



بررسی روش‌های پیش‌شرطی کلی و موضعی در جریان‌های داخلی و خارجی

مهدی مقدس خراسانی^۱، عدنان محمدی^{۲*}، محمد حسن جوارشکیان^۳،

^۱ دانشجوی دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد، Moghadaskhorasani@mail.um.ac.ir

^۲ دانشجوی دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد، admohammadi@mail.um.ac.ir

^۳ استاد گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، javareskian@um.ac.ir

۱- چکیده

در این پژوهش، هدف اصلی بررسی عملکرد روش‌های پیش‌شرطی کلی و موضعی در سیستم معادلات اویلر تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر و توسعه یک الگوریتم تمام-سرعت غیرلزج است. در این راستا، روش پیش‌شرطی کلی اونریا و روش پیش‌شرطی موضعی چوی-مرکل در یک الگوریتم چگالی مینای دوبعدی با روش بالادستی «رو» در یک شبکه بی‌سازمان توسعه و فرمولاسیون ریاضی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه روش‌های پیش‌شرطی مذکور برحسب متغیرهای بقایی استخراج می‌شود. نتایج حاصل از اعمال روش‌های پیش‌شرطی اونریا و چوی-مرکل به سیستم معادلات اویلر از لحاظ نرخ همگرایی، دقت و انعطاف‌پذیری در جریان‌های تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر حول ایرفویل NACA0012 و جریان داخل کانال با برآمدگی بررسی شده و عملکرد روش‌های پیش‌شرطی مورد واکاوی دقیق قرار گرفت. نتایج حاصله نشان می‌دهد که استفاده از روش‌های پیش‌شرطی به کمک کاهش سختی معادلات اویلر، نرخ همگرایی را به‌طور چشمگیر نسبت به روش کلاسیک بهبود می‌دهند. این مطالعه همچنین نشان می‌دهد که روش پیش‌شرطی اونریا از انعطاف‌پذیری بالاتری در قیاس با روش پیش‌شرطی چوی-مرکل برخوردار است، اما از نظر نرخ همگرایی روش پیش‌شرطی چوی-مرکل عملکرد بهتری دارد.

واژه‌های کلیدی

پیش‌شرطی کلی، پیش‌شرطی موضعی، چگالی مینا، روش بالادستی «رو»، سختی معادلات اویلر

۲- مقدمه

در دهه‌های اخیر، با بهبود روش‌های محاسباتی، کاربرد ابزارهای محاسباتی برای شبیه‌سازی جریان سیال، انتقال حرارت و... جایگزین برخی روش‌های تجربی شده که باعث کاهش هزینه طراحی برای مهندسان شده‌است. توسعه روش‌های محاسباتی در دینامیک سیالات و افزایش قدرت پردازش کامپیوترها، دینامیک سیالات محاسباتی^۱ را به ابزاری قدرتمند برای شبیه‌سازی جریان‌های پیچیده تبدیل کرده‌است [۱]. حل معادلات تراکم‌پذیر برای جریان‌های با عدد ماخ پایین، با مشکل سختی^۲ در نرخ همگرایی مواجه می‌شود. علت این سختی، اختلاف شدید^۳ بین سرعت امواج

اکوستیک^۴ و جملات جابه‌جایی^۵ سیستم معادلات است. کورین [۲] از اولین محققین در زمینه روش‌های پیش‌شرطی^۶ برای برطرف کردن مشکل سختی روش تراکم‌پذیری مصنوعی^۷ را توسعه داد و آنرا به معادله بقای جرم اضافه کرد. در نتیجه ماهیت هذلولوی سیستم معادلات حفظ گردید و نرخ همگرایی افزایش پیدا کرد اگرچه دقت زمانی کاهش یافت. ترکل [۳] با توسعه تراکم‌پذیری مصنوعی کورین به معادلات مومنتوم، ماتریس پیش‌شرطی خود را ارائه داد. چوی و مرکل [۴، ۵] برحسب متغیرهای بقایی، دو ماتریس پیش‌شرطی برای جریان غیرلزج و سیستم معادلات ناویر استوکس در سرعت‌های پایین معرفی کردند. در پژوهش آنها از مفاهیم ارائه شده توسط کورین و ترکل برای پیدا کردن ماتریس پیش‌شرطی مناسب استفاده شد. یکی از پارامترهای مهم و تاثیرگذار بر نرخ همگرایی، عدد شرطی (نسبت بزرگترین سرعت مشخصه به کوچکترین سرعت مشخصه) است. مقدار بهینه این پارامتر، مقدار واحد است و در سرعت‌های پایین این پارامتر به‌شدت افزایش می‌یابد. محققین مختلف روش‌های پیش‌شرطی متفاوتی برای کاهش عدد شرطی در جریان‌های با عدد ماخ پایین ارائه داده‌اند [۶-۸]. در یک تقسیم‌بندی کلی، روش‌های پیش‌شرطی به دسته کلی^۸ و موضعی^۹ تقسیم می‌شوند. چنانچه ماتریس‌های پیش‌شرطی بر مبنای سرعت‌های موضعی سیال طراحی شوند به آن روش پیش‌شرطی موضعی و چنانچه ماتریس پیش‌شرطی بر مبنای یک سرعت ثابت به‌طور مثال سرعت جریان آزاد در تمام نقاط طراحی شود، به آن روش پیش‌شرطی کلی گفته می‌شود. اساساً تفاوت اصلی این دو روش، انتخاب نحوه انتخاب پارامتر پیش‌شرطی است. آنچه از ماتریس‌های پیش‌شرطی تاکنون معرفی شدند، ماتریس‌های پیش‌شرطی موضعی بودند. در زمینه ماتریس‌های پیش‌شرطی کلی نیز پژوهش‌هایی انجام شده‌است. یلدریم و سینلا [۹، ۱۰] یک ماتریس پیش‌شرطی کلی برای جریان‌های با عدد ماخ پایین ارائه دادند آنها معادله انرژی را با استفاده از آنتالپی جریان آزاد بی‌بعد کرده و نشان دادند به دلیل هم مرتبه‌سازی بهتر متغیرها دقت نتایج افزایش می‌یابد. در پژوهشی دیگر اونریا [۱۱] در سال ۲۰۱۵ در رساله دکتری خود ماتریس پیش‌شرطی کلی جدیدی برحسب متغیرهای بقایی معرفی کرد. برخلاف روش‌های قبلی که تراکم‌پذیری مصنوعی به معادله بقای جرم اضافه می‌شود، او تراکم‌پذیری مصنوعی را به معادله انرژی اضافه کرد و بر این اساس ماتریس پیش‌شرطی

⁶ Preconditioning

⁷ Artificial compressibility

⁸ Global

⁹ Local

¹ CFD

² Stiffness

³ Large disparity

⁴ Acoustic

⁵ Convective terms

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{Q}_C} \frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial x} + \Gamma \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{Q}_C} \frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial t} + A_R \frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial x} + A_T \frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

در معادلات بالا Γ و A_{RT} به ترتیب ماتریس پیش‌شرطی و ماتریس ژاکوبین پیش‌شرطی است.

۱-۱-۳- ماتریس پیش‌شرطی چوی-مرکل

چوی و مرکل [۴] ماتریس پیش‌شرطی خود را برحسب متغیرهای اولیه $\vec{Q}_p = [p, u, v, T]^T$ برای جریان لزج تعریف کردند. برای محاسبه ماتریس پیش‌شرطی چوی-مرکل برحسب متغیرهای باقیی، با توجه به رابطه (۶) داریم [۱۳]:

$$\Gamma_{CM}^{-1}(\vec{Q}_C) = \Gamma_{CM}^{-1}(\vec{Q}_p) \frac{\partial \vec{Q}_p}{\partial \vec{Q}_C} \quad (6)$$

بنابراین ماتریس پیش‌شرطی چوی و مرکل بر حسب متغیرهای باقیی به صورت رابطه (۷) بدست می‌آید.

$$\Gamma_{CM} = \begin{bmatrix} 1 + \mu & -\phi u & -\phi v & \phi \\ u\mu & 1 - \phi u^2 & -\phi uv & \phi u \\ v\mu & -\phi uv & 1 - \phi v^2 & \phi v \\ H_0\mu & -u\phi H_0 & -v\phi H_0 & \phi H_0 + 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\phi = \frac{1 - \gamma}{C^2}$$

$$\mu = 1 + \beta^2 + \phi H_0$$

که در آن H_0 و C_p به ترتیب آنتالپی کل، سرعت صوت و گرمای ویژه در فشار ثابت است. β نیز پارامتر پیش‌شرطی یا همان پارامتر تراکم‌پذیری مصنوعی است که به صورت موضعی و از رابطه $\beta^2 = \min(1, M^2)$ محاسبه می‌شود.

۱-۲-۳- ماتریس پیش‌شرطی اونر

اونر [۱۱] ماتریس پیش‌شرطی کلی خود را با تخفیف ترم‌های مشتق معادله بقای جرم و معادله انرژی به کمک تراکم‌پذیری مصنوعی، ماتریس پیش‌شرطی خود را برحسب متغیرهای باقیی برای جریان لزج ارائه داد. در روش او از مجذور عدد ماخ جریان آزاد برای تخفیف ترم‌های مشتق زمانی استفاده شده است. ایشان ماتریس خود را به صورت رابطه (۸) معرفی کرد.

$$\Gamma_B(\vec{Q}_C) = \begin{bmatrix} M_\infty^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -u(M_\infty^2 - 1) & -v(M_\infty^2 - 1) & M_\infty^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

۱-۲-۳- گسسته‌سازی معادلات

برای گسسته‌سازی معادلات اوایلر دو بعدی، از یک شبکه بی‌سازمان و روش حجم محدود با الگوریتم بالادستی رو استفاده می‌شود. قسمت زمانی معادلات نیز طبق روش رانگ کوتا مرتبه ۴ بصورت صریح گسسته می‌شود.

خود را معرفی کرد. ماتریس پیش‌شرطی او در اعداد ماخ پایین هیچ‌گونه تکنیکی نشان نداد. نتایج بدست آمده از پژوهش ایشان در دامنه وسیعی از شرایط جریان موید از بهبود نتایج نسبت به روش کلاسیک بود. روش‌های پیش‌شرطی بر مبنای سرعت کلی، پایداری بهتری دارند اگرچه در جریان‌های پیچیده با مشکل دقت همراه هستند. روش‌های پیش‌شرطی موضعی انعطاف خود را در نقاط سکون از دست می‌دهند. به‌طور مثال ترکل و واتسا [۱۲] و در پژوهش خود نشان دادند که در جریان‌های سرعت پایین به‌ویژه در نزدیکی نقاط سکون روش‌های پیش‌شرطی موضعی، به‌علت غیرمتعامد شدن بردارهای ویژه، اغتشاشات افزایش یافته و نرخ همگرایی با کندی همراه می‌شود. همچنین آنها در پژوهش خود به بررسی مقایسه روش پیش‌شرطی برحسب متغیرهای بقای و اولیه پرداختند. آنها نشان دادند در جریان‌هایی که جریان تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر به‌طور همزمان وجود دارد، روش‌های پیش‌شرطی برحسب متغیرهای باقیی ابزار قدرتمندی را فراهم می‌آورد.

در این پژوهش هدف اصلی بررسی روش‌های پیش‌شرطی کلی و موضعی در جریان‌های داخلی و خارجی دوبعدی برای معادلات اوایلر است. بدین منظور دو ماتریس پیش‌شرطی کلی اونر و ماتریس پیش‌شرطی موضعی چوی-مرکل به سیستم معادلات اوایلر اضافه شده و فرمولاسیون ریاضی روش‌های پیش‌شرطی مذکور برحسب متغیرهای باقیی استخراج می‌شود. روش‌های پیش‌شرطی مذکور در شرایط مختلف جریان تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر حول ایرفول NACA0012 و جریان داخل کانال با برآمدگی از نظر نرخ همگرایی، دقت و انعطاف مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. لازم به ذکر است که در این پژوهش قسمت مکانی معادلات طبق روش حجم محدود بالادستی "رو" همراه با روش پیشرو در زمان^{۱۱} و قسمت زمانی معادلات طبق روش رانگ کوتا^{۱۲} گسسته‌سازی می‌شود.

۳- معادلات

فرمت بقای معادلات حاکم بر جریان غیرلزج دو بعدی که معادلات اوایلر نام دارد به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

که در آن \vec{Q}_C بردار حل بقای \vec{E} و \vec{F} بردارهای شار غیرلزج است که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\vec{Q}_C = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (\rho E + P)u \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (\rho E + P)v \end{bmatrix} \quad (2)$$

در رابطه (۲) ρ چگالی، P فشار استاتیکی، (u, v) سرعت‌های کارترین و انرژی کل است.

۱-۳- معرفی ماتریس‌های پیش‌شرطی

در حل پایای معادلات اوایلر به روش پیشرو در زمان، عبارات زمانی در نهایت به سمت صفر میل کرده و بنابراین تغییر عبارات زمانی هیچ تغییر در نتایج حل پایا ایجاد نمی‌کند. معادلات اوایلر پیش‌شرطی طبق رابطه زیر بدست می‌آید.

شکل انتگرالی معادلات اویلر پیش‌شرطی روی سطح معیار Ω با مرز $\partial\Omega$ به صورت رابطه زیر می‌باشد.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \vec{Q}_c dA + \Gamma \iint_{\partial\Omega} \vec{H}(\vec{Q}_c) \cdot \hat{n} ds = 0 \quad (9)$$

که در رابطه بالا \vec{H} شار عبوری از سطوح مرزی است و به صورت $\vec{H}(\vec{Q}_c) = E(\vec{Q}_c)\mathbf{i} + F(\vec{Q}_c)\mathbf{j}$ می‌باشد.

برای گسسته‌سازی قسمت مکانی معادلات، از یک شبکه بی‌سازمان با سلول‌های مثلثی استفاده شده‌است.

$$\vec{H}(\vec{Q}_c) = \sum_{j=1}^{Nedge} (E_j^i(\vec{Q}_c)N_{xj} + E_j^j(\vec{Q}_c)N_{yj}) \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)، \vec{H} معرف سلول‌های شبکه و j معرف اضلاع هر سلول است. قسمت مکانی رابطه طبق روش حجم محدود به صورت رابطه (۱۱) معین می‌گردد.

$$\Gamma \int_{\partial\Omega} \vec{H}(\vec{Q}_c) \cdot \hat{n} ds = \Gamma \sum_{k=1}^3 \vec{H}_k \cdot d\ell_k \quad (11)$$

که ℓ طول هر وجه سلول و \vec{H}_k شار عبوری از وجه k است که طبق رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود.

$$\vec{H}_k = 0.5[\vec{H}(\vec{Q}_L) + \vec{H}(\vec{Q}_R) - \tilde{T}^{-1}|\tilde{A}_\Gamma|\Delta Q]_K \quad (12)$$

در رابطه بالا جملات \vec{Q}_L و \vec{Q}_R به ترتیب بردار متغیرهای بقایی در سمت چپ و راست وجه k ، \tilde{A}_Γ نیز ماتریس ژاکوبین معادلات پیش‌شرطی و علامت \sim بیان‌گر مقادیر میانگین رو است. جزئیات مربوط به روش کلاسیک رو و میانگین‌گیری رو در مرجع [۱۴] آمده است. جمله $\tilde{T}^{-1}|\tilde{A}_\Gamma|\Delta Q$ همان ترم اتلاف مصنوعی روش رو است که برای هر ماتریس پیش‌شرطی جداگانه حساب می‌شود. برای محاسبه ترم اتلاف پیش‌شرطی مطابق مرجع [۱۴] عمل می‌کنیم. ابتدا با قطری‌سازی ماتریس ژاکوبین روش‌های پیش‌شرطی $\tilde{A}_{\Gamma Z} = \tilde{T}_Z \tilde{A} \tilde{T}_Z^{-1}$ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس به صورت رابطه (۱۳) بدست می‌آید.

$$\tilde{A}_{\Gamma Z} = \tilde{M}_Z |\Lambda_Z| \tilde{M}_Z^{-1} \quad (13)$$

که Z بیان‌گر ماتریس پیش‌شرطی اونر و یا چوی-مرکل است \tilde{M}_Z و $|\Lambda_Z|$ ماتریس به ترتیب بردار ویژه سمت چپ و بردار ویژه سمت راست و $|\Lambda_Z|$ ماتریس قطری مقادیر ویژه می‌باشد. حال در گام بعد ترم اتلافی پیش‌شرطی مطابق رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$\tilde{T}_Z^{-1} |\tilde{A}_{\Gamma Z}| \Delta Q = (\tilde{T}_Z^{-1} \tilde{M}_Z) |\Lambda_Z| (\tilde{M}_Z^{-1} \Delta Q) \quad (14)$$

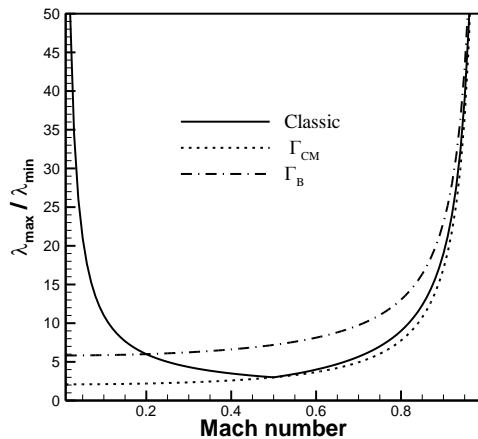
مقادیر ویژه ماتریس قطری $|\Lambda_Z|$ ، که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|\Lambda| = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \quad (15)$$

پس از محاسبه بردارهای ویژه و مقادیر مشخصه در نهایت ترم میرایی به صورت (۱۶) قابل محاسبه است.

$$\tilde{T}_Z^{-1} |\tilde{A}_{\Gamma Z}| \Delta \tilde{Q} = \sum_{k=1}^4 \sigma_{KZ} |\lambda_{kZ}| R_{KZ} \quad (16)$$

سنجش میزان سختی معادلات به کمک عدد شرطی معین می‌شود. عدد شرطی به نسبت بزرگ‌ترین مقدار ویژه به کوچک‌ترین مقدار ویژه سیستم معادلات تعریف می‌شود. مقایسه عدد شرطی معادلات پیش‌شرطی شده توسط ماتریس اونر و چوی-مرکل در شکل ۱ با عدد شرطی سیستم معادلات کلاسیک آمده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که هر دو روش پیش‌شرطی در محدوده اعداد ماخ تراکم‌ناپذیر، عدد شرطی را نسبت به روش کلاسیک به‌طور چشم‌گیر کاهش می‌دهند اما اثر روش پیش‌شرطی چوی-مرکل در کاهش عدد شرطی بیشتر می‌باشد. همچنین در محدوده جریان تراکم‌پذیر، روش پیش‌شرطی چوی-مرکل عملکرد تقریباً مشابه‌ای با روش کلاسیک دارد. اما روش پیش‌شرطی اونر در محدوده جریان تراکم‌پذیر عدد شرطی بزرگ‌تری را اختیار می‌کند.



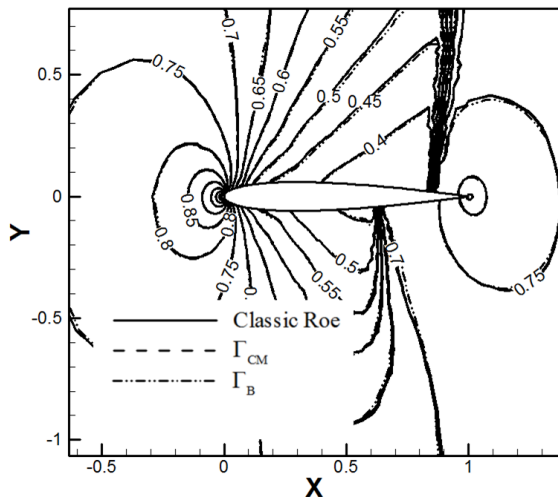
شکل ۱: مقایسه عدد شرطی روش‌های پیش‌شرطی و روش کلاسیک

۴- نتایج و بحث‌ها

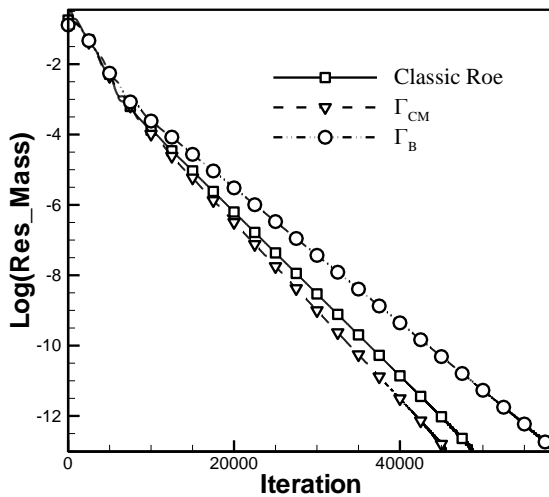
در این بخش به بررسی عملکرد سیستم معادلات کلاسیک و پیش‌شرطی با استفاده از ماتریس‌های پیش‌شرطی چوی-مرکل و اونر برای تحلیل جریان خارجی دو بعدی تراکم‌پذیر حول ایرفویل NACA0012 و جریان داخل یک کانال با برآمدگی ۱۰٪ در شرایط مختلف مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌گیرند. الگوریتم مورد استفاده روش "رو" بالادستی در شبکه بی‌سازمان بوده و جهت افزایش پایداری حل عددی و عدد کورانت مجاز، از روش هموارسازی باقیمانده‌ها استفاده شده است [۱۵].

۴-۱- ایرفویل NACA0012

برای بررسی کارایی روش‌های پیش‌شرطی چوی-مرکل و اونر در تحلیل عددی جریان خارجی حول ایرفویل ناکا ۰۰۱۲ با اعداد ماخ مختلف شبیه‌سازی می‌شود. شبکه محاسباتی با تعداد ۱۰۲۴۲ المان و ۵۳۸۶ گره و دامنه حل مطابق شکل ۱ پس از بررسی و انجام آزمایشات متعدد بعنوان شبکه بهینه در این آزمایش مورد استفاده قرار گرفته است. شرایط مرزی مشخصه‌ها بر مبنای لایتنیرهای ریمان به‌عنوان شرط مرزی دوردست برای جریان‌های خارجی سبب افزایش دقت می‌شود. لذا در این پژوهش از شرط مرزی مشخصه‌ها برای جریان حول ایرفویل ناکا ۰۰۱۲ استفاده شده است. فرمولاسیون شرایط مرزی مشخصه‌ها در مرجع [۱۶] آمده‌است.

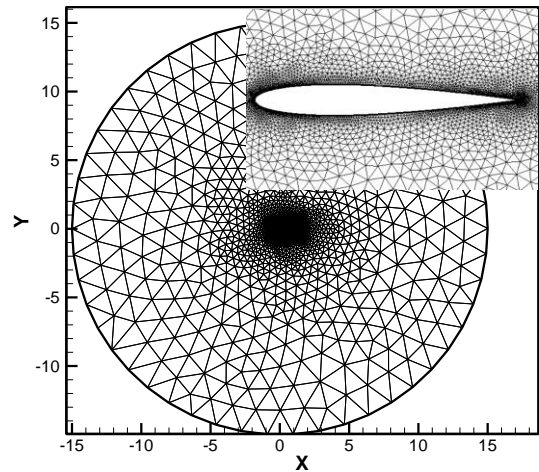


شکل ۴: مقایسه خطوط هم‌فشار حول ایرفویل NACA0012 در $M_\infty = 0.85$ و $AOA = 1^\circ$



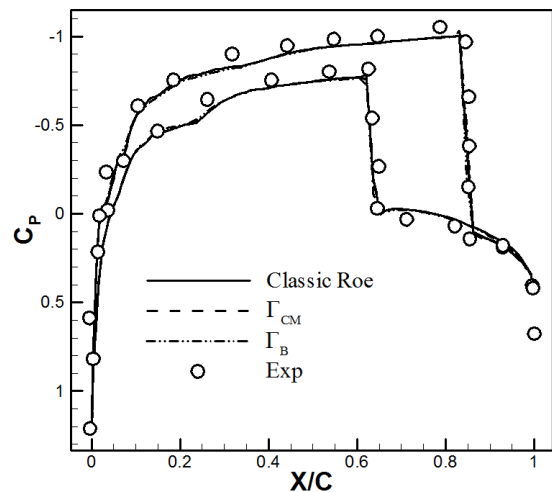
شکل ۵: مقایسه نرخ همگرایی حل برای ایرفویل NACA0012 در $AOA = 1^\circ$ و $M_\infty = 0.85$

در ادامه جهت بررسی دقیق‌تر روش‌های پیش‌شرطی در جریان تراکم‌ناپذیر، جریان حول ایرفویل در ماخ 0.85 مورد بررسی قرار می‌گیرد. مقایسه توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل در شکل ۶ نشان می‌دهد که روش کلاسیک در اعداد ماخ پایین به علت ترم اتلاف نامناسب با فیزیک جریان تراکم‌ناپذیر، جواب فیزیکی مناسبی ارائه نمی‌دهد [۱۴]. اما روش‌های پیش‌شرطی با برطرف کردن مشکل ذکر شده از طریق اصلاح ترم اتلاف مصنوعی قابلیت حل در اعداد ماخ بسیار پایین را فراهم می‌کنند و تطابق خوبی با نتیجه روش عددی پانل دارند. مقایسه نرخ همگرایی در شکل ۷ نشان می‌دهد که در روش کلاسیک به علت اختلاف شدید سرعت امواج آکوستیک با سرعت سیال، نرخ همگرایی بسیار کند است. اما روش‌های پیش‌شرطی با کاهش اختلاف سرعت امواج آکوستیک و امواج جابه‌جایی، نرخ همگرایی را افزایش می‌دهند. مقایسه عملکرد روش‌های پیش‌شرطی از نظر نرخ همگرایی در شکل ۷ نشان می‌دهد که روش پیش‌شرطی چوی-مرکل عملکرد بهتری را نسبت به روش پیش‌شرطی اونر-آرایه می‌دهد. در این تحلیل عدد کورانت برای تمامی روش‌ها مقدار 0.1 در نظر گرفته شد.



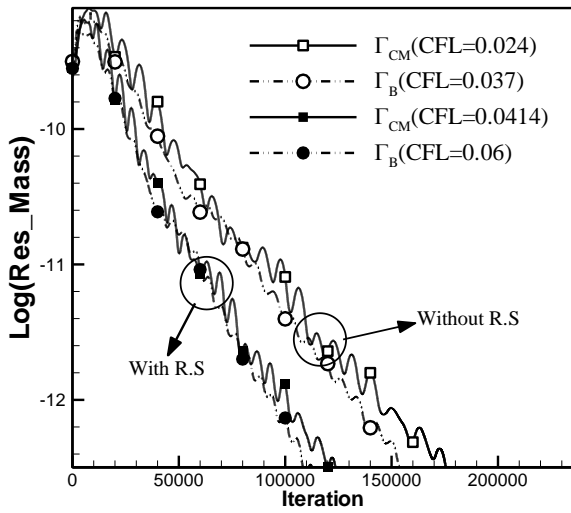
شکل ۶: شبکه محاسباتی حول ایرفویل NACA0012

مقایسه توزیع ضریب فشار و خطوط هم‌فشار به ترتیب در شکل‌های ۳ و ۴ برای عدد ماخ 0.85 و زاویه حمله 1° آورده شده است. بررسی نتایج نشان می‌دهد دو روش پیش‌شرطی اونر و چوی-مرکل در این عدد ماخ در مقایسه با روش کلاسیک از نظر دقت یکسان بوده و با داده‌های تجربی [۱۷] تطابق خوبی دارد.



شکل ۷: مقایسه توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل NACA0012 در $M_\infty = 0.85$ و $AOA = 1^\circ$

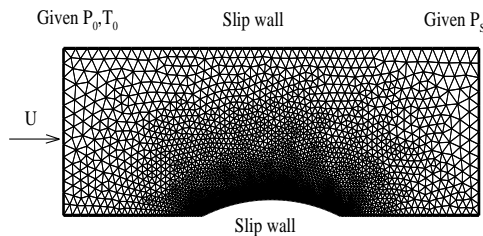
از نظر همگرایی به توجه به شکل ۴ عملکرد روش پیش‌شرطی چوی-مرکل (Γ_{CM}) تقریباً نزدیک به عملکرد سیستم معادلات کلاسیک می‌شود. با توجه به این که جریان حول ایرفویل در این عدد ماخ جریان گذر صوتی است و موج‌ضربه‌ای تشکیل می‌شود (شکل ۴)، به صورت موضعی عدد ماخ بزرگ‌تر از یک می‌شود. بنابراین با توجه به اینکه پارامتر پیش‌شرطی روش پیش‌شرطی چوی-مرکل برحسب عدد ماخ موضعی است، پارامتر پیش‌شرطی در این روش به سمت واحد میل کرده و اثر پیش‌شرطی از بین می‌رود و عملکرد آن از نظر نرخ همگرایی مشابه روش کلاسیک می‌شود. اما در ماتریس پیش‌شرطی اونر (Γ_B) سیستم معادلات همچنان پیش‌شرطی باقی‌مانده و نرخ همگرایی با کاهش همراه است. کاهش عملکرد روش پیش‌شرطی اونر در جریان تراکم‌پذیر نیز در بررسی عدد شرطی نیز مشاهده شد. عدد کورانت برای تمام روش‌ها برابر 0.5 در نظر گرفته شد.



شکل ۸: مقایسه قدرت و نرخ همگرایی روش‌های پیش‌شرطی حول ایرفویل NACA0012 در $M_\infty = 0.1$ و $AOA = 7^\circ$

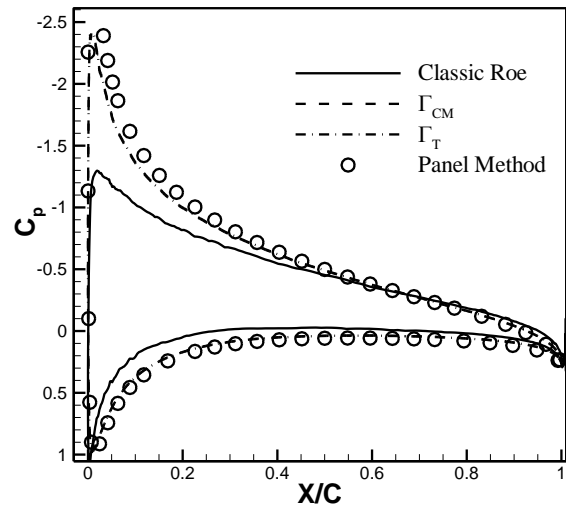
۴-۲- جریان داخل کانال با برآمدگی ۱۰٪

برای ارزیابی عملکرد روش‌های پیش‌شرطی کلی و موضعی در جریان داخلی، جریان درون یک کانال با برآمدگی ۱۰٪ مورد بررسی قرار گرفته‌است. برای این آزمایش، برای جریان ورودی مادون‌صوت، فشار سکون P_0 و دمای سکون مشخص T_0 می‌گردد. در خروجی، فشار استاتیک خروجی معین گردیده و مابقی متغیرها از داخل میدان مشخص می‌گردد. شبکه محاسباتی بهینه شده که در نزدیکی برآمدگی تراکم بیشتری دارد با ۵۹۱۳ سلول و ۳۰۸۲ گره در شکل ۹ آورده شده‌است.

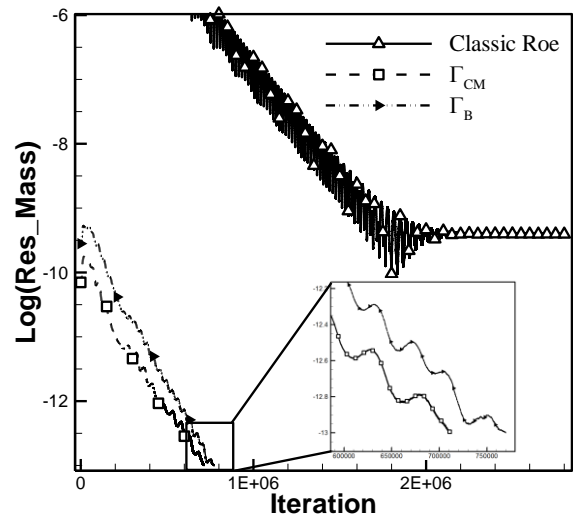


شکل ۹: شبکه محاسباتی برای کانال با برآمدگی دایره‌ای ۱۰٪

جهت اعتبار سنجی نتایج روش‌های پیش‌شرطی و روش کلاسیک برای عدد ماخ ۰/۵، توزیع عدد ماخ بر روی دیواره‌های بالا و پایین کانال با نتایج عددی بدست آمده از جوارشکیان [۱۸] در شکل ۱۰ مقایسه شده‌است. نتایج نشان می‌دهند که توزیع عدد ماخ روی سطح برآمدگی برای تمامی روش‌ها، اختلافی نداشته و با نتایج جوارشکیان تطابق خوبی دارد.

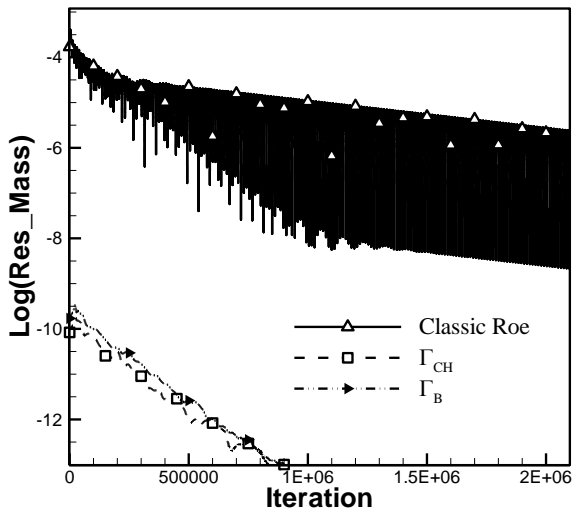


شکل ۶: مقایسه توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل NACA0012 در $M_\infty = 0.1$ و $AOA = 7^\circ$

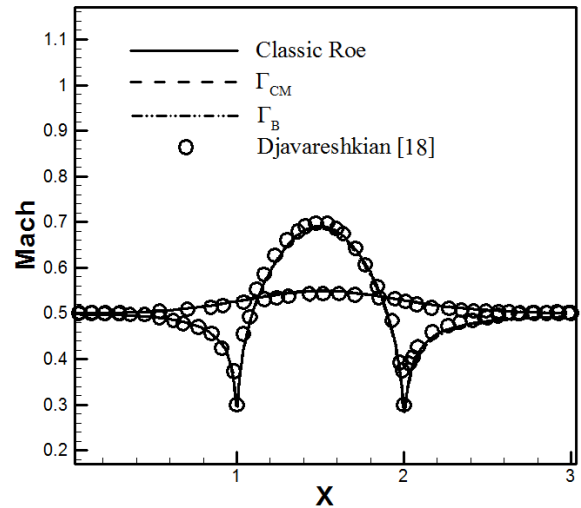


شکل ۷: مقایسه نرخ همگرایی حل برای ایرفویل NACA0012 در $M_\infty = 0.1$ و $AOA = 7^\circ$

یکی از معیارهای مهم یک روش عددی، انعطاف‌پذیری و قدرت آن روش است. امکان افزایش عدد کورانت بیان‌گر انعطاف‌پذیری یک روش عددی است. شکل ۸ مقایسه نرخ همگرایی حل در صورت استفاده و عدم استفاده از روش هموارسازی باقی‌مانده‌ها را نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که در صورت استفاده از هموارسازی باقی‌مانده‌ها مقدار حداکثر عدد کورانت مجاز برای روش‌های پیش‌شرطی اونر و چوی-مرکل، به ترتیب ۱/۶۲ و ۱/۷۲۵ برابر افزایش می‌یابد. بنابراین اثر هموارسازی باقی‌مانده‌ها در روش‌های پیش‌شرطی موضعی قابل توجه‌تر می‌باشد. اما از نظر انعطاف‌پذیری، ماتریس پیش‌شرطی اونر از انعطاف‌پذیری بیشتری برخوردار است و می‌تواند عدد کورانت بزرگ‌تری نسبت به روش پیش‌شرطی چوی-مرکل می‌تواند اختیار کند.



شکل ۱۲: مقایسه نرخ همگرایی در کانال با برآمدگی دایره‌ای ۱۰٪ در $M_\infty = 0.1$



شکل ۱۰: مقایسه توزیع عدد ماخ بر روی سطح برآمدگی دایره‌ای ۱۰٪ در $M_\infty = 0.5$

۵- جمع‌بندی

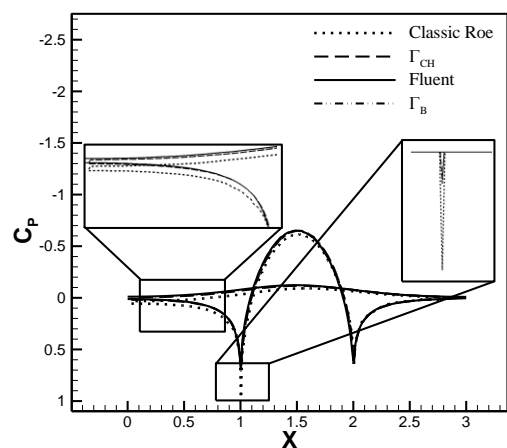
در این پژوهش دو روش پیش‌شرطی کلی اونریا و موضعی چوی-مرکل برای جریان‌های با عدد ماخ گذر صوتی و ماخ پایین در شبکه بی‌سازمان به کار گرفته شد. فرمولاسیون ریاضی روش‌های پیش‌شرطی برحسب متغیرهای بقای نیز استخراج گردید. عملکرد روش‌های پیش‌شرطی از نظر دقت، نرخ همگرایی و انعطاف در جریان‌های داخلی و خارجی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج زیر حاصل شد.

- بررسی عدد شرطی روش‌های پیش‌شرطی حاکی از عملکرد بهتر روش پیش‌شرطی موضعی چوی-مرکل در جریان‌های تراکم ناپذیر است
- روش‌های پیش‌شرطی موضعی و کلی با کاهش اختلاف سرعت امواج آکوستیک و جابه‌جایی توانستند بهبود قابل توجهی از نظر نرخ همگرایی در اعداد ماخ پایین نسبت به روش کلاسیک ارائه دهند.
- بررسی هموارسازی باقی‌مانده‌ها در هر دو روش منجر به افزایش بیشینه عدد کورانت مجاز شد که این افزایش در روش پیش‌شرطی موضعی چوی-مرکل قابل توجه‌تر بود. همچنین بررسی نتایج نشان داد که بیشینه عدد کورانت مجاز برای روش پیش‌شرطی اونریا بزرگ‌تر بود که نشان از انعطاف‌پذیری بالای این روش پیش‌شرطی کلی است.
- از نظر دقت و نرخ همگرایی، روش پیش‌شرطی چوی-مرکل در جریان‌های داخلی و خارجی عملکرد بهتری را نسبت به روش پیش‌شرطی اونریا در عدد کورانت برابر ارائه داد.

۶- مراجع و منابع

- [1] Y. Çengel, and J. Cimbala. "Fluid Mechanics: fundamentals and applications, Mac Graw Hill, New York", 2006.

جهت بررسی اثرات تراکم‌ناپذیری، جریان داخل کانال در عدد ماخ ۰/۰۱ مورد بررسی قرار می‌گیرد. مقایسه توزیع ضریب فشار روش‌های پیش‌شرطی و روش کلاسیک با توزیع فشار خروجی بدست آمده از حلگر فشارمبنای نرم‌افزار فلونت ۱۳ در شکل ۱۲ آمده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد روش کلاسیک به علت مشکلات ذکر شده، در اعداد ماخ پایین با کاهش دقت همراه است. روش‌های پیش‌شرطی چوی-مرکل و اونریا با حفظ دقت و برطرف کردن مشکلات روش پیش‌شرطی در اعداد ماخ پایین (کاهش اختلاف مقادیر ویژه سیستم معادلات و اصلاح ترم میرایی الگوریتم «رو»)، نتیجه مشابهی با توزیع ضریب فشار خروجی نرم‌افزار فلونت ارائه می‌دهد. مقایسه نرخ همگرایی در شکل ۱۲ نیز نشان می‌دهد هر دو روش پیش‌شرطی نرخ همگرایی را نسبت به روش کلاسیک به‌طور چشمگیر بهبود می‌دهند که عملکرد روش پیش‌شرطی چوی-مرکل علاوه بر حفظ دقت نرخ همگرایی نسبتاً بهتری را نیز ارائه داد.



شکل ۱۱: مقایسه توزیع ضریب فشار بر روی سطح برآمدگی دایره‌ای ۱۰٪ در $M_\infty = 0.1$

- [2] A. J. Chorin. "A numerical method for solving incompressible viscous flow problems", *Journal of Computational Physics*. vol. 2, no. 1, pp. 12-26, 1967.
- [3] E. Turkel. "Acceleration to a steady state for the Euler equations", *Numerical methods for the Euler equations of fluid dynamics*, pp. 218-311, 1985.
- [4] Y. H. Choi, and C. L. Merkle. "The Application of Preconditioning in Viscous Flows", *Journal of Computational Physics*. vol. 105, no. 2, pp. 207-223, 1993.
- [5] C. L. Merkle, and Y.-H. Choi. "Computation of low-speed compressible flows with time-marching procedures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. vol. 25, no. 2, pp. 293-311, 1988.
- [6] D. Lee. "Design criteria for local Euler preconditioning", *Journal of Computational Physics*. vol. 144, no. 2, pp. 423-459, 1998.
- [7] D. Lee. "The design of local navier–stokes preconditioning for compressible flow", *Journal of Computational Physics*. vol. 144, no. 2, pp. 460-483, 1998.
- [8] B. VA, W.-T. Lee, and P. ROE, "Characteristic time-stepping or local preconditioning of the Euler equations", *Series titles*. p. 1552.
- [9] B. G. Yildirim, *A global preconditioning method for the Euler equations: Mississippi State University*, 2003.
- [10] B. Yildirim, and P. Cinnella, "On the validation of a global preconditioner for the Euler equations", *Series titles*. p. 740.
- [11] O. Baş, "Development of an all speed navier-stokes preconditioner for two and three dimensional flows on hybrid grids," *Aerospace Engineering*, Middle East Technical University, 2015.
- [12] E. Turkel, "Preconditioning methods for low-speed flows", in *14th Appl. Aerodyn. Conference*. New Orleans, LA, U.S.A., 1996.
- [13] K. Hejranfar, and R. Kamali-Moghadam. "Assessment of three preconditioning schemes for solution of the two-dimensional Euler equations at low Mach number flows", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. vol. 89, no. 1, pp. 20-52, 2012.
- [14] H. Guillard, and C. Viozat. "On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit", *Computers & Fluids*. vol. 28, no. 1, pp. 63-86, 1999.
- [15] D. C. Slack, D. L. Whitaker, and R. W. Walters. "Time integration algorithms for the two-dimensional Euler equations on unstructured meshes", *AIAA Journal*. vol. 32, no. 6, pp. 1158-1166, 1994.
- [16] F. Moukalled, L. Mangani, and M. Darwish. "The characteristic boundary condition in pressure-based methods", *Numer. Heat Transf. B: Fundam*. vol. 76, pp. 1-17, 2019.
- [17] Advisory, Group, for, Aerospace, Research, and Development, "Test Cases for Inviscid Flow Field Methods". North Atlantic, USA, 1985.
- [18] M. H. Djavahshkian, and S. Reza-zadeh. "Application of normalized flux in pressure-based algorithm", *Computers & Fluids*. vol. 36, no. 7, pp. 1224-1234, 2007.