
- [32] Van Doormaal JP, Raithby GD, McDonald BH. The segregated approach to predicting viscous compressible fluid flows.