

# مقایسه رهیافت‌های اصلاح اتلاف عددی در گستره وسیعی از خانواده AUSM برای جریان های پایای ماخ پایین

عدنان محمدی

دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، فردوسی، مشهد، ایران

محمد حسن جوارشکیان

استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

## چکیده

در این تحقیق گستره وسیعی از خانواده آسم مشتمل بر  $AUSM+$ ،  $AUSM+UP$ ،  $SLAU$  و  $AUSM+M$ ، در یک چهارچوب عددی، بر مبنای روش حجم محدود، جهت حل معادلات اویلری دوبعدی پیش شرطی شده، در یک شبکه بی سازمان توسعه داده شده و عملکرد این طرح‌ها در جریان غیر قابل تراکم مورد بررسی قرار گرفته است. در میدان هایی که سرعت سیال پایین است، حل گرهای چگالی مبنا نرخ همگراییشان کاهش پیدا می‌کند. جهت حل این مشکل در سرعت‌های کم از روش پیش شرطی ترکل بر مبنای ماتریس بقایی استفاده شده است. مضاعف بر این در سرعت‌های کم نامیزانی بین المان‌های موجود در شارهای جابجایی و فشاری این خانواده منتج به کاهش دقت می‌شود. بنابراین، استخراج دقیق روابط لازم جهت حل مشکل نامیزانی مطرح شده در سرعت‌های پایین خانواده آسم توسعه داده شده است. بعلاوه، جهت تسریع بیشتر نرخ همگرایی و کاهش سختی معادلات در سرعت‌های پایین، بخش زمانی معادلات به کمک روش دوگامی اصلاح شده بشفور-مولتون گسسته شده است. جهت بررسی دقت و کارایی خانواده آسم توسعه داده شده، آزمایش های غیر لزج دو بعدی پایا حول ایرفویل NACA0012، ایرفویل سه المانه 30P-30N و نیم-استوانه و برای گستره وسیعی از اعداد ماخ کم و بسیار کم تدوین شده است. نتایج حاصله نشان می‌دهد، در خانواده آسم بررسی شده، توازن مناسبی میان المان‌های سرعت همگرایی و بهبود دقت وجود ندارد و در سرعت‌های پایین افزایش دقت لزوماً توأمان با کاهش زمان همگرایی نیست.

واژه‌های کلیدی: خانواده آسم، ماخ پایین، پیش شرطی، نرخ همگرایی پایین، مخدوش شدن دقت، نامیزانی

## An investigation of the healing strategies of the numerical dissipation of spectrum AUSM-family toward steady low Mach flows

Adnan Mohammadi

Mechanical engineering, Ferdowsi, Mashhad, Iran

Mohammad Hassan Djavarehshkian

Department of Mechanical Engineering, University of Ferdowsi, Mashhad, Iran

## Abstract

In this research, a spectrum variety of AUSM-family, including  $AUSM+$ ,  $AUSM+UP$ ,  $SLAU$ , and  $AUSM+M$ , in a numerical framework, based on the finite volume method to solve preconditioned two-dimensional Eulerian equations, was developed in an unstructured grid and the performance of this family has been investigated in incompressible flow. Where fluid velocity is low, convergence rate of density base solvers is distorted. Turtle's preconditioning method based on the conservation variable has been utilized to remedy the poor convergence at low speeds flows. In addition, at low speeds, the imbalance between the elements in this family's convective and pressure fluxes results in a deterioration of accuracy. Therefore, the necessary mathematical literature has been developed to solve the imbalance problem raised at the low speeds of the AUSM family. In addition, to further accelerate the convergence rate and reduce the stiffness of the equations at low speeds, the time part of the equations has been discretized utilizing the modified second-order Bashforth-Moulton method. To investigate the accuracy and efficiency of the developed AUSM family, steady two-dimensional inviscid tests around the NACA0012 airfoil, three-element 30P-30N airfoil, and half-cylindrical have been constructed for a wide range of low and highly- low Mach numbers. The results show no optimal trade-off between convergence rate and accuracy improvement within AUSM family. The accuracy improvement is not accompanied by reduced convergence time necessarily in low velocity flow field.

**Keywords:** AUSM family, Low Mach, precondition, poor rate of convergence, accuracy deterioration, imbalance

## ۱- مقدمه

این روش‌ها دارای مزیت‌های متعددی نظیر انعطاف‌پذیری بالا و همخوانی با مشخصه‌های فیزیک حاکم بر میدان هستند. امروزه روش‌های بالادستی که مشتمل بر روش‌های تجزیه بردار شار<sup>۱</sup>، روش‌های تجزیه اختلاف شار<sup>۲</sup>

در سال‌های ۱۹۷۰-۱۹۶۰ روش‌های مرکزی به‌طور معمول مورد استفاده قرار می‌گرفتند(۱)، اما این روش‌ها دارای معایبی نظیر پیش‌بینی غیر صحیح در مشخصه‌های میانی و همچنین المان‌های کنترلی آزاد وابسته به مسئله هستند(۲). در اواخر ۱۹۷۰ روش‌های بالادستی مطرح شدند.

<sup>2</sup> Flux Difference Splitting (FDS)

<sup>1</sup> Flux Vector Splitting (FVS)

و خانواده آسم<sup>۱</sup> به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌اند. روش‌های تجزیه اختلاف شار به‌عنوان یک نتیجه طبیعی از این ایده که سیال را توده‌ای از ذرات است قلمداد می‌شوند (۳). در سطح سلول گروهی از ذرات به‌صورت جلو رونده<sup>۲</sup> حرکت می‌کنند و گروهی به‌صورت عقب<sup>۳</sup> رونده حرکت می‌کنند. شارهای غیر لزج در هر سطح به‌صورت خودکار به‌صورت جلو رونده و عقب رونده تجزیه می‌شوند. به‌طور دقیق‌تر خواستگاه این نوع از جداسازی شار، تفکیک مقادیر ویژه‌ی ماتریس ژاکوبی است. در گروه روش‌های تفکیک شار، روش‌های مختلفی بر مبنای اعمال انواع جداسازی معرفی شده‌اند که از میان آن‌ها می‌توان به ون لیر و استیگر-وارمینگ اشاره کرد. در حل معادله اوپلر خانواده روش‌های تفکیک بردار شار به جهت پیش‌بینی دقیق و عدم رخداد جواب غیر فیزیکی در آن‌ها مورد استقبال خاص پژوهشگران قرار گرفته‌اند (۳). اما این دسته از روش‌ها به سبب ذاتِ بیش‌ازاندازه هموار کننده‌ای<sup>۴</sup> که دارند دارای ضعف عملکردی شدیدی در پیش‌بینی مشخصات لایه مرزی هستند. بنابراین این دسته از روش‌های عددی مناسب حل معادلات ناویراستوکس نیستند. بر اساس ایده‌ی گودونو مبنی بر در نظر گرفتن جریان تراکم پذیر بین دو سلول به‌عنوان یک مسئله ریمان (۴)، روش‌های تجزیه اختلاف بردار شار نظیر Roe (۵) و HLL (۶) معرفی شدند. در این روش‌ها برای محاسبه شار در وجوه از حل تقریبی یا دقیق مسئله ریمان استفاده می‌شود. روش‌های تجزیه اختلاف بردار شار می‌توانند حل دقیقی در پیش‌بینی ناپیوستگی‌ها ارائه دهند، بعلاوه اینکه این دسته از روش‌ها به سبب پخش اندکی که دارند در حل معادلات ناویراستوکس و پیش-بینی مشخصات لایه مرزی دقیق هستند. اما این دسته نسبت به روش‌های تجزیه بردار شار برتری کارآمدی ندارند. در سال ۱۹۹۱ برای اولین بار لیو خانواده آسم را بر مبنای ترکیب دقت مناسب روش تجزیه اختلاف شار در لایه مرزی و کارآمدی روش‌های تجزیه بردار شار معرفی کرد (۷). در این روش جهت تشخیص کمیت‌های جابجایی<sup>۵</sup> از عدد ماخ جابجایی وجه-سلول<sup>۶</sup> استفاده می‌شود. در این روش شار فشاری از تجمیع دو المان فشاری محاسبه می‌شود. مضاعف بر این موارد مشکلات کم این روش عددی نیز در پژوهش‌های پیشین گزارش شده است (۸). به دلیل محبوبیت گسترده این روش عددی، در راستای ارتقای عملکردی روش عددی پایه مطرح شده (AUSM)، گسترش روش‌های مشابه نظیر AUSM+ (۹) و AUSMPW+ (۱۰) و AUSM+UP (۱۱) و AUSM+M (۱۲) و SLAU (۱۳) توسط محققین حوزه عددی انجام شد. همان‌طور که ابتدا ذکر شد نداشتن بخش اتلافی مناسب در دامنه حل می‌تواند

منتج به کاهش دقت حل عددی شود، لذا در این پژوهش و بنا به‌مرور بیان شده خانواده عددی آسم به‌عنوان روش عددی‌ای که مزایای هر دودسته تجزیه بردار شار و تجزیه اختلاف شار را دارد، به‌عنوان روش محاسبه شارهای غیر لزج مورد استفاده قرار خواهد گرفت. مادامی‌که جهت حل عددی جریان با عدد ماخ پایین از روش پیمایش زمانی<sup>۷</sup> استفاده می‌شود نرخ همگرایی با کاهش عدد ماخ کاهش می‌یابد و لازمه رسیدن به یک حل پایا اختصاص زمان بسیار زیادی جهت حل میدان است، رخداد این مشکل به عدد شرطی (نسبت بزرگ‌ترین مقدار ویژه به کوچک‌ترین مقدار ویژه) برمی‌گردد. مشتق زمانی نتایج حل پایا را تحت‌الشعاع قرار نمی‌دهد و تغییر در این بخش تنها دقت زمانی را کاهش می‌دهد. در راستای شتاب‌بخشی به روند همگرایی حل پایا، پیش‌شرطی کردن بخش زمانی ارائه گردید. با ضرب بخش زمانی در یک ماتریس می‌توان مقادیر ویژه سیستم را کنترل کرد. مقدس و همکاران (۱۴) نشان دادند ماتریس پیش‌شرطی ترکل، در طیف گسترده‌ای از اعداد ماخ جریان خارجی و داخلی، قابلیت افزایش نرخ همگرایی را دارا است. در ارتباط با افزایش نرخ همگرایی پژوهش‌های دیگری نیز انجام شده است. مایا و همکاران (۱۵-۱۷) به کمک محدودکننده معرفی شده توسط دارموفال (۱۸) برای ماتریس پیش‌شرطی ترکل به بررسی عملکرد این ماتریس در جریان پایای لزج و آشفته پرداختند. آن‌ها نشان دادند که با استفاده از این محدودکننده، پایداری و نرخ همگرایی حل افزایش می‌یابد. اکبرزاده و همکاران (۱۹) با ارائه یک روش هموارسازی باقیمانده جدید همراه و با ترکیب آن با روش پیش‌شرطی، موفق شدند نرخ همگرایی را در جریان‌های پایا و ناپایا به‌طور محسوس افزایش دهند. بنابراین در این پژوهش مقایسه خانواده پیش‌شرطی شده‌ی آسم مورد بررسی قرار می‌گیرد که در آن مهم‌ترین نکات نوآوری که در تحقیقات پیشین به آن پرداخته نشده یا کمتر مورد توجه بوده است را می‌توان به‌صورت ذیل عنوان نمود:

الف- توسعه‌ی روش عددی آسم به‌عنوان روش مبنای محاسبه شارهای غیر لزج در یک الگوریتم چگانی مبنا و شبکه با آدرس دهی بی‌سازمان و معرفی نحوه‌ی دقیق استخراج روابط لازمه در راستای اصلاحات لازم در بخش‌های اتلافات عددی این خانواده عددی جهت ایجاد اتلافات متناسب در سرعت‌های پایین

<sup>5</sup> Convective

<sup>6</sup> Cell-face

<sup>7</sup> Time-Marching

<sup>1</sup> Advection Upstream Splitting Method (AUSM)

<sup>2</sup> Forward

<sup>3</sup> Backward

<sup>4</sup> Dissipative

### ۳-۱- ماتریس پیش‌شرطی ترکل

ماتریس پیش‌شرطی ترکل بر مبنای متغیرهای بقای عبارت است از: (20)

$$\Gamma_T = \begin{bmatrix} 1 - \Psi V_t & 2u\Psi & 2v\Psi & -2\Psi \\ -u\xi V_t & 1 + 2\xi u^2 & 2\xi uv & -2u\xi \\ -v\xi V_t & 2\xi uv & 1 + 2\xi v^2 & -2v\xi \\ -\omega V_t & 2u\omega & 2v\omega & 1 - 2\omega \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\Psi = \frac{(1 - \beta)(\gamma - 1)}{2C^2} \quad (7)$$

$$V_t = u^2 + v^2$$

$$\xi = \frac{(\alpha + (1 - \beta))(\gamma - 1)}{2C^2}$$

$$\omega = \frac{(\alpha V_t + (1 - \beta)H_0)(\gamma - 1)}{2C^2}$$

### ۳-۲- معرفی پارامتر قطع در ماتریس پیش‌شرطی

برای محاسبه پارامتر قطع پیش‌شرطی  $\beta$ ، در ماتریس پیشنهادی ترکل، معمولاً از یک رابطه قطع برای نواحی‌ای مانند نقطه سکون که ممکن است عدد ماخ به سمت صفر میل کند، استفاده می‌شود. ترکل (۲۰) برای رفع مشکل تکینگی رابطه زیر را پیشنهاد داد:

$$\beta = \min \left[ 1, \max \left( K_2 M_0^2, K_1 \left( 1 + \frac{1 - M_0^2}{M_0^4} M^2 \right) M^2 \right) \right] \quad (8)$$

که در آن  $M_0$  عدد ماخ مرجع و به‌عنوان مقدار قطع به شمار می‌رود. ترکل (۲۱) نشان داد که مقدار  $K_1$  می‌تواند بین ۱ و ۱/۱ و مقدار  $K_2$  بین ۰/۴ و ۱ انتخاب شود. این پارامترها وابسته به شرایط مسئله، هندسه و شبکه مورد تحلیل است. در این تحقیق  $K_1 = 1.05$ ،  $K_2 = 0.7$  و  $M_0 = 0.1$  انتخاب می‌شود.

### ۴- معرفی اصلاحات لازم در بخش‌های پخشی

#### خانواده آسم در سرعت‌های پایین

هدف این بخش تبیین استخراج روابط لازم جهت اصلاح خانواده آسم در سرعت‌های پایین به جهت شارهای غیر لزج فشاری و جابجایی است. کل شار غیر لزج عبارت است از تجمیع شارهای فشاری و جابجایی. برای محاسبه شار فشاری داریم:

$$p_{1/2} = \bar{p} - d_p \quad (9)$$

که در آن  $\bar{p}$  میانگین فشار در دو طرف هر وجه دلخواه موردبررسی است و  $d_p$  به‌عنوان اتلافات شار فشاری به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_p = \frac{1}{2} (P_L^+ - P_R^-) \Delta p + \{(1 - P_L^+ - P_R^-) \bar{p}\} \quad (10)$$

ب- توسعه‌ی نحوه‌ی پیش‌شرطی کردن این خانواده عددی بر اساس ماتریس پیش‌شرطی ترکل و مقایسه عملکرد این خانواده‌ی پیش‌شرطی شده در راستای شناخت بهترین روش مناسب برای سرعت‌های پایین

ج- توسعه‌ی روش بشفورت-مولتون اصلاح‌شده جهت افزایش بیشتر سرعت همگرایی که در قیاس با روش‌های رایج مانند رانگ-کوتا زمان کمتری را در فرآیند حل لازم دارد.

لذا در این پژوهش و بر مبنای نکات بدیع (کمتر بررسی‌شده‌ی) بیان‌شده معادلات تراکم پذیر پایا و دوبعدی غیر لزج در ماخ‌های پایین و به کمک خانواده حل گر غیر لزج آسم حل می‌شوند. لازم به ذکر است که برای انتگرال‌گیری زمانی از روش بشفورت-آدامز اصلاح‌شده‌ی دومرحله‌ای با دقت زمانی مرتبه دوم استفاده‌شده است.

### ۲- معادلات حاکم

فرم بقای معادلات حاکم در فضای غیر لزج و دوبعدی و پایا عبارت است از:

$$\frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

در معادله فوق  $\bar{Q}_C$  بردار بقایی،  $\bar{E}$ ،  $\bar{F}$  به‌عنوان بردارهای شار غیر لزج به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{Q}_C = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (\rho E + P)u \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (\rho E + P)v \end{bmatrix} \quad (2)$$

در معادله فوق،  $\rho$  و  $P$  عبارت است از، چگالی و فشار، بعلاوه  $(u, v)$  مؤلفه‌های سرعت دکارتی و  $E$ ، انرژی کل است.

### ۳- فرم پیش‌شرطی شده‌ی معادلات بقا

در حل پایای معادلات اوپلر به روش پیمایش زمانی، عبارات زمانی در نهایت به سمت صفر میل کرده و بنابراین تغییر عبارت‌های زمانی هیچ تغییری در نتایج حل پایا ایجاد نمی‌کند. معادلات اوپلر پیش‌شرطی طبق رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Q}_C} \frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial x} + \Gamma \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{Q}_C} \frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial t} + A_\Gamma \frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial x} + A_\Gamma \frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

در معادلات بالا  $\Gamma$  و  $A_\Gamma$  به ترتیب ماتریس پیش‌شرطی و ماتریس جاکوبی پیش‌شرطی است.

#### ۴-۱- استراتژی اصلاح شار فشاری در روش AUSM+

در این روش سرعت صوت به واسطه رابطه زیر تصحیح می‌شود:

$$\tilde{C}_{1/2} = C_{1/2} f_{1/2} \quad (۱۹)$$

$$f_{1/2} = \sqrt{\frac{(1 + \beta^2) \left( M_{\frac{1}{2}} \right)^2 + \left( 4\beta^2 (1 - \left( M_{\frac{1}{2}} \right)^2) \right)}{(1 + \beta^2)}} \quad (۲۰)$$

تصحیح انجام شده امکان گذرش هموار را برای سرعت صوت بین دو ناحیه‌ی تراکم ناپذیر و تراکم پذیر فراهم می‌آورد. در معادله فوق  $\beta$  همان پارامتر قطع است که در رابطه (۸) تعریف شد. همچنین  $M_{\frac{1}{2}}$  میانگین اعداد ماخ در طرفین راست و چپ وجه مورد بررسی است. با توجه به تعریف جدید سرعت صوت، لازم است تا عدد ماخ راست و چپ هر وجه به صورت زیر بازآرایی گردد:

$$M_{(L/R),new} = M_{(L/R)} / f_{1/2} \quad (۲۱)$$

$$M_L = \left( \frac{M_{L,new} + M_{R,new}}{2} \right) + \beta^2 \left( \frac{M_{L,new} - M_{R,new}}{2} \right) \quad (۲۲)$$

$$M_R = \left( \frac{M_{L,new} + M_{R,new}}{2} \right) + \beta^2 \left( \frac{M_{R,new} - M_{L,new}}{2} \right) \quad (۲۳)$$

با جای گذاری روابط (۲۲) و (۲۳) در رابطه (۱۱) و بعداز آن بازآرایی رابطه (۱۰) آنگاه که ماخ به صفر میل می‌کند داریم:

$$p_{\frac{1}{2}} = \bar{p} - \left( \frac{15}{32} \right) \left( \beta^2 \frac{p_L + p_R}{2\tilde{C}_{\frac{1}{2}}} \Delta V + \frac{V_L + V_R}{2\tilde{C}_{1/2}} \Delta P \right) \quad (۲۴)$$

بدین ترتیب و از آنجا که  $\tilde{C}_{\frac{1}{2}}$  با میل عدد ماخ به سمت صفر از مقیاس سرعت سیال است، مقیاس بخش اول تصحیح شده و از مرتبه سرعت سیال خواهد بود و اختلاف فاحش مطرح شده تصحیح می‌شود.

#### ۴-۲- استراتژی اصلاح شار فشاری در روش AUSM+UP

در این روش برخلاف روش AUSM+، اصلاح اختلاف فاحش المان‌های پخشی شار فشاری با المان  $P_u$  صورت می‌گیرد و این المان به معادله (۱۰) اضافه می‌شود:

$$P_u = 2K_u P_L^+ P_R^- \left( f_{1/2} \tilde{p} C_{1/2}^2 \right) \Delta M, \quad K_u = 0.75 \quad (۲۵)$$

$$\Delta M = (M_L - M_R)$$

$$f_{1/2} = \beta(2 - \beta) \quad (۲۶)$$

بعلاوه اینکه المان  $\alpha$  در رابطه (۱۱)، که در روش AUSM+ برابر  $\frac{3}{16}$  است به صورت زیر تبیین می‌شود:

$$\alpha = \left( \frac{3}{16} \right) \left( -4 + (f_{1/2})^2 \right) \quad (۲۷)$$

با توجه به رابطه (۲۷) بخش‌های اول و دوم معادله (۱۰) عبارت است از:

در معادله فوق  $\Delta p$  اختلاف فشار در دو طرف هر وجه دلخواه بوده و به صورت  $\Delta p = p_R - p_L$  تعریف می‌شود. همچنین  $P_L^+$  و  $P_R^-$  چندجمله‌ای‌های معین برحسب عدد ماخ اند که عبارت‌اند از:

$$P_{(L/R)}^{\pm} = \begin{cases} \left\{ \pm \frac{(M_{(L/R)} \pm 1)^2}{4} (2 \mp M_{(L/R)}) \right\} & |M| \leq 1 \\ \pm \alpha M_{(L/R)} \left( (M_{(L/R)})^2 \mp 1 \right)^2 & \\ \frac{M_{(L/R)} \pm |M_{(L/R)}|}{2} & |M| \geq 1 \end{cases} \quad (۱۱)$$

در معادله فوق داریم:

$$M_{(L/R)} = (V_{(L/R)}) / C_{1/2} \quad (۱۲)$$

$$V_{(L/R)} = u_{(L/R)} \cdot n_x + v_{(L/R)} \cdot n_y \quad (۱۳)$$

$$C_{1/2} = \begin{cases} \frac{c^{*2}}{\max(|V_L|, c^*)} & \frac{V_L + V_R}{2} \geq 0 \\ \frac{c^{*2}}{\max(|V_R|, c^*)} & \frac{V_L + V_R}{2} < 0 \end{cases} \quad (۱۴)$$

$$c^{*2} = \frac{2(\gamma - 1)\bar{H}}{(\gamma + 1)} \quad (۱۵)$$

$$\bar{H} = \frac{\gamma RT}{(\gamma - 1)} + \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (۱۶)$$

در معادلات فوق علامات “+” و “-” یا “L” و “R” مبین طرف راست یا چپ وجه دلخواه مورد بررسی هستند. آنگاه که عدد ماخ به صفر نزدیک می‌شود رابطه (۱۱) به صورت زیر تقلیل پیدا می‌کند:

$$P_{\frac{1}{2}}^{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{15}{16} M \quad (۱۷)$$

بنابراین شار فشاری (معادله (۹)) عبارت است از:

$$p_{1/2} = \bar{p} - \left( \frac{15}{32} \right) \left( \frac{p_L + p_R}{C_{1/2}} \Delta V + \frac{V_L + V_R}{C_{1/2}} \Delta P \right) \quad (۱۸)$$

در رابطه (۱۸) بخش‌های اول و دوم، بخش‌هایی هستند که پخش عددی شار فشاری قلمداد می‌شوند. بخش اول به طور تقریبی عبارت است از  $C_{1/2} p_{1/2}$ ، بنابراین بخش اول مستقیماً با سرعت صوت رابطه دارد از سویی دیگر بخش دوم رابطه معکوسی با سرعت صوت دارد. به علت اختلاف فاحش سرعت سیال و سرعت صوت در سرعت‌های پایین و بزرگ‌تر بودن سرعت صوت در میدانی با ماخ کم، نیاز است تا این اختلاف مرتفع شود. در راستای حل این اختلاف، استراتژی‌های منتخبی از خانواده آسم مشتمل بر AUSM+، AUSM+UP، SLAU و AUSM+M مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

$$dp = \frac{1}{2}(P_L^+ - P_R^-)\Delta p - \underbrace{\{f_o(1 - P_L^+ - P_R^-)\bar{p}\}}_{\text{Error source}}$$

$$f_o = \min(1.0, \max(f, M^2_{\infty}))$$

$$f = 0.5(1 - \cos(\pi M))$$

(۳۶)

$$M = \min(1.0, \max(|M_L|, |M_R|))$$

#### ۴-۵- استراتژی اصلاح شار جرمی در خانواده AUSM

برای محاسبه شار جرمی در خانواده آسم به‌طور کلی داریم:

$$\dot{m} = C_{1/2} M_{1/2} \begin{cases} \rho_L & M_{1/2} > 0 \\ \rho_R & M_{1/2} < 0 \end{cases} \quad (۳۷)$$

$$M_{1/2} = M_L^+ + M_R^- \quad (۳۸)$$

$$M_{(L/R)}^{\pm} = \begin{cases} \pm \frac{(M_{(L/R)}^{\pm} \pm 1)^2}{4} \left(1 \mp \frac{1}{16} \beta \frac{(M_{(L/R)}^{\pm} \mp 1)^2}{4}\right) & |M_{(L/R)}| < 1 \\ \frac{M_{(L/R)} \pm |M_{(L/R)}|}{2} & |M_{(L/R)}| \geq 1 \end{cases} \quad (۳۹)$$

در راستای کنترل پدیده چکربرد، اختلاف فشار مرتبه اول در معادله پیوستگی نقشی اساسی را ایفا می‌کند. در این راستا در روش AUSM+ مقدار زیر به شار جرمی معرفی شده در رابطه (۳۷) اضافه می‌شود:

$$\frac{\Delta M(P_L - P_R) \check{C}_1(1 - \beta^2)}{\beta^2 \left(\frac{\rho_L}{\rho_L} + \frac{\rho_R}{\rho_R}\right)} \quad (۴۰)$$

برای روش AUSM+UP داریم:

$$\frac{0.25(P_R - P_L) \text{Max}(1 - \bar{M}^2, 0.0)}{f_a \cdot \rho_{1/2} (C_{1/2})^2} \quad (۴۱)$$

برای روش SLAU داریم:

$$\frac{\chi}{2C_{1/2}} (P_R - P_L) \quad (۴۲)$$

و در نهایت برای روش AUSM+M داریم:

$$\frac{-0.5(P_R - P_L)(1 - g)(1 - f)}{\rho_{1/2} (C_{1/2})^2} \quad (۴۳)$$

جزئیات بیشتر روابط (۴۰) تا (۴۳) در (۱۱-۱۳، ۲۲) آورده شده است.

#### ۴-۶- روش پیمایش زمان

شکل نیمه گسسته معادلات غیر پیش شرطی و کلاسیک اویلر به‌صورت زیر است.

$$\left(\frac{3}{4} + \alpha\right)(M_L + M_R)(p_L - p_R) \quad (۲۸)$$

$$\left(\frac{3}{4} + \alpha\right)(M_L - M_R)(p_L + p_R) \quad (۲۹)$$

ضریب  $\frac{3}{4} + \alpha$  در سرعت‌های پایین عبارت است از:

$$\left(\frac{3}{4} + \alpha\right) = \frac{3}{4} + \frac{3}{16}(-4 + 5(f_{1/2})^2) \rightarrow [4\beta^2] \cdot \frac{15}{16} \quad (۳۰)$$

بنابراین بخش پخشی شار فشاری روش AUSM+UP به‌صورت زیر خواهد بود:

$$dp = [4\beta^2] \left(\frac{15}{16}\right) (M_L p_L - M_R p_R) + [2\beta] \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \left(\frac{\gamma}{2}\right) (M_L - M_R) \cdot (p_L + p_R) \quad (۳۱)$$

در رابطه فوق  $\gamma$ ، نسبت گرمایی ویژه است. بخش اول در رابطه (۳۱)، جمعیتی است از بخش‌های اول و دوم در رابطه (۱۰) و از آنجاکه دارای ضریب  $\beta^2$  اند، در سرعت‌های پایین حذف خواهند شد، بنابراین مشکل اختلاف فاحش مطرح شده با معرفی رابطه (۲۷) از بین می‌رود، شایان ذکر است که در سرعت‌های پایین  $P_u$  نقشی حیاتی در این طرح عددی دارد.

#### ۴-۳- استراتژی اصلاح شار فشاری در روش SLAU

در این طرح عددی، بخش دوم پخش فشاری در رابطه (۱۰) با تابعی مناسب اصلاح مقیاس می‌شود.

$$dp = \frac{1}{2}(P_L^+ - P_R^-)\Delta p - \{(1 - \chi)(1 - P_L^+ - P_R^-)\bar{p}\} \quad (۳۲)$$

$$\chi = (1 - \bar{M})^2 \quad (۳۳)$$

$$\bar{M} = \text{Min}\left(1.0, \frac{1}{C} \sqrt{\frac{(u_L)^2 + (u_R)^2 + (v_L)^2 + (v_R)^2}{2}}\right) \quad (۳۴)$$

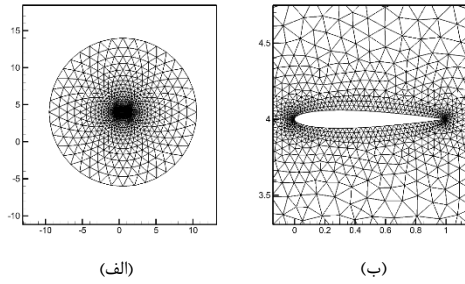
در طرح SLAU، مقدار  $\alpha$  در رابطه (۱۱) برابر صفر است. در سرعت‌های پایین  $(1 - \chi)$  برابر  $2M$  خواهد بود لذا داریم:

$$dp = \frac{3}{8}(M_L + M_R)\Delta p + \underbrace{\{[2M] \frac{3}{8}(M_L - M_R)\bar{p}\}}_{O(M) - \text{part2}} \quad (۳۵)$$

بخش دوم در رابطه فوق که در ارتباط مستقیم با سرعت صوت است با عدد ماخ محلی مقیاس می‌شود. لازم به ذکر است که بخش اول  $(\Delta p)$ ، از مرتبه یکم است.

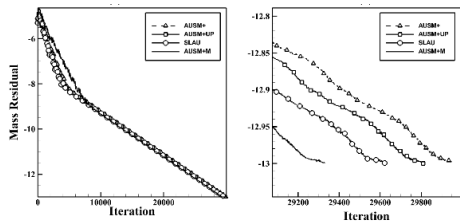
#### ۴-۴- استراتژی اصلاح شار فشاری در روش AUSM+M

در این طرح عددی، مشابه رابطه (۳۲)، بخش مخدوش گر دقت به‌صورت زیر مقیاس می‌شود:



شکل ۱- (الف) شبکه مورد استفاده در بررسی جریان حول ایرفویل NACA0012 (ب) نمای نزدیک

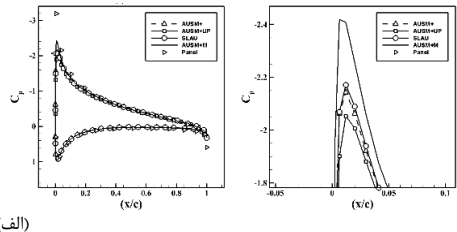
با توجه به شکل ۲ در بررسی جریان با عدد ماخ ۰/۲۵ و زاویه حمله ۷ درجه به لحاظ نرخ همگرایی بیشترین سرعت همگرایی در روش AUSM+M و کمترین نرخ همگرایی در روش AUSM+ قابل مشاهده است.



(الف) (ب)

شکل ۲- (الف) نرخ همگرایی خانواده آسم در بررسی جریان حول ایرفویل NACA0012 (عدد ماخ ۰/۲۵ و زاویه حمله ۷ درجه) (ب) نمای نزدیک

در ادامه و در شکل ۳ مقایسه دقت نتایج در المان ضریب فشار آورده شده است. همچنین با توجه به شکل ۳ معین است که روش AUSM+M و بعد از آن SLAU بهترین عملکرد را در نقطه سکون ایرفویل دارد. بعلاوه اینکه روش AUSM+UP هرچند دارای سرعت همگرایی بهتری نسبت به روش AUSM+ است اما در نقطه سکون ضریب فشار عملکرد ضعیف تری نسبت به این روش دارد، در مجموع و بنابر معیارهای سرعت همگرایی و پیش بینی دقیق تر در نقطه سکون طرح AUSM+M در این میدان بهترین عملکرد را دارد.



(الف) (ب)

شکل ۳- (الف) توزیع ضریب فشار روی ایرفویل NACA0012 (عدد ماخ ۰/۲۵ و زاویه حمله ۷ درجه) در خانواده عددی آسم (ب) نمای نزدیک

$$\frac{\Omega_j(Q_j)}{\Delta t} = R_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (44)$$

و مقدار مانده‌ها به صورت پیش شرطی به فرم زیر اصلاح می‌گردد.

$$R_j = \Gamma_i \sum_{n=k(j)}^3 \bar{H}_{j,n} \cdot \Delta \ell_{j,n} \quad (45)$$

در روابط فوق زیرنویس  $j$  نشان‌دهنده شماره سلول مورد محاسبه و  $n=k(j)$  به معنای سلول شماره  $n$  در وجه  $k$  است. علامت‌های  $d\ell$  و  $\Omega_j$  به ترتیب معرف اندازه وجه و مساحت سلول و  $R_j$  نشان‌دهنده بردار مانده‌ها،  $H$  بردار شار عمود بر وجه و  $Q$  متغیرهای بقایی است. برای محاسبه تغییرات بردار متغیرهای بقایی  $\Delta Q$ ، احتیاج به داشتن مقدار گام زمانی  $\Delta t$  است. مقدار گام زمانی برای هر سلول از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\Delta t_j \leq \frac{CFL \times \Omega_j}{\sum_{k=1}^3 (\lambda_{max})_k d\ell_k} \quad (46)$$

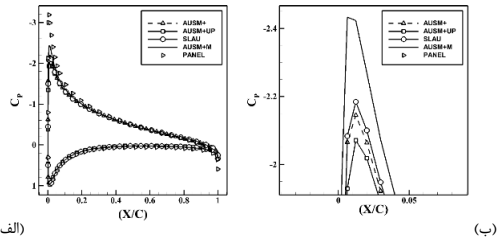
$\lambda_{max}$  بزرگ‌ترین مقدار ویژه برای معادلات پیش شرطی ترکل است. برای انتگرال گیری زمانی رابطه از روش بشفورت-مولتون تصحیح شده با دقت زمانی مرتبه دو استفاده شده است. (۲۳)

## ۵- نتایج

با توجه به بخش چهارم، در مدیریت بخش‌های پخشی شارهای فشاری و جابجایی، طرح‌های عددی مختلف دارای راهبردهای متفاوتی هستند. به جهت تفاوت در این راهبردها، شناخت طرح عددی کارآمدتر ضرورت دارد. در این بخش سه آزمایش ایرفویل NACA0012، ایرفویل سه المانه مکدونالد داگلاس 30P-30N و جریان روی یک نیم-استوانه در جریان-هایی با عدد ماخ کم و بسیار کم در راستای سنجش طرح‌های عددی مطرح شده به لحاظ دقت و سرعت همگرایی تدوین شده است.

### ۵-۱- آزمایش ایرفویل متقارن NACA0012

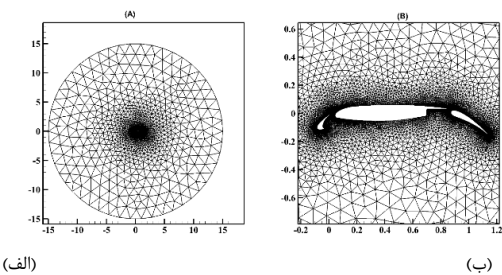
در آزمایش اول جریان حول ایرفویل متقارن NACA0012 در دو عدد ماخ ۰/۲۵ و ۰/۰۱ و در زاویه حمله ۷ درجه مورد بررسی قرار می‌گیرد. شبکه مورد استفاده در این آزمایش که در شکل ۱ نشان داده شده است پس از انجام بررسی‌های لازم به جهت استقلال از شبکه دارای ۳۲۱۸ سلول محاسباتی است. لازم به ذکر است، جهت بررسی عمیق تر طرح‌های توسعه داده شده در فیزیک‌های مورد بررسی از ذکر جزئیات مربوط به استقلال از شبکه اجتناب شده است.



شکل ۵- (الف) توزیع ضریب فشار روی ایرفویل NACA0012 (عدد ماخ ۰/۰۰۱ و زاویه حمله ۷ درجه) در خانواده عددی آسم (ب) نمای نزدیک

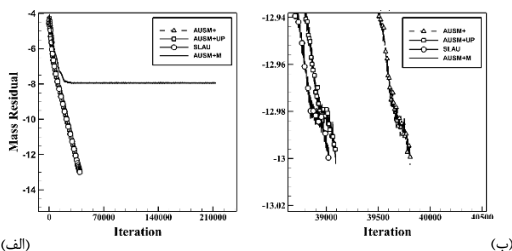
## ۲-۵- آزمایش ایرفویل سه المانه 30P-30N

جهت ارزیابی طرح‌های عددی در هندسه‌های پیچیده‌تر، جریان دوبعدی حول ایرفویل سه‌تکه 30P-30N در اعداد ماخ مختلف ۰/۰۳ و ۰/۰۳ با زاویه حمله ۸/۵ درجه مورد بررسی قرار گرفته و با نتایج تجربی (۲۴) مقایسه شده‌اند. همانند قبل برای بررسی استقلال از شبکه و دامنه حل، شبکه بهینه‌شده‌ای که از آزمایش‌های متعدد عددی به دست آمده است مطابق شکل ۶ این شبکه با ۱۹۳۷۲ المان و ۱۰۱۵۹ گره انتخاب می‌شود.



شکل ۶- (الف) شبکه مورد استفاده در بررسی جریان حول ایرفویل سه المانه (ب) نمای نزدیک

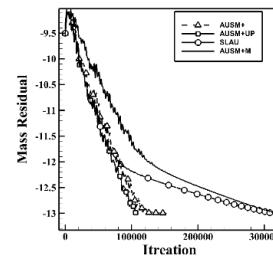
با توجه به شکل ۷ در این آزمایش با عدد ماخ ۰/۰۳ و زاویه حمله ۸/۵ درجه، روش SLAU بالاترین نرخ همگرایی را دارد و با اختلاف ناچیزی روش AUSM+UP بیشینه‌ی نرخ همگرایی را دارد. همچنین نرخ همگرایی روش AUSM+M دچار اختلال شده است و همگرایی بعد از مقدار معینی دچار توقف می‌شود.



شکل ۷- (الف) نرخ همگرایی خانواده آسم در بررسی جریان حول ایرفویل سه المانه (عدد ماخ ۰/۰۳ و زاویه حمله ۸.۵ درجه) (ب) نمای نزدیک

در ادامه و جهت بررسی در میدان‌هایی با شدت تراکم‌پذیری بیشتر عدد ماخ به ۰/۰۰۱ تقلیل داده شده است. با توجه به شکل ۴ معین است که در میدان مورد بررسی به لحاظ نرخ همگرایی بیشترین سرعت همگرایی در روش AUSM+UP و کمترین نرخ همگرایی در روش SLAU و AUSM+M قابل مشاهده است. همچنین با کاهش عدد ماخ و تسلط یافتن عمده‌ی میدان جریان تراکم‌ناپذیر نرخ همگرایی در روش SLAU و AUSM+M به شدت کاهش یافته است، بعلاوه روش AUSM+UP برخلاف حالت قبل سریع‌ترین نرخ همگرایی را نشان می‌دهد.

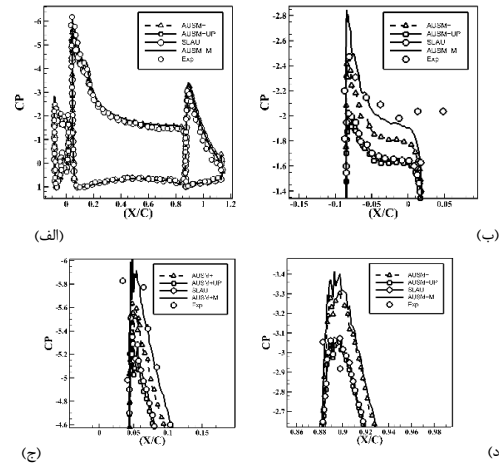
این بررسی نشان می‌دهد تجمیع اتلافات عددی حاصل از معادلات (۳۳) و (۴۲) در محاسبه شار فشاری و جرمی در طرح عددی SLAU هر چند در اعداد ماخ پایین منتج به نرخ همگرایی مناسبی می‌شود اما با کاهش عدد ماخ و رسیدن به ماخ‌های خیلی کم نرخ همگرایی تضعیف می‌شود؛ همچنین این روند در روش AUSM+M نیز وجود دارد. در نقطه مقابل روش‌های AUSM+ که اتلافات عددی آن در روابط (۲۴) و (۴۰) تجمیع شده است، توامان با کاهش عدد ماخ نرخ همگرایی بهتری را دارد.



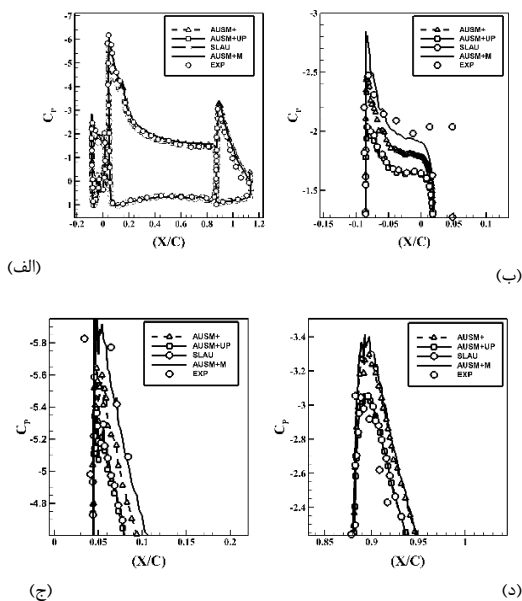
شکل ۴- نرخ همگرایی خانواده آسم در بررسی جریان حول ایرفویل NACA0012 (عدد ماخ ۰/۰۰۱ و زاویه حمله ۷ درجه)

با توجه به شکل ۵، روش AUSM+M و بعد از آن SLAU بالاترین دقت را در نقطه سکون دارد. نکته قابل تأمل این است که روش AUSM+UP هر چند سرعت همگرایی بسیار خوبی را نسبت به سه روش دیگر در این آزمایش دارد اما دقت آن در نقطه سکون کاهش می‌یابد و در این ناحیه ضعیف‌ترین روش است. از این آزمایش می‌توان استنباط کرد که مجموع روابط (۲۵) و (۴۱) که تجمیع بخش‌های پخشی در روش AUSM+UP هستند، هر چند در افزایش سرعت همگرایی کارآمد هستند اما نمی‌توانند توامان منجر به دقت قابل قبولی نیز بشوند به عبارتی توازن منطقی‌ای بین کاهش سرعت همگرایی و افزایش میزان دقت به واسطه روابط مطرح شده ایجاد نمی‌شود و این مسئله به عنوان یک نقطه ضعف عملکردی تلقی می‌گردد.

عددی AUSM+M را در این میدان دارد همچنین روش‌های SLAU و AUSM+UP دقت مشابهی را در این میدان دارند. لازم به ذکر است که بنابراین آزمایش می‌توان نتیجه گرفت که تشدید نقاط پیچیده جریان که همراه با تکینگی هستند (مانند نقاط سکون) می‌تواند عملکرد نقاط سکون را متأثر کند. مضاعف بر این المان نقش حیاتی‌ای را در ایجاد تعادل بین میزان افزایش سرعت همگرایی و بهبود دقت در سرعت‌های بسیار پایین دارد. مشهود است که در روش AUSM+M با حذف این المان هرچند دقت بهبود داشته است اما سرعت همگرایی دچار توقف در مقداری معین شده است.



شکل ۸- (الف) توزیع ضریب فشار حول ایرفویل سه المانه (عدد ماخ ۰/۰۰۱ و زاویه حمله ۷ درجه) در خانواده عددی آسم (ب) و (ج) و (د) نمای نزدیک

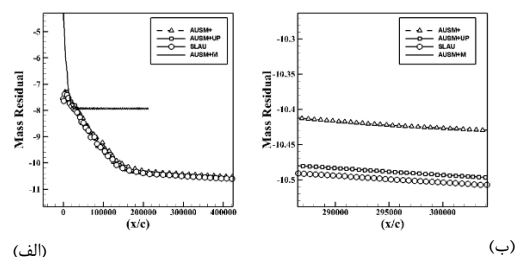


شکل ۹- (الف) توزیع ضریب فشار حول ایرفویل سه المانه (عدد ماخ ۰/۰۰۳ و زاویه حمله ۸.۵ درجه) در خانواده عددی آسم (ب) و (ج) و (د) نمای نزدیک

### ۳-۵- جریان داخل کانال نیم-استوانه

جهت ارزیابی بیشتر طرح‌های بیان شده در جریان داخلی، جریان درون یک کانال با هندسه نیم-استوانه و قطر ۰/۲ و در اعداد ماخ ۰/۰۰۱ مورد بررسی قرار گرفته است. برای این آزمایش، برای جریان ورودی مادون صوت، فشار سکون  $P_0$  و دمای سکون مشخص  $T_0$  می‌گردد. در خروجی، فشار استاتیک خروجی معین گردیده و مابقی متغیرها از داخل میدان مشخص می‌گردد. شبکه محاسباتی بهینه شده که در نزدیکی برآمدگی تراکم بیشتری دارد با ۵۹۱۳ سلول و ۳۰۸۲ گره در شکل ۱۱ آورده شده است.

با توجه به شکل ۸ روش AUSM+M و بعداز آن AUSM+ بهترین دقت را در نواحی مختلف میدان در پیش‌بینی مشخصه‌های جریان ارائه می‌دهد. مضاعف بر این دقت روش‌های SLAU و AUSM+UP در این میدان در پیش‌بینی مشخصه‌های جریان تقریباً یکسان است. لازم به ذکر است که علی‌رغم نرخ همگرایی ضعیف روش AUSM+M، این روش در پیش‌بینی ضریب فشار این میدان بهترین دقت را دارد. با توجه به شکل ۹ در این آزمایش با کاهش عدد ماخ به ۰/۰۰۳ روش SLAU بالاترین نرخ همگرایی را همانند بخش قبل این آزمایش دارد، با اختلاف ناچیزی روش AUSM+UP بیشینه‌ی نرخ همگرایی را دارد. همچنین نرخ همگرایی روش AUSM+M بعد از مقدار معینی دچار توقف می‌شود. هیچ‌کدام از طرح‌های عددی سرعت همگرایی مناسبی مانند آزمایش قبل ندارند و نرخ همگرایی‌شان دچار توقف شده است.



شکل ۹- (الف) مقایسه نرخ همگرایی خانواده آسم در بررسی جریان حول ایرفویل سه المانه (عدد ماخ ۰/۰۰۳ و زاویه حمله ۸.۵ درجه) (ب) نمای نزدیک

همچنین با توجه به شکل ۱۰ می‌توان اذعان داشت که طرح AUSM+M دارای بیشینه دقت در نواحی مختلف این میدان است، همان‌طور که قبلاً نیز معین شد این روش علی‌رغم نرخ همگرایی نامناسب دارای دقت مناسبی در محاسبه ضریب فشار و در محل نقاط سکون است. لازم به ذکر است که روش AUSM+ نیز همین الگوی رفتاری بیان شده در طرح



## ۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، گستره‌ی وسیعی از خانواده آسم با رویکرد بررسی دقت و سرعت همگرایی در سرعت‌های کم و خیلی کم مورد بررسی قرار گرفتند. با توجه به آزمایش‌های انجام شده می‌توان به صورت خلاصه به نتایج ذیل اشاره کرد:

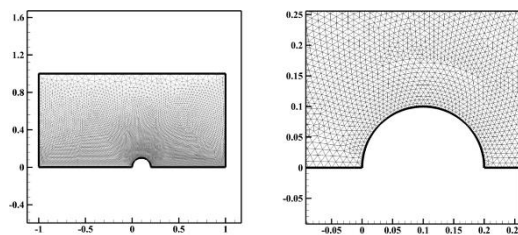
الف- المان‌های اتلاف عددی موجود در شار جرمی و شار فشاری این خانواده تأثیر بسزایی در میزان نرخ همگرایی و دقت روش‌های مورد بررسی دارند. لازم است برای رسیدن به یک توازن مناسب میان المان‌های سرعت همگرایی و بهبود دقت، مقیاس دهی مناسبی در المان‌های معرفی شده ایجاد گردد.

ب- روش AUSM+M به لحاظ دقت در پیش‌بینی محل‌های بحرانی با سرعت خیلی کم، بهترین عملکرد را بین روش‌های مورد بررسی دارد و می‌تواند بطور متوسط ۱۵ درصد بهبود را در پاسخ‌ها ایجاد نماید. علی‌رغم دقت مناسب روش AUSM+M، این روش در سرعت‌های پایین نرخ همگرایی مناسبی را ندارد لازم به ذکر است، نرخ همگرایی این روش در سرعت‌های کم در مقداری معین متوقف می‌شود.

ب- با افزایش پیچیدگی جریان و ظهور گرادیان‌های شدیدتر در میدان حل، عملکرد این خانواده عددی تحت الشعاع قرار می‌گیرد و در آزمایش ایرفویل سه المانه، به علت پیچیدگی بیشتر فیزیک جریان و تشدید نقاط سکون در میدان حل، نرخ همگرایی طرح‌های عددی خانواده آسم کاهش می‌یابد و در این بین روش AUSM+M کمترین نرخ همگرایی و روش SLAU بهترین نرخ همگرایی را دارد. اما دقت بهتری از نتایج با روش AUSM+M نسبت به سایر طرح‌های این خانواده عددی حاصل می‌شود.

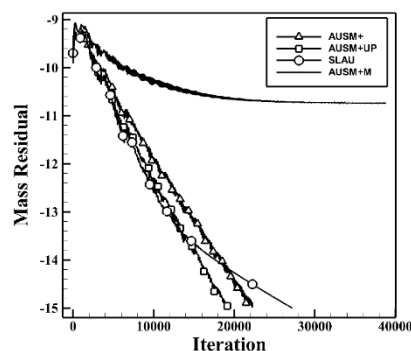
پ- روش AUSM+UP در سرعت‌های پایین، رفتاری معکوس با روش AUSM+M دارد، به عبارت دقیق‌تر این روش علی‌رغم سرعت همگرایی مناسب، دقت را بشدت متأثر و مخدوش می‌نماید. روش AUSM+ دارای رفتاری مشابه با روش AUSM+M است، هرچند در میزان نرخ همگرایی نسبت به این روش عملکرد ضعیف‌تری دارد.

پ- در نهایت، در جریان‌های با سرعت کم یا خیلی کم، روش AUSM+M و بعد از آن روش SLAU می‌تواند با صرف زمان بیشتر منتج به دقت بهتری در نتایج شود؛ در نقطه مقابل روش‌های AUSM+ و AUSM+UP اتلافات عددی بیشتر، هزینه کمتر و دقت ضعیف‌تری در جریان‌های سرعت پایین غیرلج دارند.



شکل ۱۱- (الف) شبکه محاسباتی برای کانال با برآمدگی نیم-استوانه (ب) نمای نزدیک

مقایسه سرعت همگرایی طرح‌های عددی در عدد ماخ ۰/۰۰۱ در شکل ۱۲ آورده شده است. با توجه به این شکل اولاً میزان همگرایی روش AUSM+M و SLAU در این میدان مخدوش شده است و دوماً این که پیشینه سرعت همگرایی در طرح عددی AUSM+UP رخ می‌دهد.



شکل ۱۲- (الف) نرخ همگرایی خانواده آسم در بررسی جریان حول کانال نیم-استوانه‌ای (عدد ماخ ۰/۰۰۱)

همچنین با توجه به شکل ۱۳ دقت طرح‌های عددی در پیش‌بینی ضریب فشار در مقایسه با ضریب فشار تحلیلی ارائه شده است ( $C_p = 1 - 4\sin^2(\theta)$ ). نکته قابل تأمل این است که علی‌رغم مخدوش شدن سرعت همگرایی در طرح‌های AUSM+M و SLAU دقت محاسبه ضریب فشار این روش عددی در میدان حل نسبت به طرح‌های دیگر بهبود عمده‌ای داشته است. همان‌طور که قبلاً نیز بیان شد حذف المان  $f_a$  باعث بهبود دقت می‌شود اما اثری معکوس بر روی سرعت همگرایی دارد. این مسئله در این آزمایش و با توجه به شکل ۱۲ و شکل ۱۳ در روش AUSM+M دیده می‌شود. از سویی دیگر جهت از بین بردن رخداد غیر فیزیکی چکربرد لازم است تا ضریب  $\Delta p$  در بخش‌های پخشی شار جرمی و جابجایی از مرتبه صفر باشد (۲۵) و این مسئله در شار جرمی روش AUSM+UP (رابطه (۴۱)) که در آن  $\Delta p$  از مرتبه صفر است نسبت به شار جرمی روش AUSM+M (رابطه (۴۳)) که به فرم منفی یک است، خواستگاه اختلاف این دو روش در میزان همگرایی استنتاج می‌شود.

[15].Maia AAG, Kapat JS, Tomita JT, Silva JF, Bringhamti C, Cavalcá DF. Preconditioning methods for compressible flow CFD codes: Revisited. *Int J Mech Sci.* 2020;186:105898.

[16].Maia A, Ferreira da Silva J, Tomita J, Bringhamti C. Implementing a Preconditioning Technique in A RANS Compressible Code to Accelerate the Convergence Rate for Low-Speed Flows. The 5th World Congress on Mechanical, Chemical, and Material Engineering; Canada2019.

[17].Maia AA, Silva JF, Tomita JT, Bringhamti C. Applying a Preconditioning Technique to the Euler Equations to Accelerate the Convergence Rate for Low-Speed Flows. the 5th World Congress on Mechanical, Chemical, and Material Engineering; Lisbon, Portugal2019.

[18].Darmofal DL, Siu K. A Robust Multigrid Algorithm for the Euler Equations with Local Preconditioning and Semi-coarsening. *J Comput Phys.* 1999;151(2):728-56.

[19].Akbarzadeh P, Askari Lehdarbonei A, Derazgisoo SM. A new smoothing approach for accelerating the convergence of power-law preconditioning method in steady and unsteady flows simulation. *Int J Mech Sci.* 2018;141:316-29.

[20].Tukel E. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *J Comput Phys.* 1987;72(2):277-98.

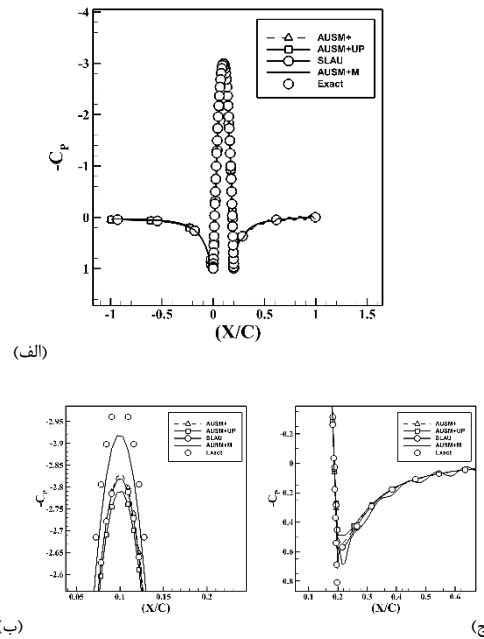
[21].Tukel E. Preconditioning methods for low-speed flows. 14th Appl Aerodyn Conference; New Orleans,LA,U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics; 1996.

[22].Edwards JR, Liou M-S. Low-diffusion flux-splitting methods for flows at all speeds. *AIAA J.* 1998;36(9):1610-7.

[23].Rodabaugh D, Thompson S. Adams-type methods with increased ranges of stability. *Computers & Mathematics with Applications.* 1978;4(4):349-57.

[24].Murayama M, Nakakita K, Yamamoto K, Ura H, Ito Y, Choudhari MM. Experimental Study on Slat Noise from 30P30N Three-Element High-Lift Airfoil at JAXA Hard-Wall Low-speed Wind Tunnel. 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference; Atlanta, USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics; 2014.

[25].Li X-s, Gu C-w. Mechanism of Roe-type schemes for all-speed flows and its application. *Comput Fluids.* 2013;86:56-70.



شکل ۱۳- (الف) م توزیع ضریب فشار روی کانال نیم-استوانه‌ای (عدد ماخ ۰/۰۱) در خانواده عددی آسم (ب) و (ج) نمای نزدیک

## ۷- مراجع

[1].Liou M-S, editor Open issues in numerical fluxes: proposed resolutions. 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference; 2011.

[2].Qu F, Yan C, Yu J, Sun D. A new flux splitting scheme for the Euler equations. *Comput Fluids.* 2014;102:203-14.

[3].Vanleer B, editor Flux-vector splitting for the 1990s. NASA, Lewis Research Center, Computational Fluid Dynamics Symposium on Aeropropulsion; 1991.

[4].Toro EF. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction: Springer Science & Business Media; 2013.

[5].Roe PL. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J Comput Phys.* 1981;43(2):357-72.

[6].Yeom G-S, Chang K-S. Numerical simulation of two-fluid two-phase flows by HLL scheme using an approximate Jacobian matrix. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals.* 2006;49(2):155-77.

[7].Liou M-S, Steffen Jr CJ. Development of a new flux splitting scheme. Center for Modeling of Turbulence and Transition (CMOTT) Research Briefs: 1990. 1991.

[8].Liou M-S, Steffen Jr CJ. A new flux splitting scheme. *Journal of Computational physics.* 1993;107(1):23-39.

[9].Liou M-S. A sequel to AUSM. *Journal of Computational Physics.* 1996;129(2):364-82.

[10].Kim KH, Kim C, Rho O-H. Methods for the accurate computations of hypersonic flows: I. AUSMPW+ scheme. *J Comput Phys.* 2001;174(1):38-80.

[11].Liou M-S. A sequel to AUSM, Part II: AUSM+up for all speeds. *Journal of computational physics.* 2006;214(1):137-70.

[12].Chen S-s, Cai F-j, Xue H-c, Wang N, Yan C. An improved AUSM-family scheme with robustness and accuracy for all Mach number flows. *Applied Mathematical Modelling.* 2020;77:1065-81.

[13].Shima E, Kitamura K. Parameter-free simple low-dissipation AUSM-family scheme for all speeds. *AIAA J.* 2011;49(8):1693-709.

[14].Djavarshkian m, moghadashkorasani M, mohammadi A. Comparing the performance of preconditioning matrixes in wide range of internal and external flows. *Fluid mechanics and aerodynamics.* 2020;10(2).