حل یک مساله درجه دوم پیوسته برای مساله افرازبندی متقارن با استفاده از الگوریتم ترکیبی سرد کردن تدریجی و جستجوی محلی

احمد ابویی[1]، رضا قنبری[2]، صدیقه صادقی[3] ، خاطره قربانی مقدم[4]

[1]فارغ التحصیل دکتری ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد؛ ahmadaboiy@gmail.com

[2]عضو هیئت علمی دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد؛ rghanbari@um.ac.ir

[3]دانشجوی دکتری ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد؛ se.sadeghi88@gmail.com

[4] عضو هیئت علمی موسسه تحقیقات ریاضی دکتر غلامحسین مصاحب، دانشگاه خوارزمی؛ kh.ghorbani@khu.ac.ir

* نویسنده مسئول: احمد ابویی

چکیده

هدف مساله افرازبندی متقارن گراف، افراز کردن راس‌های گراف است، به طوری که مجموع وزن یال‌های بین مجموعه‌های افراز کمینه شود هم‌چنین اختلاف مجموع وزن بین مجموعه‌های افراز نیز به کمترین مقدار خود برسد. مساله افرازبندی متقارن گراف در رده مسایل NP-سخت است و بر اساس پژوهش‌های انجام شده الگوریتم‌های ارایه شده برای حل این مساله دو رده کلی الگوریتم‌های دقیق و الگوریتم‌های ابتکاری دسته‌بندی می‌شود. در مسایل افرازبندی متقارن گراف، هم در طراحی الگوریتم‌های دقیق و هم در طراحی الگوریتم‌های ابتکاری، از بهینه‌سازی پیوسته استفاده شده است. در این مقاله، الگوریتم ترکیبی سرد کردن تدریجی (SA) و جستجوی محلی را برای حل یک مساله افراز بندی گراف متقارن را بیان کرده‌ایم. نتایج نشان می‌دهد که روش پیشنهادی، جواب مناسبی را با سرعت محاسباتی قابل قبولی بدست آورده است.

کلمات کلیدی: افرازبندی متقارن گراف، بهینه سازی پیوسته، جستجوی محلی، الگوریتم سرد کردن تدریجی.

1- مقدمه

از اوایل سال ۱۹۷۰مساله افرازبندی گراف به طور گسترده مورد تحقیق و بررسی قرار گرفت. در حال حاضر بسیاری از مسایل در علوم و مهندسی را می‌توان به صورت مساله افرازبندی گراف فرمول‌بندی کرد. در حالت ساده اگر $G = (V, E)$ گرافی بدون جهت و وزن‌دار باشد هدف مساله افرازبندی گراف، افراز کردن راس‌های گراف به دو مجموعه جدا از هم است. به طوری که مجموع وزن یال‌های بین دو مجموعه کمینه شود (جهت دار بودن و وزن دار بودن راس‌های گراف، همچنین تعداد مجموعه‌های افراز (بیش تر از دو مجموعه) هر کدام نوع متفاوتی از مساله افرازبندی گراف را ایجاد می‌کند [2.1]) با وجود این که مساله افرازبندی گراف در رده ی مسایل NP-سخت قرار می گیرد. نوع خاصی از مسائل افرازبندی گراف با نام افرازبندی متوازن گراف هستند که در این حالت علاوه بر یال‌ها، راس‌ها نیز دارای وزن می‌باشند، در حالت ساده زمانی که دو مجموعه افراز داریم مساله به این صورت می‌شود که مجموع وزن یال‌های بین مجموعه‌های افراز کمینه شود هم‌چنین اختلاف مجموع وزن بین مجموعه‌های افراز نیز به کمترین مقدار خود برسد. الگوریتم‌های دقیق و الگوریتم‌های ابتکاری دو رده کلی برای حل مساله افرازبندی گراف هستند.

بسیاری از مسایل در علوم و مهندسی می‌توانند به عنوان مسایل افرازبندی متوازن گراف فرمول‌بندی شوند. از این بین می توان به محاسبات موازی[1] [3 ،4]، طراحی مدارهای الکتریکی مانند VLSI[2] [5]، کنترل ترافیک هوایی[3] [7، 6] مرتب سازی محاسبات در ماتریس های تُنُک[4] [8]، زمان بندی کار ها[5] [9] اشاره کرد.

2- تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف 2-1. [10] فرض کنید V یک مجموعه دلخواه باشد. در این صورت، $P_k = \{V_1, \dots, V_k\}$ که به ازای هر i ، V_i زیر مجموعه‌ای از V است، در این‌صورت P را یک افراز می‌نامیم اگر:

---

[1] Parallel computations
[2] Very large scale integration
[3] Air traffic control
[4] Sparse matrix
[5] Task scheduling

(1) مجموعه P ناتهی باشد و شامل تهی نباشد.

(2) اعضای P دو به دو مجزا باشند. به عبارتی، برای هر $V_1, V_2 \in P$ رابطه $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ برقرار باشد.

(3) اجتماع اعضای P برابر با V شود.

تعریف 2-2. به یال‌هایی که بین مجموعه‌های افراز وجود دارند یال‌های برشی گویند.

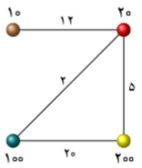
تعریف 2-3. فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی بدون جهت باشد و برای هر $i \in V$، $w(i) \in \mathbb{R}$ وزن راس i باشد. هم‌چنین فرض کنید $P_k = \{V_1, \dots, V_k\}$ افرازی از راس‌های گراف G با k مجموعه افراز باشد. افزون بر این، فرض کنید وزن متوسط مجموعه افراز V_i $(1 \le i \le k)$ در P_k برابر باشد با $W_a = \left\lceil \frac{w(V)}{k} \right\rceil$ که در آن $w(V)$ مجموع وزن راس‌های گراف G و $\lceil x \rceil \in Z$ کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از $x \in \mathbb{R}$ است. حال قرار دهید، $bal(P_k) = \frac{max_{1 \le i \le k}\{w(V_i)\}}{W_a}$ در این صورت افراز P_k را یک افرازبندی متقارن می‌گوییم هرگاه $\lfloor bal(P_k) \rfloor = 1$ (که در آن $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $x \in \mathbb{R}$ است). در این مقاله قصد داریم $k = 2$ در نظر بگیریم.

ملاحظه 2-1. رابطه $\lfloor bal(P_k) \rfloor = 1$ در تعریف 2-4 بیان می‌کند که وزن مجموعه‌های افراز تقریبا با یکدیگر برابر باشد (مجموع وزن راس ها در یک مجموعه افراز را وزن مجموعه افراز می گویند).

ملاحظه 2-2. در حالتی که وزن همه راس های گراف برابر یک است، منظور از افرازبندی متوازن این است که تعداد اعضای مجموعه های افراز تقریبا با یکدیگر برابر باشد.

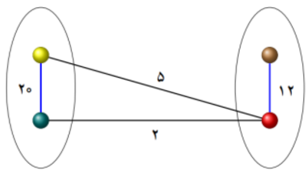
ملاحظه 2-3. در حالت کلی ممکن است جواب بهینه مساله افرازبندی گراف یک افراز متوازن نباشد. در حالت خاص ممکن گراف G هیچ افراز متوازنی نداشته باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال 2-1: گراف G را در نظر بگیرید:



شکل 2-1. گراف G با 4 راس

حال، در ابتدا فرض کنید وزن راس های گراف G برابر با ۱ است، همچنین فرض کنید در مساله افراز بندی گراف تعداد مجموعه های افراز برابر با ۲و اندازه هر یک از مجموعه های افراز هم برابر با 2 باشد. در این حالت، افراز بهینه متناظر با گراف G به شکل زیر است:



شکل 2-2. افراز بهینه در حالتی که وزن راس ها برابر با ۱است

اما، اگر وزن راس های گراف G را در نظر بگیریم، در این صورت، افراز نشان داده شده در شکل2-2 افراز متوازن نیست، افزون بر این هیچ افراز متوازنی مطابق با تعریف 2-4 برای گراف G وجود ندارد، به طوری که اندازه هر یک از مجموعه‌های افراز برابر با ۲ باشد.

بر اساس ملاحظه 3-2 در حالت کلی نمی توان افرازی متوازن از راس های گراف یافت، به طوری که اندازه مجموعه‌های افراز معین باشد و مجموع وزن یال‌های برشی در آن کمینه شود، با این وجود می توان افرازی را ایجاد کرد که اختلاف وزن دو مجموعه افراز کمینه شود، در حالی که مجموع وزن یال های برشی هم به حداقل رسیده باشد.

3- فرمول‌بندی مساله افرازبندی متوازن گراف بر پایه بهینه‌سازی پیوسته درجه دوم

با ایده گرفتن از کاری که هگر[6] و همکاران[10] در سال 2013 انجام دادند و با در نظر گرفتن فرض متوازن بودن افراز گراف تابع هدفی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\bar{f}(x) = (e-x)^T(A+\bar{D})x + (x^T - (e-x)^T w)^2 = (e-x)^T(A+\bar{D})x + ((2x-e)^T w)^2$$

[6] Hager

که در آن w بردار وزن راس‌ها در گراف و A ماتریس وزن یال‌ها و $\overline{D}$ ماتریس قطری است که بر اساس ماتریس A و بردار w تعیین می‌شود. مساله بهینه‌سازی پیوسته (3.1) یرید:

$$\min f(x) = (e-x)^T(A+\overline{D})x + ((2x-e)^T w)^2$$
$$s.t. \quad 0 \le x \le e, \quad e^T x = m$$

قید $e^T x = m$ نشان می‌دهد m راس باید در مجموعه V_1 و $n-m$ راس باید در مجموعه V_2 قرار بگیرند.

قضیه زیر نشان می‌دهد که مساله (3.1) دارای جواب بهینه صفر و یک است، به طوری که، در میان افرازهای شدنی برای مساله افرازبندی گراف، افرازی را ایجاد می‌کند، که مجموع وزن یال‌های برشی و اختلاف بین وزن دو مجموعه افراز به حداقل رسیده باشد.

قضیه 3–1. فرض کنید $\overline{D}$ به گونه‌ای انتخاب شود که برای هر i,j داشته باشیم:

$$\bar{d}_{ii} + \bar{d}_{jj} - 4w_i^2 - 4w_j^2 + 8w_i w_j - 2a_{ij} \ge 0 \qquad (3.2)$$

در اینصورت مساله (3.1) دارای جواب صفر و یک مانند y است و افراز تولید شده توسط y، برشی را در مساله افرازبندی متوازن گراف به دست می‌دهد، که مجموع وزن یال‌های برشی و اختلاف بین وزن دو مجموعه افراز به حداقل رسیده باشد. همچنین اگر برای هر i,j رابطه،

$$\bar{d}_{ii} + \bar{d}_{jj} - 4w_i^2 - 4w_j^2 + 8w_i w_j - 2a_{ij} > 0 \qquad (3.3)$$

برقرار باشد، در این صورت هر بهینه محلی برای مساله (3.1) یک بردار صفر و یک است.

ملاحظه 3–1. برای تعیین عناصر روی قطر اصلی ماتریس $\overline{D}$ به طوری که در شرط (3.2) صدق کند کافی است برای هر i، $\bar{d}_{ii}$ را به شکل زیر به دست آورد:

$$\bar{d}_{ii} = \max\{a_{i1} - 4w_i w_1 + 4w_i^2, \dots, a_{in} - 4w_i w_n + aw_i^2\}.$$

نتیجه زیر از قضیه 3-1 نشان می‌دهد مساله زیر جواب بهینه مساله افرازبندی متوازن گراف را در حالتی که به قید $l \le e^T x \le u$، $0 \le x \le e$ مقید است، به دست می‌دهد.

$$\min f(x) = (e-x)^T(A+\overline{D})x + ((2x-e)^T w) \qquad (3.4)$$
$$s.t. \quad 0 \le x \le e, \quad l \le e^T x \le u$$

نتیجه 3–1. فرض کنید D به گونه‌ای انتخاب شود که برای هر i,j داشته باشیم:

$$\bar{d}_{ii} + \bar{d}_{jj} - 4w_i^2 - 4w_j^2 + 8w_i w_j - \qquad (3.5) \qquad \bar{d}_{ii} \ge 4w_i^2$$

در این صورت مساله (3.4) دارای جواب بهینه صفرو یک مانند y است و افرازی متوازن با مجموعه‌های افراز $V_1 = \{i:\ x_i = 1\}$ و $V_2 = \{i:\ x_i = 0\}$ تولید می‌شود، به طوری که یک برش کمینه در مساله افرازبندی متوازن گراف به دست می‌دهد. افزون بر این اگر برای هر i,j داشته باشیم:

$$\bar{d}_{ii} + \bar{d}_{jj} - 4w_i^2 - 4w_j^2 + 8w_i w_j - 2 \qquad (3.6) \qquad \bar{d}_{ii} > 4w_i^2$$

در این صورت هر بهینه محلی در مساله (3.4) برداری صفر و یک است.

ملاحظه 3–2. برای تعیین عناصر روی قطر اصلی ماتریس $\overline{D}$ به طوری که در شرط (3.6) صدق کند کافی است برای هر i، $\bar{d}_{ii}$ را به شکل زیر بدست آورد:

$$\bar{d}_{ii} = \max\{4w_i^2, a_{i1} - 4w_i w_1 + 4w_i^2, \dots, a_{in} - 4w_i w_n + 4w_i^2\}$$

توجه کنید تنها تفاوت بین $\bar{d}_{ii}$ معرفی شده در این‌جا با $\bar{d}_{ii}$ معرفی شده در ملاحظه 3-1، در عبارت $4w_i^2$ است.

هم‌چنین می‌توان نشان داد که می‌توان از یک جواب شدنی دلخواه برای مساله (3.1) به یک جواب شدنی صفر و یک برای مساله (3.1) رسید که یک جواب شدنی برای مساله افرازبندی متوازن گراف نیز هست و مقدار تابع هدف در آن نقطه کمتر از مقدار تابع هدف در نقطه دلخواه $\boldsymbol{x}$ است. این ویژگی باعث می‌شود که نقطه شروع الگوریتم بهبود پیدا کند و فرآیند جستجوی محلی بهتر انجام شود.

3-1 شرایط لازم و کافی بهینگی

در این بخش ابتدا شرایط لازم مرتبه اول را برای مساله افرازبندی متوازن گراف، مطابق شرایط کروش-کان-تاکر، بیان می‌کنیم.

3-1-1- شرایط لازم مرتبه اول برای مساله (3.1)

برای تعیین گرادیان تابع لاگرانژ، ابتدا گرادیان تابع $\bar{f}$ را به شکل زیردر نظر می‌گیریم:

$$\nabla \bar{f}(x) = (A+\overline{D})e - 2(A+\overline{D})x + 8(x^T w)w - 4(e^T w)w.$$

حال، بردار $\bar{\mu}$ را برای اسکالر مفروض λ به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\bar{\mu}(x,\lambda) = (A+\bar{D})e - 2(A+\bar{D})x + 8(x^T w)w - 4(e^T w)w + \lambda e$$

بر این اساس، فرض کنید x یک بهینه محلی برای مساله (3.1) باشد. پس شرایط لازم مرتبه اول برای x برقرار است:

$$0 \le x \le e, \quad e^T x = m, \quad x \in N(\bar{\mu}(x,\lambda)). \qquad (3.7)$$

که در آن، $N(\bar{\mu}) = N_1(\bar{\mu}) \times \cdots \times N_n(\bar{\mu})$ و برای هر i، $N_i(\bar{\mu})$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$N_i(\bar{\mu}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & if \quad \bar{\mu}_i = 0 \\ \{1\}, & if \quad \bar{\mu}_i < 0 \\ \{0\}, & if \quad \bar{\mu}_i > 0 \end{cases}$$

3-1-2- شرایط لازم و کافی بهینگی برای مساله (3.1)

برای جواب شدنی x از مساله (3.1)، قرار دهید:

$$\bar{U}(x) = \{i:\ x_i = 1\}, \qquad \bar{L}(x) = \{i: x_i = 0\}$$

و

$$\bar{U}_0(x,\lambda) = \{i \in \bar{U}(x):\ \bar{\mu}_i(x,\lambda) = 0\},\ \ \bar{L}_0(x,\lambda) = \{i \in \bar{L}(x):\ \bar{\mu}_i(x,\lambda) = 0\}$$

قضیه 3-1-2-1- فرض کنید (3.2) برقرار باشد و m عددی حقیقی باشد به طوری که رابطه $0 < m < n$ برقرار است. در این صورت شرط لازم و کافی برای این که y یک کمینه محلی برای مساله (3.1) باشد، این است که همه شرایط زیر برقرار باشد:

1. اسکالر λ وجود داشته باشد، به طوری که، y در شرایط (3.7) صدق کند.

2. برای هر $i,j \in F(y)$، رابطه زیر برقرار باشد:

$$\bar{d}_{ii} + \bar{d}_{jj} - 4w_i^2 - 4w_j^2 + 8w_i w_j - 2a_{ij} = 0$$

3. سه مجموعه $\bar{L}_0(y,\lambda)$، $\bar{U}_0(y,\lambda)$ و $F(y)$ *را در نظر بگیرید. در این صورت برای هر* i,j که هر کدام متعلق به مجموعه‌های متفاوت هستند، رابطه زیر را داریم:

$$\bar{d}_{ii} + \bar{d}_{jj} - 4w_i^2 - 4w_j^2 + 8w_i w_j - 2a_{ij} = 0$$

3-1-3-شرایط لازم مرتبه اول برای مساله (3.4)

با در نظر گرفتن مساله (3.4) شرایط کاروش-کوهن-تاکر را برای این مساله، می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$0 \le x \le e, \quad l \le e^T x \le u, \quad e^T x \in M(\lambda), \qquad (3.8)$$

که در آن،

$$.M(\lambda) = \begin{cases} \mathbb{R}, & if \quad \lambda = 0 \\ \{l\}, & if \quad \lambda < 0 \\ \{u\}, & if \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

3-1-4- شرایط لازم و کافی بهینگی برای مساله (3.4)

نتیجه زیر شرایط معادل بهینه محلی را برای مساله (3.4) بیان می‌کند.

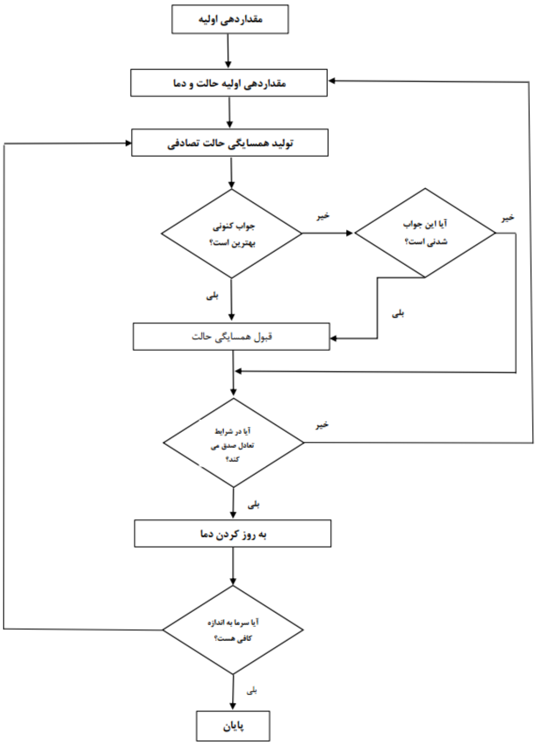
نتیجه 3-1-4-1. فرض کنید (3.5) برقرار باشد شرط لازم و کافی برای این که y یک کمینه محلی برای مساله (3.4) باشد، این است که شرایط سه‌گانه در قضیه 3-1-2-1 به همراه شرط زیر برقرار باشد.

4. هرگاه در شرایط لازم مرتبه اول (3.8) رابطه $\lambda = 0$ را داشته باشیم. در این صورت، یکی از سه حالت زیر روی می‌دهد:

1. اگر $l < e^T y < u$ در این‌صورت، برای هر $i \in F(y) \cup \bar{L}_0 \cup \bar{U}_0$ تساوی $4w_i^2 - \bar{d}_{ii} = 0$ برقرار است.
2. اگر $e^T y = u$ در این صورت، برای هر $i \in F(y) \cup \bar{U}_0$ تساوی $4w_i^2 - \bar{d}_{ii} = 0$ برقرار است.
3. اگر $e^T y = l$ در این صورت، برای هر $i \in F(y) \cup \bar{L}_0$ تساوی $4w_i^2 - \bar{d}_{ii} = 0$ برقرار است.

4- استفاده از الگوریتم SA برای حل مساله افرازبندی متقارن گراف

الگوریتم سرد کردن تدریجی یک روش تصادفی است که از مکانیزم آماری جهت یافتن جواب مسایل بهینه سازی استفاده می‌کند. این الگوریتم بر مبنای دو قاعده از فیزیک آماری عمل می‌نماید. روند الگوریتم SA به صورت زیر است:



شکل شماره 3: فلوچارت الگوریتم ترکیبی سرد کردن تدریجی و جستجوی محلی

الگوریتم SA را با جستجوی محلی ترکیب کردیم و بر روی نمونه‌هایی که از سایت http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrice/ دریافت کردیم، اجرا کردیم و نتایج را با الگوریتم ترکیبی ژنتیک و جستجوی محلی مقایسه کردیم. نتایج را در جدول شماره 1 ببینید.

Graph_name	n	GA+LS	SA+LS
jgl009	9	21	21
Stranke94	10	25	25
jgl011	11	31	31
Tina_DisCal	11	15	15
mycielskian4	11	9	9
mycielskian5	23	29	28
mycielskian6	47	97	97
dolphins	62	43	22
GD96_c	65	44	24
mycielskian7	95	347	314

جدول شماره 1: نتایج حاصل از اجرای الگوریتم ترکیبی سرد کردن تدریجی و
جستجوی محلی و الگوریتم ترکیبی ژنتیک و جستجوی محلی

در جدول شماره 1، ستون اول نشان‌دهنده نام گراف‌های مورد بررسی است، ستون دوم (n) نشان‌دهنده تعداد راس‌های گراف‌ها است، ستون سوم مقدار تابع ارزیابی (تابع هدف مساله (3.1)) بدست آمده با استفاده از الگوریتم ترکیبی ژنتیک (GA) و جستجوی محلی (LS) است و ستون چهارم مقدار

تابع ارزیابی (تابع هدف مساله (3.1)) بدست آمده با استفاده از الگوریتم ترکیبی سرد کردن تدریجی (SA) و جستجوی محلی است. بر اساس جدول نتیجه‌گیری می‌بینیم که در بعدهای بالا الگوریتم ترکیبی سرد کردن تدریجی و جستجوی محلی جواب بهتری را نسبت به الگوریتم ترکیبی GA و جستجوی محلی می‌دهد.

5- نتیجه و جمع بندی

در این مقاله، رده‌ای دیگر از مساله افرازبندی گراف مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این حالت راس‌ها نیز در گراف وزن‌دار هستند و هدف افراز کردن راس‌ها به دو مجموعه است به طوری که مجموع وزن یال‌های برشی و اختلاف وزن بین دو مجموعه افراز کمینه شود. این هدف با اعمال شرایط جدیدی روی تابع هدف مساله بهینه‌سازی پیوسته درجه دوم، حاصل می‌شود، به عبارت دیگر ثابت می‌شود مساله بهینه‌سازی پیوسته جدید دارای جواب بهینه صفر و یک است که جواب بهینه مساله افرازبندی متوازن گراف نیز هست. هم‌چنین شرایط لازم و کافی بهینگی را برای مساله بهینه‌سازی پیوسته بیان کردیم و در پایان، از الگوریتم ترکیبی SA و جستجوی محلی برای حل مساله بهینه‌سازی پیوسته استفاده کردیم و از مقایسه نتایج آن با الگوریتم ترکیبی GA و جستجوی محلی دیدیم که در ابعاد بالا مقدار تابع هدف بدست آمده از الگوریتم ترکیبی SA و جستجوی محلی بهتر از مقدار تابع هدف بدست آمده از الگوریتم ترکیبی GA و جستجوی محلی است و هم‌چنین سرعت محاسبه الگوریتم ترکیبی SA و جستجوی محلی بهتر از الگوریتم ترکیبی GA و جستجوی محلی است.

تقدیر و تشکر

نویسنده اول، دوم و سوم از دانشکده علوم ریاضی و آزمایشگاه بهینه‌سازی دانشگاه فردوسی مشهد و نویسنده چهارم از موسسه تحقیقات ریاضی دکتر غلامحسین مصاحب دانشگاه خوارزمی به خاطر حمایت از این کار تشکر و قدردانی می‌نمایند.

مراجع

[1] Jäger, G., and Srivastav, A. Improved approximation algorithms for maximum graph partitioning problems. in FSTTCS 2004: Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, volume 3328. Springer Berlin Heidelberg, 2005, 348–359.
[2] Konstantin, A., and Räcke, H. Balanced graph partitioning. in Proceedings of the Sixteenth Annual ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures. ACM, 2004, pp. 120–124.
[3] Hendrickson, B., and Kolda, T. G. Graph partitioning models for parallel computing. Parallel Computing 26, 12 (2000), 1519–1534.
[4] Chamberlain, B. L. Graph partitioning algorithms for distributing workloads of parallel computations. University of Washington Technical Report UW-CSE-98-10 3 (1998).
[5] Karisch, S. E., Rendl, F., and Clausen, J. Solving graph bisection problems with semidefnite programming. INFORMS Journal on Computing 12, 3 (2000), 177–191.
[6] Bichot, C. E. A metaheuristic based on fusion and fssion for partitioning problems. 20th IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium (2006), 3499– 3506.
[7] Bichot, C. E. A new method, the fusion fssion, for the relaxed k-way graph partitioning problem, and comparisons with some multilevel algorithms. Journal of Mathematical Modeling and Algorithms 6, 3 (2007), 319–344.
[8] Pothen, A., Simon, H. D., and Liou, K. P. Partitioning sparse matrices with eigenvectors of graphs. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 11, 3 (1997), 430–452.
[9] Johnson, T., Davis, T. A., and Hadfield, S. M. A concurrent dynamic task graph. Parallel Computing 22, 2 (1996), 327–333.
[10] Hager, W. W., Phan, D. T., and Zhang, H. An exact algorithm for graph partitioning. Mathematical Programming 137, 1-2 (2013), 531–556.