مقایسه دو عدد فازی ذوزنقه‌ای با استفاده از نامساوی کر بهبودیافته

علی محرابیان[۱]، رضا قنبری[۲]، خاطره قربانی مقدم[۳]، سعید نژادحسین[۴]

[۱] دانشجوی دکتری تحقیق در عملیات؛ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، alimehr600@gmail.com
[۲] عضو هیئت علمی دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، rghanbari.um.ac.ir
[۳] عضو آزمایشگاه بهینه‌سازی دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، khatere.moghadam67@gmail.com
[۴] عضو هیئت علمی دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام نور گناباد، nejhadhosein@pnu.ac.ir

چکیده

در این مقاله، یک روش بهبود یافته‌ی کر را برای مقایسه دو عدد فازی ذوزنقه‌ای پیشنهاد می‌کنیم تا با انجام محاسباتی ساده‌تر و در زمانی کوتاه‌تر بتوان دو عدد فازی ذوزنقه‌ای را با هم در محیط فازی و بدون تبدیل آن‌ها به اعداد دقیق مقایسه کرد. از کاربردهای مهم فرمول پیشنهادی به کاربردن آن در الگوریتم‌های بهینه‌سازی (خطی و غیرخطی) است. در پایان روش ارایه شده در این مقاله را با روش‌های موجود مقایسه کردیم.

کلمات کلیدی: اعداد فازی ذوزنقه‌ای، نامساوی کر بهبودیافته، برنامه‌ریزی خطی فازی.

۱– مقدمه

مقایسه‌ی دو عدد فازی نقش محاسباتی مهمی در الگوریتم‌های مختلف دارد ([۴ تا ۶]). روش‌های متفاوتی برای مقایسه‌ی اعداد فازی معرفی شده‌اند. ازجمله، ونگ و کر[۱] [۱۱] سه روش برای مرتب سازی اعداد فازی بر اساس روش رتبه بندی ارایه کردند. آدامو[۲] [۱] برای مرتب سازی اعداد فازی از α-برش استفاده کرد. یاگر[۳] [۱۲] روش‌های رتبه بندی را برای مرتب سازی اعداد فازی به کار گرفت.

قنبری و همکاران [۷] یک فرمول جدید برای مقایسه اعداد فازی LR پیشنهاد کردند و از این فرمول برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی استفاده کردند (کارهای مشابه را می‌توانید در ([۷ تا ۹] ببینید).

استفاده از نامساوی کر [۲] یکی از روش‌های شناخته شده برای مقایسه‌ی دو عدد فازی است. نخست، با استفاده از اصل گسترش و α-برش، ماکسیمم فازی برای دو عدد فازی محاسبه می‌شود و سپس با استفاده از متر هامینگ[۴] [۲] مقایسه صورت می‌گیرد. این جا، می‌خواهیم روش کر را برای مقایسه‌ی دو عدد فازی ذوزنقه‌ای از دیدگاه پیچیدگی محاسباتی بهبود دهیم. در ادامه، نشان می‌دهیم که برای مقایسه‌ی دو عدد فازی ذوزنقه‌ای نیازی به محاسبه‌ی ماکسیمم فازی برای دو عدد در مقایسه با روش کر اصلی نیست. سپس، فرمولی را برای مقایسه‌ی دو عدد فازی ذوزنقه‌ای ارایه می‌دهیم.

[1] Wang and Kerre

[2] Adamo

[3] Yager

[4] Hamming Distance

۲- تعریف‌های مقدماتی

در این بخش، تعریف‌هایی مقدماتی در مورد عدد فازی و خلاصه‌ای از روش کر بهبود یافته را بیان می‌کنیم.

تعریف۱ (مجموعه فازی). [۳] فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد. $\tilde{A}$ را یک مجموعه فازی بر روی X گوییم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}.$$

تعریف۲ (تکیه‌گاه). [۳] تکیه‌گاه یک مجموعه‌ی فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$supp(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

تعریف۳ (مجموعه فازی محدب). [۳] یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ محدب است هرگاه داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{A}}(\gamma x + (1-\gamma)y) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}.$$

تعریف ۴ (عدد فازی LR). [۳] یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ با تابع عضویت

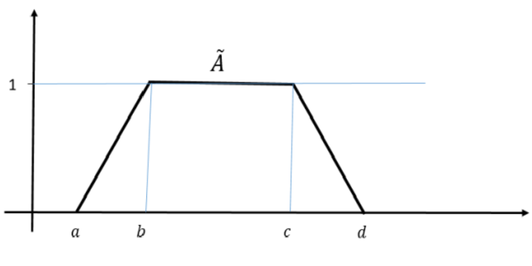
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & x \leq a \\ R\left(\dfrac{a-x}{\beta}\right), & x \geq a \end{cases}$$

را یک عدد فازی LR می‌نامند که در آن، L (به طور مشابه R) تابعی نا افزایشی از $\mathbb{R}^+$ به بازه [۰ ۱] است. در نمایش عدد فازی LR، a مقدار میانی، αو β به ترتیب پهنای چپ و راست $\tilde{A}$ نامیده می‌شوند.

تعریف ۵ (عدد فازی ذوزنقه‌ای). [۳] یک مجموعه‌ی فازی محدب $\tilde{A}$ بر روی X یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱. تابع عضویت به صورت قطعه‌ای پیوسته باشد.
۲. سه بازه $[a,b]$، $[b,c]$ و $[c,d]$ وجود داشته باشد به طوری که $\mu_{\tilde{A}}(x)$ بر روی بازه $[a,b]$ افزایشی باشد، بر روی بازه $[b,c]$ برابر یک باشد و بر روی بازه $[c,d]$ کاهشی باشد (شکل ۱ را ببینید).

نکته ۱: عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}$ را به صورت $\tilde{A} = (a/b, c/d)$ نمایش می‌دهیم که در آن $a < b < c < d$.



شکل ۱: یک عدد فازی ذوزنقه‌ای

تعریف۶ (متر هامینگ). [۲] متر هامینگ بین دو عدد فازی $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(\tilde{M},\tilde{N})=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{M}(x)-\tilde{N}(x)\right|dx.$$

### ۱-۲-	مقایسه‌ی دو عدد فازی با استفاده از نامساوی کر

در [۲] ، ماکسیمم فازی $(\widetilde{max})$ برای دو عدد فازی مثلثی با استفاده اصل گسترش به صورت زیر تعریف شده است:

$$\widetilde{max}(\tilde{M},\tilde{N})(z)=\sup\{\min\left(\tilde{M}(x),\tilde{N}(y)\right)\mid z=\max(x,y)\}$$

براساس روش کر، گوییم $\tilde{M}\leq\tilde{N}$ اگر و تنها اگر

$$d(\tilde{N},\widetilde{max})\leq d(\tilde{M},\widetilde{max})$$

که در آن، $d(.,.)$ متر هامینگ است و$=$ و $\geq$ به صورت‌هایی مشابه تعریف می‌شوند.

۳- روش کربهبودیافته برای مقایسه دوعدد فازی ذوزنقه‌ای

در این بخش می‌خواهیم یک فرمول ساده برای مقایسه‌ی دو عدد فازی ذوزنقه‌ای بیان خواهیم کرد.

تعریف ۷. [۸] $w_{\boldsymbol{z}}$ و E_z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w_z=\{w|w\leq z\}$$
$$E_z=\{(x,y)|x,y\in w_z,z=\max(x,y)\}.$$

لم ۱. [۸] فرض کنید $\tilde{M}=(a/b/c)_{LR}$ و $\tilde{N}=(a'/b'/c')_{LR}$ دو عدد فازی LR هستند. در این صورت، برای هر z داریم:

$$\max(\min\left(\tilde{M}(x),\tilde{N}(y)\right))\leq\max(\tilde{M}(z),\tilde{N}(z)),\quad\forall(x,y)\in E_z.$$

قضیه ۱: فرض کنید $\tilde{M}=(a/b,c/d)$ و $\tilde{N}=(a/b,c/d)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشد، $c\leq c'$ و $c\leq b'$.
در این صورت برای $z\in\mathbb{R}$ داریم:

$$\widetilde{max}(\tilde{M},\tilde{N})(z)=\begin{cases}\min\left(\tilde{M}(z),\tilde{N}(z)\right), & z\leq b\\ \tilde{N}(z), & b\leq z\leq c\\ \tilde{N}(z), & c\leq z\leq b'\\ 1, & b'\leq z\leq c'\\ \max\left(\tilde{M}(z),\tilde{N}(z)\right), & z\geq c'\end{cases}$$

قضیه ۲: فرض کنید $\tilde{M}=(a/b,c/d)$ و $\tilde{N}=(a'/b',c'/d')$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشد، $c>b$ و $c\leq c'$. در این صورت برای $z\in\mathbb{R}$ داریم:

$$\widetilde{max}(\widetilde{M},\widetilde{N})(z)=\begin{cases}\min\left(\widetilde{M}(z),\widetilde{N}(z)\right), & z\le \min(b,b')\\ \min\left(\widetilde{M}(z),\widetilde{N}(z)\right), & \min(b,b')\le z\le \max(b,b')\\ 1\,, & \max(b,b')\ \le\ z\le c\\ \max\left(\widetilde{M}(z),\widetilde{N}(z)\right), & c\le z\le c'\\ \max\left(\widetilde{M}(z),\widetilde{N}(z)\right), & z\ge c'\end{cases}$$

تعریف ۶. فرض کنید $\widetilde{M}=(a/b,c/d)$ و $\widetilde{N}=(a'/b',c'/d')$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشد و $\widetilde{O}=\widetilde{max}(\widetilde{M},\widetilde{N})$، $r(.,.)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r(\widetilde{M},\widetilde{N})=d(\widetilde{M},\widetilde{O})-d(\widetilde{N},\widetilde{O}).$$

توجه داریم که درنامساوی کر، اگر $d(\widetilde{M},\widetilde{O})-d(\widetilde{N},\widetilde{O})\ge 0$، آن‌گاه $\widetilde{M}\le\widetilde{N}$ و اگر $d(\widetilde{M},\widetilde{O})-d(\widetilde{N},\widetilde{O})\le 0$، آن‌گاه $\widetilde{M}\ge\widetilde{N}$. بنابراین، اگر $r(\widetilde{M},\widetilde{N})\ge 0$، آن‌گاه $\widetilde{M}\le\widetilde{N}$، در غیر این صورت $\widetilde{M}\ge\widetilde{N}$.

قضیه ۳: فرض کنید $\widetilde{M}=(a/b,c/d)$ و $\widetilde{N}=(a'/b',c'/d')$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشد، به طوری که $c\le c'$ و $c\le b'$ و $\bar{x}\in[c,b']$، که $\bar{x}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\bar{x}=\frac{db'-ca'}{(b'-a')+(d-c)}$$

$\bar{y}=M_R(\bar{x})=N_L(\bar{x})$. که در آن M_R یک تابع کاهشی بر روی بازه $[c,d]$ و N_L یک تابع افزایشی بر روی بازه $[a',b']$ است. آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned}r(\widetilde{M},\widetilde{N})&=\int_{\min(a,a')}^{b}\left(\widetilde{M}_L(z)-\widetilde{N}_L(z)\right)dz+\int_{b}^{c}\left(1-\widetilde{N}_L(z)\right)dz\\&+\int_{c}^{\bar{x}}\left(\widetilde{M}_R(z)-\widetilde{N}_L(z)\right)dz+\int_{\bar{x}}^{b'}(\widetilde{N}_L(z)-\widetilde{M}_R(z))dz\\&+\int_{b'}^{c'}\left(1-\widetilde{M}_R(z)\right)dz+\int_{c'}^{\max(d,d')}(\widetilde{N}_R(z)-\widetilde{M}_R(z))dz\end{aligned}$$

قضیه ۴: فرض کنید $\widetilde{M}=(a/b,c/d)$ و $\widetilde{N}=(a'/b',c'/d')$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشد، به طوری که $c\le c'$ و $c>b'$ آن‌گاه داریم:

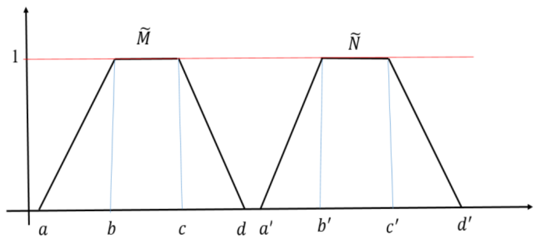
$$\begin{aligned}r(\widetilde{M},\widetilde{N})&=\int_{\min(a,a')}^{\min(b,b')}\left(\widetilde{M}_L(z)-\widetilde{N}_L(z)\right)dz+\int_{\min(b,b')}^{\max(b,b')}\left(1-\widetilde{N}_L(z)\right)dz\\&+\int_{c}^{c'}\left(1-\widetilde{M}_R(z)\right)dz+\int_{c'}^{\max(d,d')}(\widetilde{N}_L(z)-\widetilde{M}_R(z))dz\end{aligned}$$

که در آن M_R یک تابع کاهشی بر روی بازه $[c,d]$ و N_L یک تابع افزایشی بر روی بازه $[a',b']$ است.

از قضیه ۳ و ۴ می‌توان نتیجه گرفت:

نتیجه فرعی۱: فرض کنید $\widetilde{M}=(a/b,c/d)$ و $\widetilde{N}=(a'/b',c'/d')$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشد. اگر $d \le a'$ (شکل ۲) آن‌گاه،

$$r(\widetilde{M},\widetilde{N})=\frac{(d-a)+(c-b)}{2}+\frac{(d'-a')+(c'-b')}{2}$$

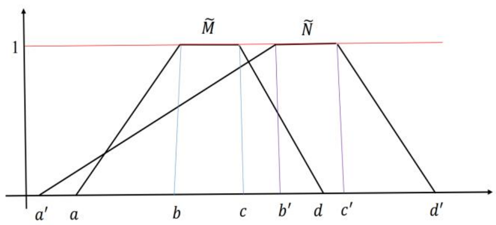


شکل ۲: دو عدد فازی ذوزنقه‌ای کاملا جدا از هم هستند

نتیجه فرعی ۲: فرض کنید $\widetilde{M}=(a/b,c/d)$ و $\widetilde{N}=(a'/b',c'/d')$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشد. اگر $c \le b'$ و $c \le c'$

(شکل ۳) آن‌گاه داریم:

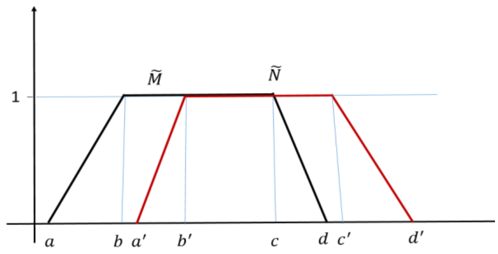
$$r(\widetilde{M},\widetilde{N})=\frac{((d-a)+(c-b))}{2}+\frac{((d'-a')+(c'-b'))}{2}-\bar{y}(d-a')$$



شکل ۳: $c \le b'$

نتیجه فرعی ۳: فرض کنید $\widetilde{M}=(a/b,c/d)$ و $\widetilde{N}=(a'/b',c'/d')$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشد. اگر $c > b'$ و $c \le c'$ (شکل ۴) آن‌گاه داریم:

$$r(\widetilde{M},\widetilde{N})=\frac{((d-a)+(c-b))}{2}+\frac{((d'-a')+(c'-b'))}{2}-((d-a')+(c-b'))$$



شکل ۴: $c > b'$

۴- مقایسه با روش‌های موجود

یکی از مزایای روش کر بهبود یافته برای مقایسه‌ی اعداد فازی ذوزنقه‌ای که در این مقاله ارایه شده این است که اعداد فازی در محیط فازی با هم مقایسه می‌شوند و نیازی به تبدیل آن‌ها به اعداد دقیق نیست. معمولادر روش‌هایی که برای حل مسایل فازی ارایه شده است ([۴تا ۶])، این مسایل را با استفاده از تابع رتبه‌بندی و آلفا برش به یک مساله‌ی غیرفازی تبدیل می‌کنند و سپس به حل مساله با الگوریتم‌های مختلف می‌پردازند این در حالی است که ما با روش بیان شده در این مقاله برای مقایسه اعداد فازی، به حل مساله‌های خطی و غیر خطی فازی در محیط فازی می‌پردازیم بدون این که نیاز باشد مساله‌ی فازی را به یک مساله دقیق تبدیل کنیم. هم‌چنین ما از روش کر بهبود یافته برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی با استفاده از الگوریتم ژنتیک به کار بردیم که نتایج هم به لحاظ زمانی و هم به لحاظ مقدار تابع هدف بهتر از روش‌های موجود است ([۴تا ۶]).

۵- نتیجه و جمع‌بندی

در این مقاله نامسـاوی کر بهبود یافته را برای مقایسه‌ی اعداد فازی ذوزنقه‌ای ارایه کردیم که از نظر محاسباتی ساده‌تر بود. با استفاده از این فرمول، دو عدد فازی ذوزنقه‌ای را می‌توان در زمان کوتاه‌تری با هم مقایسه کرد.

۶- مراجع

[1] **J. M. Adamo** (1980), Fuzzy decision trees, Fuzzy Sets and Systems, 4, 207-219.

[2] **J. J. Buckely and L. J. Jowers** (2007), Monte Carlo Method in Fuzzy Optimization, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer.

[3] **R. E. Bellman and L. A. Zadeh,** Decision making in a fuzzy environment, Management Science 17 (1970) 141-164.

[4] **N. Mahdavi-Amiri and S. H. Nasseri** (2007), Duality results and a dual simplex method for linear programming problems with trapezoidal fuzzy variables, Fuzzy Sets and Systems, 158, 1961-1978.

[5] **N. Mahdavi-Amiri, S. H. Nasseri and A. Yazdani** (2009), Fuzzy primal simplex algorithm for solving fuzzy linear programming problems, Iranian Journal of Operations Research, 1(2), 68-84.

[6] **N. Mahdavi-Amiri and S. H. Nasseri** (2006), Duality in fuzzy number linear programming by use of a certain linear rankingfunction, Applied Mathematics and Computation, 180, 206-216.

[7] **R. Ghanbari, Kh. Ghorbani-Moghadam and N. Mahdavi-Amiri** (2019) A variable neighborhood search algorithm for solving fuzzy number linear programming problems using modified Kerres method, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 27, 1286-1294.

[8] **R. Ghanbari, Kh. Ghorbani-Moghadam and N. Mahdavi-Amiri** (2019) A variables neighborhood search algorithm for solving fuzzy quadratic programming problems using modified Kerres method, Soft Computing, 23, 12305-12315.

[9] **R. Ghanbari, Kh. Ghorbani-Moghadam and N. Mahdavi-Amiri** (2020) Fuzzy linear programming problems: models and solutions, Soft Computing, 24, 10043-10073.

[10] **R. Ghanbari, K. Ghorbani-Moghadam and N. Mahdavi-Amiri** (2020) Solving fuzzy number linear programs using modified Kerre's method and time variant multi-objectie particle swarm optimization, OPSEARCH.

[11] **X. Wang and E. E. Kerre** (1996), On the classification and the dependencies of the ordering methods, Fuzzy Logic Foundationsand industrial applications, International Series in Intelligent Technologies, 8, 73-90.

[12] **R. R. Yager** (1980), On choosing between fuzzy subsets, Kybernetes, 9, 151-154.