فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۱، شمارهٔ ۷۰ (بهار و تابستان ۱۴۰۱) صص. ۷۵ تا ۹۸

نگاهی به ابرپالایه‌ها در ریاضیات

رامین فعال، حمیدرضا ابراهیمی ویشکی

چکیده. ابرپالایه مفهومی کارآمد در سراسر ریاضیات است. در این مقاله، با تکیه بر ویژگی‌ها و کاربردهای ابرپالایه سعی در شناختِ ساختار این مفهوم داریم. به‌این‌منظور با بررسی نمودهای مختلف ابرپالایه در نظریهٔ مجموعه‌ها، توپولوژی، نظریهٔ اندازه، فشرده‌سازی استون‌ـچخ، آنالیز نااستاندارد، و به‌ویژه آنالیز تابعی به توصیف ابرپالایه می‌پردازیم.

۱ مقدمه

نخستین‌بار کارتان در [۳] مفاهیم پالایه[1] و ابرپالایه[2] را به‌طور اصولی معرفی کرد. کاربردهای مختلف این مفهوم در منطق، توپولوژی، آنالیز ریاضی، و جبر وجود دارد و قصد داریم به بررسی فنی برخی از آن‌ها بپردازیم. در ادامه، برهان‌هایی را بیان می‌کنیم که در فهم عمیق‌تر ابرپالایه ضروری‌اند و اگر پژوهشگری به این درک دست یابد، می‌تواند به‌زیبایی و به‌طور کارآمد از ابزار ابرپالایه‌ها استفاده کند.

در این مقاله، ابتدا به بیان ویژگی‌های مقدماتی ابرپالایه‌ها می‌پردازیم. کاربردهای آن در توپولوژی، به‌ویژه حد ابرپالایه‌ای در مجموعه‌های فشرده، را بررسی می‌کنیم و به کمک آن قضیهٔ تیخونوف را به‌آسانی اثبات خواهیم کرد. به کمک مجموعه‌های بزرگْ ابرپالایه‌ها را توصیف می‌کنیم و ابرپالایه‌های متناظر با مجموعه‌های بزرگ را در نظریهٔ مجموعه‌ها، توپولوژی، و نظریهٔ اندازه معرفی

عبارات و کلمات کلیدی: ابرپالایه، اصل بازتابی موضعی، ابرحاصل‌ضرب فضاهای باناخ، قضیهٔ وُآش، دوگان دوم
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۱/۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۵/۲

[1] filter [2] ultrafilter

doi: 10.30504/mct.2022.1038.1734

می‌کنیم.

مفهوم ابرپالایه در حین تجهیز مجموعهٔ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ به یک رابطهٔ ترتیب و اعمال جبری جمع و ضرب به‌طور طبیعی ظاهر می‌شود و در این‌باره قضیهٔ وُآش[۱] را مطرح می‌کنیم. به‌ویژه، خواهیم گفت که چگونه به کمک ابرپالایه‌ها می‌توان از طریق ساختارهای موضعی، متناهی، یا با پیچیدگی کم به توصیف ساختارهای سراسری، نامتناهی، یا پیچیده پرداخت. در پایان، وجود ابرپالایه را به‌صورت یک اصل موضوعِ مستقل از دستگاه ZF درنظر می‌گیریم و ارتباط آن‌را با اصل انتخاب، قضیهٔ هان‌ـباناخ، و اصول دیگری که مستقل از دستگاه ZF هستند، بررسی می‌کنیم.

۲ پالایه و ابرپالایه

فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. خانوادهٔ ناتهی $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی X را یک پایهٔ پالایه[۲] می‌نامیم هرگاه برای هر $F, G \in \mathcal{F}$، عضو $H \in \mathcal{F}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $H \subseteq F \cap G$. همچنین، $\mathcal{F}$ را یک پالایه گوییم هرگاه

۱. $X \in \mathcal{F}$؛

۲. اگر $F \in \mathcal{F}$ و $F \subseteq G$ دراین‌صورت $G \in \mathcal{F}$؛

۳. اگر F و G متعلق به $\mathcal{F}$ باشد، آنگاه $F \cap G \in \mathcal{F}$.

مثال‌های فراوانی از پایهٔ پالایه و پالایه وجود دارد. برخی از آن‌ها چنین‌اند:

مثال ۱.۲. ۱. مجموعهٔ $\{S \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} - S$ متناهی است$\}$ یک پالایه روی $\mathbb{N}$ است.

۲. مجموعهٔ $\{S \subseteq \mathbb{C} : \mathbb{C} - S$ فشرده است$\}$ یک پالایه روی $\mathbb{C}$ است.

۳. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $x \in X$، آنگاه مجموعهٔ همه همسایگی‌های حول x یک پایهٔ پالایه روی X است.

۴. مجموعهٔ $\{S \subseteq X : X - S$ متناهی و ناتهی است$\}$ یک پالایه روی مجموعهٔ نامتناهی X است. چنین پالایه‌هایی را پالایهٔ فرشه[۳] می‌نامند.

مجموعهٔ همهٔ پالایه‌ها (یا حتی پایهٔ پالایه‌ها) روی X با رابطهٔ $\subseteq$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب است، بنابراین می‌توان در جستجوی پالایه‌های ماکسیمال بود. در ادامه خواهیم دید که پالایه‌های

[1] Jerzy Łoś [2] filter base [3] Fréchet

ماکسیمال ویژگی‌های جالبی دارند؛ درواقع، ما را از بررسی پالایه‌های درون خود بی‌نیاز می‌کنند. اگر به دنبال شناخت فلسفی ابرپالایه باشیم، خواهیم دید که ماکسیمال‌بودن پالایه، به‌نوعی شناخت ما را از فضایی که ابرپالایه بر آن بنا شده است تمامیت می‌بخشد.

پالایهٔ $\mathcal{U}$ را یک ابرپالایه می‌نامیم هرگاه برای هر پالایهٔ $\mathcal{F}$ با شرط $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ داشته باشیم $\mathcal{U} = \mathcal{F}$. برای هر $x \in X$، مجموعهٔ $\mathcal{U}_x = \{S \subseteq X : x \in S\}$ یک ابرپالایه است؛ ابرپالایه با این ساختار را ابرپالایهٔ ثابت می‌نامیم. ابرپالایه را آزاد گوییم هرگاه ثابت نباشد. گوییم ابرپالایهٔ $\mathcal{U}$ شماراناکامل[1] است هرگاه دنباله‌ای در $\mathcal{U}$ مانند $\{I_k : k \geq ۱\}$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که

$$I_۱ \supseteq I_۲ \supseteq \cdots, \quad \bigcap_{k=۱}^{\infty} I_k = \emptyset.$$

فرض کنیم $\mathcal{F}$ یک پالایه باشد، دراین‌صورت مجموعهٔ

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{G} : \text{است } \mathcal{F} \text{ پالایه‌ای شامل } \mathcal{G}\}$$

با رابطهٔ $\subseteq$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب و ناتهی است. پس هر زنجیر صعودی مانند $(G_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ دارای کران بالایی مانند $\cup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ در $\mathcal{A}$ است. اینک لم تسورن[2] نتیجه می‌دهد که ابرپالایه‌ای مانند $\mathcal{U}$ شامل $\mathcal{F}$ وجود دارد. می‌توان نشان داد این حکم، با لم تسورن و درنتیجه با اصل انتخاب هم‌ارز نیست [۱۴]. درواقع، حکم اخیر بینابین دستگاه اصل موضوعی ZF و ZFC قرار می‌گیرد.

نمونه‌ای از یک ابرپالایه شماراناکامل چنین است: در قسمت سوم مثال ۱.۲، فضای توپولوژیک X را $\mathbb{R} - \{۰\}$ مجهز به توپولوژی اقلیدسی درنظر بگیرید و برای هر $k \in \mathbb{N}$ تعریف کنید $I_k = (-۱/k, ۱/k) - \{۰\}$. دراین‌صورت، اگر $\mathcal{U}$ ابرپالایهٔ شامل $\mathcal{F}$ باشد، آنگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$ مجموعه I_k در این پالایه قرار دارد و $\cap_{k=۱}^{\infty} I_k = \emptyset$.

در ادامه ویژگی‌های بیشتری از ابرپالایه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۲.۲. فرض کنید $\mathcal{U}$ پالایه باشد. دراین‌صورت $\mathcal{U}$ ابرپالایه است اگر و فقط اگر برای هر زیرمجموعهٔ A از X داشته باشیم $A \in \mathcal{U}$ یا $A^c \in \mathcal{U}$.

اثبات. به برهان خلف، فرض کنیم مجموعه‌ای مانند A وجود دارد که A و A^c در $\mathcal{U}$ نباشند. توجه می‌کنیم که یا اشتراک A با هر $U \in \mathcal{U}$ یا اشتراک A^c با هر $U \in \mathcal{U}$ ناتهی است. زیرا اگر چنین

[1] countably incomplete [2] Zorn

نباشد، U_1 و U_2ای در $\mathcal{U}$ وجود دارند به‌طوری‌که $A \cap U_1 = \emptyset$ و $A^c \cap U_2 = \emptyset$، که تناقض $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ نتیجه می‌شود.

لذا فرض می‌کنیم حالت اول برقرار باشد. تعریف می‌کنیم

$$\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cup \{A \cap U : U \in \mathcal{U}\} \cup A.$$

می‌دانیم $\tilde{\mathcal{U}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی است و یک پالایه است. به‌علاوه، $\mathcal{U}$ به‌طور سره درون $\tilde{\mathcal{U}}$ واقع است، که این متناقض با ابرپالایه بودن $\mathcal{U}$ است.

برعکس، اگر پالایهٔ $\mathcal{U}$ دارای ویژگی گفته‌شده باشد و ابرپالایه نباشد، آنگاه ابرپالایه $\mathcal{V}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. فرض کنیم $A \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ دراین‌صورت $A^c \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$؛ یعنی A و A^c در $\mathcal{V}$اند که تناقض است. $\square$

در پایان این بخش، حاصل‌ضرب دو ابرپالایه را می‌آوریم. فرض کنید $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ دو ابرپالایه به ترتیب روی I و J باشند. ابرپالایهٔ حاصل‌ضربی $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ روی $I \times J$ را با $\mathcal{W} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ نشان می‌دهند. ساختار ابرپالایهٔ $\mathcal{W}$ به قرار زیر است:

$A \in \mathcal{W}$ اگر و فقط اگر $\{j : \{i : (i,j) \in A\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$.

جزئیات بیشتر در [۱۵] آمده است.

۳ حد و فشردگی برحسب ابرپالایه‌ها

مجموعهٔ جزئاً مرتب $(I, \leq)$ را جهت‌دار گوییم هرگاه برای هر دو عضو $\alpha, \beta \in I$ عضوی مانند $\gamma \in I$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$. اکنون خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های ناتهی به صورت

$$I_\gamma = \{\lambda \in I : \lambda \geq \gamma\}$$

یک پالایه موسوم به پالایهٔ ترتیبی[1] است.

اکنون می‌خواهیم حد روی یک ابرپالایه را تعریف و سپس آن را با تعریف حد در فضای توپولوژیک مقایسه کنیم. به یاد بیاورید که اگر $(I, \leq)$ مجموعه‌ای جهت‌دار و (X, τ) فضای

[1] ordered filter

توپولوژیک باشد، هر تابع $x : I \to X$ را تور می‌نامیم و گوییم تور $(x_i)_{i\in I}$ به x همگراست هرگاه برای هر همسایگی V از x، عضو $i_\circ \in I$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای $i \geq i_\circ$ داشته باشیم $x_i \in V$. گوییم تور $(x_i)_{i\in I}$ روی ابرپالایه $\mathcal{U}$ به x همگراست و می‌نویسیم $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$، هرگاه برای هر همسایگی V از x، مجموعهٔ $\{i \in I : x_i \in V\}$ متعلق به $\mathcal{U}$ باشد. چون هر ابرپالایه با رابطهٔ

$$F \leq G \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad G \subseteq F$$

یک مجموعهٔ جهت‌دار است، با یک بررسی ساده می‌توان دید که تور $(x_i)_{i\in I}$ روی ابرپالایهٔ $\mathcal{U}$ به x همگراست اگر و فقط اگر برای هر همسایگی V از x، مجموعهٔ $F_\circ \in \mathcal{U}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $F_\circ \leq F$ داشته باشیم $\{x_i : i \in F\} \subseteq V$. به‌علاوه، حد ابرپالایه روی فضای هاسدورف (X, τ) در صورت وجود یکتاست. زیرا، اگر $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$ و $\lim_{\mathcal{U}} x_i = y$، آنگاه همسایگی U حول x و همسایگی V حول y وجود دارند به‌گونه‌ای‌که $U \cap V = \emptyset$. دراین‌صورت $\{i : x_i \in U\}$ و $\{i : x_i \in V\}$ هر دو متعلق به $\mathcal{U}$ و مجزایند که نشدنی است.

اگرچه ویژگی‌های حد معمولی و حد ابرپالایه بسیار مشابه‌اند، حد ابرپالایه یک ویژگی استثنایی دارد. می‌دانیم که هر تور در یک مجموعهٔ فشرده دارای زیرتوری همگرا به نقطه‌ای در آن مجموعه است. اما حد ابرپالایه روی یک مجموعهٔ فشرده ویژگی متفاوتی دارد:

قضیه ۱.۳. گیریم K یک فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف باشد و $(x_i)_{i\in I}$ توری در K باشد. دراین‌صورت $\lim_{\mathcal{U}} x_i$ در K وجود دارد.

اثبات. به برهان خلف، فرض کنیم برای هر $x \in \overline{\{x_i : i \in I\}}$ مجموعهٔ باز V_x وجود دارد به‌طوری‌که $\{i \in I : x_i \in V_x\}$ متعلق به $\mathcal{U}$ نباشد. چون $\overline{\{x_i : i \in I\}}$ زیرمجموعه‌ای بسته از مجموعهٔ فشرده X است، پس فشرده است. ازآنجاکه $\overline{\{x_i : i \in I\}} \subseteq \bigcup_{x\in\overline{\{x_i:i\in I\}}} V_x$، فشرده‌بودن $\overline{\{x_i : i \in I\}}$ نتیجه می‌دهد که مجموعه‌های V_{x_1}، ...، V_{x_n} وجود دارند به‌گونه‌ای‌که

$$\overline{\{x_i : i \in I\}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}.$$

اگر تعریف کنیم $I_{V_x} = \{i \in I : x_i \in V_x\}$، آنگاه $I = \bigcup_{i=1}^{n} I_{V_{x_i}}$. اما، چون $I \in \mathcal{U}$ لذا jای وجود دارد به‌طوری‌که $I_{V_{x_j}}$ متعلق به $\mathcal{U}$ است و این با فرض تناقض دارد. $\square$

حکم این قضیه برای اثبات ساده‌ای از قضیهٔ تیخونوف کاربرد دارد.

قضیه ۲.۳ (قضیهٔ تیخونوف). حاصل‌ضرب دلخواه از فضاهای فشرده، با توپولوژی حاصل‌ضربی فشرده است.

اثبات. فرض کنیم $\{X_i\}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌های فشرده و $\{(x_i^\alpha)_{i\in I}\}_{\alpha\in\Lambda}$ توری دلخواه در $\prod_{i\in I} X_i$ است. برای i ثابتی، $\{x_i^\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ یک تور در فضای فشرده X_i است. بنابراین $x_i \in X_i$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{\mathcal{U}} x_i^\alpha = x_i$، که در آن $\mathcal{U}$ ابرپالایهٔ شامل پالایه ترتیبی حاصل از مجموعهٔ جزئاً مرتب $(I, \leq)$ است. نشان می‌دهیم، زیرتوری از $\{(x_i^\alpha)_{i\in I}\}_{\alpha\in\Lambda}$ وجود دارد که به (x_i) همگراست. به‌این‌منظور، فرض می‌کنیم W همسایگی‌ای حول $(x_i)_{i\in I}$ به‌شکل $\prod_{i\in I} U_i$ باشد، به‌طوری‌که

$$U_i = X_i, \quad i \notin \{i_1, \ldots, i_n\}.$$

چون برای هر $j \in \{1, \ldots, n\}$، رابطهٔ $\lim_{\mathcal{U}} x_{i_j}^\alpha = x_{i_j}$ برقرار است، پس α_0 را می‌توان به‌اندازهٔکافی بزرگ انتخاب کرد تا برای $\alpha \geq \alpha_0$،

$$x_{i_j}^\alpha \in U_{i_j}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

ازاین‌رو، برای $\alpha \geq \alpha_0$، (x_i^α) در W قرار دارد. □

۴ ابرپالایه و مجموعه‌های بزرگ

اینک که با برخی ویژگی‌های ابرپالایه آشنا شدیم، می‌توانیم یکی از تعبیرهای آن را درک کنیم. یک ابرپالایه چه ویژگی‌ای از فضای زمینهٔ خود برای ما آشکار می‌کند؟ با استفاده از ابرپالایه می‌توان مجموعه‌های بزرگ (به تعبیرهای مختلف) را تشخیص داد. اجازه دهید با این نگاه به تعریف ابرپالایه بازگردیم.

۱. رابطهٔ «$X \in \mathcal{F}$»، یعنی X یک مجموعهٔ بزرگ است.

۲. «اگر $F \in \mathcal{F}$ و $F \subseteq G$ آنگاه $G \in \mathcal{F}$»، یعنی هر مجموعهٔ شامل یک مجموعهٔ بزرگ، بزرگ است.

۳. «اگر F و G متعلق به $\mathcal{F}$ باشند، آنگاه $F \cap G \in \mathcal{F}$»، یعنی اشتراک دو مجموعهٔ بزرگ، باز هم مجموعه‌ای بزرگ است.

و اینکه، ابرپالایه پالایه‌ای است که شامل تمام مجموعه‌های بزرگ است. نکتهٔ جالب دیگر در مورد ابرپالایه این است که برای هر مجموعهٔ A، یکی از دو مجموعهٔ A یا A^c بزرگ‌اند.

از این نوع تعبیرها می‌توان به‌وفور یافت. برای مثال، یک فضای اندازه‌پذیر با یک اندازهٔ ناصفر مانند (X, Σ, μ) را درنظر می‌گیریم. یک انتخاب طبیعی برای مجموعه‌های بزرگ از دید نظریهٔ اندازه مجموعه‌ای مانند A است که $\mu(A^c) = ۰$. به‌راحتی می‌توان دید

$$\mathcal{F} = \{A \in \Sigma : \mu(A^c) = ۰\}$$

تشکیل یک پایهٔ پالایه می‌دهد که در ادامه می‌توان بر آن یک ابرپالایه ساخت. پس یک ابرپالایه خاص می‌تواند مجموعه‌های بزرگ یا مهم (به معنایی) را شناسایی کند. اکنون اگر به قضیهٔ (۱.۳) مراجعه کنیم، متوجه اهمیت ابرپالایه خواهیم شد. درواقع، در یک فضای فشرده می‌توان با داشتن توری به عضوی رسید که به تعبیری «مهم یا خاص» است.

به‌عنوان مثالی دیگر، می‌توانیم مجموعه‌هایی را که به تعبیر توپولوژیکی بزرگ هستند مشخص کنیم. در یک فضای توپولوژیک (X, τ)، اولین انتخاب برای مجموعهٔ بزرگ به معنای توپولوژیکی مجموعه‌های چگال‌اند. اما می‌دانیم $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}^c$ هر دو چگال، اما دارای اشتراک تهی‌اند، بنابراین نمی‌توانند در قالب یک ابرپالایه قرار گیرند. اما اگر دو مجموعهٔ باز و چگال را درنظر بگیریم، همواره دارای اشتراک باز و چگال‌اند. به‌سادگی قابل بررسی است که $\mathcal{F} = \{U \in \tau\ :\ \text{چگال است}\ U\}$ یک پایهٔ پالایه است.

برای مجموعهٔ دلخواه X تعبیر مناسب دیگری برای زیرمجموعه‌های بزرگ، زیرمجموعه‌هایی‌اند که متمم متناهی دارند. روشن است که این زیرمجموعه‌ها پالایهٔ فرشه روی Xاند. این مطلب که پالایهٔ فرشه درون هر ابرپالایه روی X قرار می‌گیرد به این معناست که مجموعه‌هایی که دارای متمم متناهی‌اند با هر معیاری بزرگ‌اند.

۵ رام‌کردن $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ با ابرپالایه‌ها

مجموعهٔ $\mathbb{R}$ با رابطهٔ ترتیب $\leq$ و اعمال معمول جبری میدان است که هر دو عضو در آن باهم می‌توانند مقایسه شوند. تا چه حد می‌توان مجموعهٔ

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

را به خواصی شبیه به $\mathbb{R}$ مجهز کرد؟ طبیعی‌ترین انتخاب برای جمع و ضرب روی $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ جمع و ضرب مؤلفه‌ای، طبیعی‌ترین انتخاب برای عضو صفر در این فضا عضو $(۰,۰,\ldots) = ۰$، و طبیعی‌ترین انتخاب برای رابطهٔ ترتیب $\leq$ به‌صورت

$$(x_۱, x_۲, \ldots) \leq (y_۱, y_۲, \ldots) \Longleftrightarrow x_n \leq y_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

است. اما این انتخاب‌ها با مشکلاتی همراه‌اند. مثلاً، حاصل‌ضرب دو عضو ناصفر $x_۰ = (۱,۰,۱,۰,\ldots)$ و $y_۰ = (۰,۱,۰,۱,\ldots)$ صفر است. همچنین $x_۰$ و $y_۰$ با رابطه‌ای که در بالا معرفی شد، مقایسه‌پذیر نیستند. می‌خواهیم با تغییراتی در $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ به شرایط دلخواه برسیم.

به جای اینکه توجه خود را به تمام مؤلفه‌ها معطوف کنیم، به مؤلفه‌هایی توجه می‌کنیم که اندیس آن‌ها در زیرمجموعه‌ای ویژه از $\mathbb{N}$ واقع است. به‌بیان‌دقیق‌تر، به جای اینکه

$$x = (x_۱, x_۲, \ldots) = ۰ \iff x_n = ۰ \quad (\, n \in \mathbb{N})$$

تعریف می‌کنیم $x = (x_۱, x_۲, \ldots) = ۰$ هرگاه x روی زیرمجموعه‌های ویژه‌ای از $\mathbb{N}$ صفر باشد. مجموعهٔ همهٔ این زیرمجموعه‌های ویژه را $\mathcal{U}$ می‌نامیم. درحقیقت،

$$x = ۰ \Longleftrightarrow K(x) = \{i : x_i = ۰\} \in \mathcal{U}.$$

اجازه دهید ببینیم، شرایط مورد نظر ما چه ویژگی‌هایی به $\mathcal{U}$ می‌دهد.

۱. می‌خواهیم اگر همهٔ مؤلفه‌های $x = (x_۱, x_۲, \ldots)$ صفر باشد، x برابر صفر باشد. پس $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$.

۲. می‌خواهیم اگر $x = ۰$، آنگاه برای هر y دیگر $xy = ۰$، یعنی $K(xy) \in \mathcal{U}$. اما به‌سادگی می‌توان دید که با تغییر yها، $K(xy)$ها تمام مجموعه‌های شامل $K(x)$ را تولید می‌کنند. بنابراین لازم است که هر مجموعهٔ شامل $K(x)$ در $\mathcal{U}$ باشد.

۳. می‌خواهیم اگر x و y صفر باشند، $x+y$ هم صفر باشد. عناصر $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ را به‌گونه‌ای می‌سازیم که به ترتیب روی $K(x)$ و $K(y)$ صفر و خارج از آن تماماً یک باشند. دراین‌صورت $\tilde{x} = ۰ = \tilde{y}$. اگر $\tilde{x} + \tilde{y} = ۰$، باید $K(\tilde{x} + \tilde{y}) = K(x) \cap K(y)$ در $\mathcal{U}$ واقع باشد.

۴. می‌خواهیم اگر حاصل‌ضرب xy برابر صفر شد، حداقل یکی از x و y صفر باشد. یک مجموعهٔ دلخواه مانند A را درون $\mathbb{N}$ درنظر می‌گیریم. x را به‌گونه‌ای درنظر می‌گیریم که روی

A صفر و روی A^c یک باشد. y را هم روی A یک و روی A^c صفر درنظر می‌گیریم. روشن است که $xy = \circ$. بنابراین اگر بخواهیم حداقل یکی از x و y صفر باشند، باید دست‌کم A و A^c یا $\mathcal{U}$ باشند.

درحقیقت، ویژگی‌های بالا ایجاب می‌کنند که $\mathcal{U}$ یک ابرپالایه باشد. خارج قسمت $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ نسبت به رابطهٔ هم‌ارزی

$$x \cong y \Longleftrightarrow x - y = \circ$$

یک میدان است که آن را با علامت $\mathbb{R}^{\mathcal{U}}$ نمایش می‌دهیم. رابطهٔ

$$x \leq_{\mathcal{U}} y \Longleftrightarrow \exists A \in \mathcal{U}(x_i \leq y_i,\ i \in A)$$

ترتیبی مناسب برای $\mathbb{R}^{\mathcal{U}}$ است زیرا دست‌کم یکی از مجموعه‌های

$$\{i : x_i \leq y_i\}, \quad \{i : y_i \leq x_i\}$$

درون ابرپالایه $\mathcal{U}$ قرار می‌گیرند و این موجب می‌شود که هر دو عضو را بتوان باهم مقایسه کرد. مجموعهٔ $\mathbb{R}^{\mathcal{U}}$ را اعداد حقیقی نااستاندارد می‌نامند. برای اطلاعات بیشتر [۱۲] را ببینید.

۶ ابرپالایه‌ها در منطق

قضیهٔ وُاش جنبهٔ دیگری از قابلیت‌های ابرپالایه‌ها را نشان می‌دهد. منظور از یک تعبیر برای دستگاه منطقی‌ای مانند F عبارت است از مجموعه‌ای مانند $\mathcal{I}$ و تناظرهایی با خواص زیر:

۱. هر نماد ثابت c در دستگاه منطقی به یک عنصر $c^{\mathcal{I}}$ در $\mathcal{I}$ نظیر شود؛

۲. هر نماد تابعی f با n آرایه در دستگاه منطقی به تابع $f^{\mathcal{I}} : \mathcal{I}^n \to \mathcal{I}$ نظیر شود؛

۳. هر رابطهٔ R با m آرایه به زیرمجموعه $R^{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{I}^m$ نظیر شود.

این تعبیر را یک $\mathcal{I}$ـساختار برای دستگاه منطقی نیز می‌نامند.

اکنون می‌توان اصول موضوعه و سایر گزاره‌ها را به زبان $\mathcal{I}$ ترجمه کرد. نظریهٔ T مجموعه‌ای از گزاره‌های F است. اگر در $\mathcal{I}$ـساختار تمام گزاره‌های نظریهٔ T قضیه باشند، $\mathcal{I}$ را یک مدل برای نظریهٔ T می‌نامند. قضیهٔ وُاش، با مسامحه، بیان می‌کند که اگر تمام قضیه‌ها (مرتبهٔ اول) در مدل استاندارد $\mathbb{R}$ را در مجموعهٔ $T(\mathbb{R})$ قرار دهیم، دراین‌صورت $\mathbb{R}^{\mathcal{U}}$ مدلی برای نظریهٔ $T(\mathbb{R})$ است. برای مثال، گزارهٔ

$$\forall x\ \forall z\ \exists y\ (x + y = z)$$

که در مدل $\mathbb{R}$ قضیه است، در مدل $\mathbb{R}^{\mathcal{U}}$ نیز قضیه است. نکتهٔ جالب دربارهٔ قضیهٔ وُاش این است که در گزاره‌های مرتبهٔ اول، سورهای عمومی و وجودی فقط به شیء و نه به مجموعه‌ای از اشیاء اشاره می‌کنند. مثلاً، در مدل $\mathbb{R}$ متغیرهای x، y، و z در گزارهٔ بالا فقط می‌توانند عدد باشند و نه مجموعه. اما وقتی همین گزاره را در مدل $\mathbb{R}^{\mathcal{U}}$ ترجمه کنیم، متغیرهای x، y و z نوعی مجموعه‌اند. جستجو در نقاط $\mathbb{R}^{\mathcal{U}}$، درحقیقت جستجوی زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ و توابع روی $\mathbb{R}$ است. همچنین توابع روی اعداد حقیقی، انتگرال، مشتق روی توابع حقیقی، و احکام مربوط به آن‌ها برای $\mathbb{R}^{\mathcal{U}}$، اعداد حقیقی نااستاندارد، قابل بیان است. برای آشنایی عمیق‌تر با مفاهیم مطرح‌شده و قضیهٔ وُاش به [۴، ۱۳] مراجعه کنید.

مفهوم ابرپالایه در اثبات قضیهٔ فشردگی گودل[۱] نیز کاربرد دارد. این امر از وجود ریشهٔ مفهوم ابرپالایه تا عمق منطق و مدل‌سازی حکایت دارد. حتی در برهان هستی‌شناسی گودل[۲] نیز از مفهوم ابرپالایه استفاده شده است. اجازه دهید مقدمات قضیهٔ فشردگی گودل را مرور کنیم. نظریهٔ T را تحقق‌پذیر گوییم هرگاه مدلی مانند $\mathcal{I}$ وجود داشته باشد که تمام گزاره‌های T در $\mathcal{I}$ قضیه باشند. قضیهٔ فشردگی گودل بیان می‌کند که نظریهٔ T تحقق‌پذیر است اگر و فقط اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی از T تحقق‌پذیر باشد. برهان این قضیه، کاربرد مستقیمی از مفهوم ابرپالایه است. برای آشنایی بیشتر با برهان و مطالب دیگر دربارهٔ قضیهٔ فشردگی گودل به [۲۹] مراجعه کنید.

۷ محال‌بودن ترسیم پیکان

فرض کنید $\mathcal{V}$ مجموعهٔ متناهی از رأی‌دهندگان و $\mathcal{C}$ مجموعه‌ای متناهی از نامزدهای انتخاباتی باشد. هر رأی‌دهنده، نامزدها را به ترتیب خاصی رتبه‌بندی می‌کند. برای نمونه، اگر داشته باشیم $\mathcal{C} = \{A, B, C, D, E\}$، آنگاه $A < B < C < D < E$ یک رتبه‌بندی از آن‌هاست. رأی هر رأی‌دهنده خوش‌ترتیب است و هر رأی‌دهنده در انتخاب خود کاملاً آزاد است؛ یعنی می‌تواند هر رتبه‌بندی خوش‌ترتیب دلخواهی را انتخاب کند. قضیهٔ محال‌بودن ترسیم پیکان[۳] بیان می‌کند که بین بیش از سه نامزد انتخاباتی هیچ سامانهٔ رای‌گیری عادلانه‌ای وجود ندارد که در پنج شرط زیر صدق کند [۲]:

۱. اگر هر رأی‌دهنده، نامزد A را به B ترجیح دهد، سامانهٔ رأی‌گیری A را به B ترجیح دهد؛

۲. اگر ترجیح هر رأی‌دهنده بین A و B تغییر نکند، ترجیح سامانهٔ رای‌گیری بین A و B تغییر

[1] Gödel's compactness theorem [2] Gödel's ontological proof [3] arrow's impossibility theorem

نکند؛

۳. هیچ دیکتاتوری وجود نداشته نباشد، به این معنا که یک نفر نتواند ترجیح سامانهٔ رای‌گیری را عوض کند؛

۴. تمام نامزدها برای سامانهٔ رای‌گیری یکسان باشند؛

۵. خروجی سامانهٔ رای‌گیری یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب باشد.

برای نمونه، یکی از حالاتی که در این سامانهٔ رای‌گیری مشکل ایجاد می‌کند به شرح زیر است. فرض کنید $\mathcal{C} = \{A, B, C, D, E\}$ مجموعهٔ نامزدها و $\mathcal{V} = \{V_۱, V_۲, V_۳, V_۴, V_۵\}$ مجموعه رأی‌دهندگان و رأی‌ها به‌صورت زیر باشد:

$$V_۱ : A > B > C > D > E,$$

$$V_۲ : B > C > D > E > A,$$

$$V_۳ : C > D > E > A > B,$$

$$V_۴ : D > E > A > B > C,$$

$$V_۵ : E > A > B > C > D.$$

چهار رأی‌دهنده، نامزد A را به نامزد B ترجیح داده‌اند، چون دیکتاتوری وجود ندارد، سامانهٔ رای‌گیری A را به B ترجیح می‌دهد. با دلایل مشابه سامانهٔ رای‌گیری B را به C، C را به D، D را به E، و E را به A ترجیح می‌دهد. یعنی $A > B > C > D > E > A$، که متناقض با خوش‌ترتیبی خروجی سامانهٔ رای‌گیری است.

اما اگر تعداد رأی‌دهنده‌ها نامتناهی باشد به کمک ابرپالایه‌ها ثابت می‌شود که قضیهٔ محال‌بودن ترسیم پیکان صادق نیست و رأی‌گیری عادلانه‌ای با شرایط ذکرشده در بالا وجود دارد. برخی از پژوهشگران معتقدند که در حالت نامتناهی یک دیکتاتور پنهان سامانهٔ رای‌گیری را هدایت می‌کند [۲۰].

۸ ابرپالایه و فشرده‌سازی استون‌ـ چخ

فشرده‌سازی استون‌ـ چخ[1] برای فضای توپولوژیک هاسدورف (X, τ) یک فشرده‌سازی به اسم βX از X است به‌طوری‌که هر نگاشت پیوستهٔ $f : X \to K$، که در آن K فشرده است، به‌طوریکتا به

[1] Stone-Čech compactification

نگاشت $\beta f : \beta X \to K$ گسترش یابد. کار با فضای βX و عناصر آن دشوار است، زیرا عناصر آن به‌راحتی قابل‌ساختن و دست‌کاری نیستند. اما توسط ابرپالایه‌ها روی X می‌توان فشرده‌سازی استون–چخ را شفاف‌تر کرد و این‌بار راحت‌تر با اعضای βX کار کرد.

برای‌این‌منظور یک توپولوژی روی $\mathcal{U}(X)$، مجموعهٔ همهٔ ابرپالایه‌ها روی X، تعریف می‌کنیم. خانوادهٔ $\{\rho(A)\}_{A\subseteq X}$، که در آن

$$\rho(A) = \{\mathcal{U} \in \mathcal{U}(X) : A \in \mathcal{U}\},$$

یک پایه برای توپولوژی‌ای مانند $\tau_{\mathcal{U}}$ روی $\mathcal{U}(X)$ است. به‌سادگی می‌توان دید که $(\mathcal{U}(X), \tau_{\mathcal{U}})$ فضای فشرده و هاسدروف است و همچنین فضای توپولوژیک X با $x \in X \mapsto \mathcal{U}_x \in \mathcal{U}(X)$ در $\mathcal{U}(X)$ نشانده می‌شود. به‌ویژه، با این نشاندن X در $\mathcal{U}(X)$ چگال است و این یعنی $\mathcal{U}(X)$ فشرده‌سازی‌ای از X است.

برای بررسی اینکه آیا $\mathcal{U}(X)$ با βX یکسان است، لازم است همگرایی یک ابرپالایه را تعریف کنیم. ابرپالایه $\mathcal{U}$ روی فضای توپولوژیک (X, τ) به x همگراست، هرگاه هر همسایگی x درون ابرپالایه باشد. به‌سادگی می‌توان دید که حد هر ابرپالایه روی یک فضای هاسدورف یکتاست. به‌علاوه، هر ابرپالایه روی یک فضای فشرده همگراست. زیرا، اگر $\mathcal{U}$ یک ابرپالایه روی فضای فشرده (X, τ) باشد که به هیچ نقطه‌ای همگرا نباشد، آنگاه برای هر $x \in X$ همسایگی U_x حول x وجود دارد به‌طوری‌که $U_x \notin \mathcal{U}$. چون $X \subseteq \cup_{x\in X} U_x$ و X فشرده است لذا برای نقاطی مانند x_1، ...، x_n خواهیم داشت $X \subseteq \cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. ازآنجاکه $\mathcal{U}$ ابرپالایه است و U_{x_i}ها در $\mathcal{U}$ قرار ندارند، پس $U_{x_i}^c$ها و درنتیجه اشتراک آن‌ها در $\mathcal{U}$ قرار دارند،

$$\emptyset = X^c = (\cup_{i=1}^{n} U_{x_i})^c = \cap_{i=1}^{n} U_{x_i}^c \in \mathcal{U}$$

که تناقض است.

اکنون نشان می‌دهیم $\mathcal{U}(X) \cong \beta X$. فرض کنیم K فضایی فشرده و $f : X \to K$ تابعی پیوسته باشد. دراین‌صورت $\tilde{f} : \mathcal{U}(X) \to K$ با ضابطهٔ $\tilde{f}(\mathcal{U}) = \lim \mathcal{U}_f$ توسیع پیوستهٔ یکتا از f است، که در آن $\mathcal{U}_f = \{f(A) : A \in \mathcal{U}\}$. بنابراین $\mathcal{U}(X)$ فضایی فشرده و هاسدورف است که در ویژگی جهانی فشرده‌سازی استون–چخ صدق می‌کند. بنابراین $\mathcal{U}(X) \cong \beta X$. برای مطالعه در مورد ساختار βX از دیدگاه ابرپالایه‌ها به [۱۶] مراجعه کنید.

۹ ابرحاصل‌ضرب فضاهای باناخ

یکی از بهترین جلوگاه‌های توانمندی ابرپالایه‌ها در ساختن ابرحاصل‌ضرب[1] فضاهای باناخ است که در آنالیز تابعی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض کنید $(X_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از فضاهای باناخ باشد. فضای برداری

$$l_\infty(I, X_i) = \left\{(x_i)_{i\in I} : x_i \in X_i, ||(x_i)_{i\in I}|| = \sup_{i\in I} ||x_i|| < \infty\right\}$$

فضایی باناخ است. فرض کنیم $\mathcal{U}$ ابرپالایه‌ای روی I باشد. مجموعهٔ

$$N_\mathcal{U} = \{(x_i)_{i\in I} \in l_\infty(I, X_i) : \lim_\mathcal{U} ||x_i|| = \circ\}$$

زیرفضایی بسته از $l_\infty(I, X_i)$ است. ابرحاصل‌ضرب $(X_i)_\mathcal{U}$ از خانوادهٔ $(X_i)_{i\in I}$ از فضاهای باناخ نسبت به ابرپالایه $\mathcal{U}$، فضای خارج‌قسمتی $\frac{l_\infty(I,X_i)}{N_\mathcal{U}}$ با نرم طبیعیِ خارج‌قسمتی است. در حالت خاص که برای هر $i \in I$، $X_i = X$، به ابرحاصل‌ضرب، ابرتوان[2] فضای باناخ X گفته و با نماد $X_\mathcal{U}$ نمایش داده می‌شود. نرم خارج‌قسمتی را در تعریف اخیر با $||(x_i)_\mathcal{U}||$ به جای $||(x_i)_{i\in I} + N_\mathcal{U}||$ نمایش می‌دهیم که به‌صورت $||(x_i)_\mathcal{U}|| = \lim_\mathcal{U} ||x_i||$ محاسبه می‌شود [۸، ۱۵].

می‌توان X را با نگاشت طولپای طبیعی $\mathrm{id} : X \to X_\mathcal{U}$ با ضابطه $\mathrm{id}\,(x) = (x)_\mathcal{U}$ در $X_\mathcal{U}$ نشاند. این نگاشت در شرایطی بسیار خاص پوشاست؛ درواقع، اگر $\mathcal{U}$ یک ابرپالایه آزاد و شماراناکامل باشد، $X = X_\mathcal{U}$ اگر و فقط اگر X از بعد متناهی باشد [۸، ۱۰]. یعنی در ساده‌ترین حالت هم X و $X_\mathcal{U}$ تفاوت زیادی با هم دارند.

فرض کنیم برای هر $i \in I$، $T_i \in B(X_i, Y_i)$ و $\sup_{i\in I} ||T_i|| < \infty$. دراین‌صورت همان‌طورکه انتظار داریم، ابرحاصل‌ضرب $(T_i)_\mathcal{U} : (X_i)_\mathcal{U} \to (Y_i)_\mathcal{U}$ از خانوادهٔ $(T_i)_{i\in I}$ عملگری با ضابطهٔ $(T_i)_\mathcal{U}((x_i)_\mathcal{U}) = (T_i x_i)_\mathcal{U}$ است. ابرحاصل‌ضرب $(T_i)_\mathcal{U}$ خوش‌تعریف است و $||(T_i)_\mathcal{U}|| = \lim_\mathcal{U} ||T_i||$.

عملگر $T : X \to Y$ را $(\varepsilon + ۱)$ـیکریختی گویند اگر T یکریختی باشد و $||T|| \leq ۱ + \varepsilon$ و $||T^{-۱}|| \leq ۱ + \varepsilon$. دراین‌حالت X و Y را $(\varepsilon + ۱)$ـیکریخت گویند. به کمک این تعریف، رفته‌رفته به معنای تازه‌ای از ابرپالایه می‌رسیم که در آنالیز تابعی ظاهر می‌شود.

---
[1] ultraproduct [2] ultrapower

قضیه ۱.۹. فرض کنید $(X_i)_{\in I}$ خانواده‌ای از فضاهای باناخ، M زیرفضایی متناهی‌بعد از $(X_i)_{\mathcal{U}}$، و $\varepsilon > ۰$ دلخواه باشد. دراین‌صورت مجموعهٔ $I_۰ \in \mathcal{U}$ و زیرفضاهای $M_i \subseteq X_i$ به ازای هر $i \in I_۰$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i \in I_۰$، M_i با M، $(۱ + \varepsilon)$-یکریخت است.

اثبات. فرض کنیم $x^۱, \ldots, x^n \in M$ پایه‌ای برای M باشد. برای $k = ۱, \ldots, n$ نمایش $x^k = (x_i^k)_{\mathcal{U}}$ را درنظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $M_i = \mathrm{span}(x_i^k)_{k=۱}^n$. عملگر $T_i : M \to M_i$ را با ضابطه

$$T_i(x^k) = x_i^k \quad (k = ۱, \ldots, n)$$

تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $x = \sum_{k=۱}^n \alpha_k x^k$، دراین‌صورت

$$\lim_{\mathcal{U}} ||T_i x|| = \lim_{\mathcal{U}} ||\sum_{k=۱}^n \alpha_k x_i^k|| = ||\sum_{k=۱}^n \alpha(x_i^k)_{\mathcal{U}}|| = ||x||.$$

بنابراین مجموعهٔ $I_x \in \mathcal{U}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$(۱ + \frac{\varepsilon}{۲})^{-۱} ||x|| \leq ||T_i x|| \leq (۱ + \frac{\varepsilon}{۲}) ||x|| \quad (i \in I_x).$$

چون M متناهی‌بعد است، $\mathrm{Ball}(M)$ فشرده است و لذا برای هر $\delta > ۰$، عدد طبیعی n_δ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $\mathrm{Ball}(M) \subseteq \bigcup_{m=۱}^{n_\delta} B_\delta(e_m)$. اکنون با کوچک انتخاب کردن δ، برای هر $i \in I_۰^\delta$ می‌توان دید کرد که T_i نگاشتی $(۱ + \varepsilon)$ـیکریختی است. □

برای درک معنای این قضیه، فرض کنیم برای هر i داشته باشیم $X_i = X$. دراین‌حالت، قضیهٔ بالا بیان می‌کند که زیرفضاهای متناهی‌بعد $X_{\mathcal{U}}$ بسیار شبیه زیرفضاهای متناهی‌بعد X هستند، هرچند دیدیم X و $X_{\mathcal{U}}$، به‌جز در شرایط خاص، با هم تفاوت‌های فراوانی دارند. به‌بیان‌دقیق‌تر، زیرفضای متناهی‌بعد $M \subseteq X_{\mathcal{U}}$ را می‌توان با $(M_i)_{\mathcal{U}}$ یکی گرفت که در آن به‌ازای هر i، $M_i \subseteq X$ با M $(۱ + \varepsilon_i)$-یکریخت است و $\varepsilon_i \to ۰$.

۱۰ توصیف یک ساختار نامتناهی به وسیلهٔ ساختارهای متناهی آن

قسمت‌هایی از مقدمهٔ این بخش را از [۲۸] نوشتهٔ ترنس تائو[1] وام می‌گیریم، تا به این وسیله مفهوم مورد نظرمان را روشن‌تر بیان کنیم. به بیانی نادقیق، آنالیز ریاضی می‌تواند به دو گونهٔ عمدهٔ آنالیز

[1] Terence Tao

سخت[۱] و آنالیز نرم[۲] تقسیم‌بندی شود. بیان تمایز بین این دو گونه از آنالیز اندکی دشوار است، اما می‌توان به تمایزهای کلیدی آن‌ها اشاره کرد.

آنالیز سخت روی کمیت‌ها یا ویژگی‌های تأثیرگذار مانند تقریب، تعیین کران بالا و پایین، تعیین مرتبهٔ همگرایی، و درجهٔ رشد تمرکز دارد، درحالی‌که آنالیز نرم روی کیفیت‌ها یا ویژگی‌هایی مانند وجود، یکتایی، پیوستگی، مشتق‌پذیری، اندازه‌پذیری، فشردگی، و همبندی. آنالیز سخت روی اشیای متناهی، متناهی‌بعد یا گسسته مانند مجموعه‌های متناهی، گروه‌های متناهیاً تولیدشده، ترکیب متناهی بولی از گوی‌ها و جعبه‌ها، توابع با پیچیدگی متناهی مانند چندجمله‌ای‌ها و توابع با دامنهٔ متناهی متمرکز است، درحالی‌که آنالیز نرم روی اشیای پیوسته، نامتناهی یا نامتناهی‌بعد مانند مجموعه‌ها و توابع اندازه‌پذیر یا گروه‌های موضعاً فشرده متمرکز است. آنالیز سخت تمایل دارد پارامترهای متعددی مانند ε، δ، و N را به‌طور دقیق به‌کار گیرد، درحالی‌که آنالیز نرم روی خواصی مانند پیوستگی، مشتق‌پذیری، و فشردگی متمرکز است، که به‌طور ضمنی توسط مجموعه‌ای از پارامترها به‌طور دقیق تعریف شده‌اند، اما پارامترهایشان در استدلال ظاهر نمی‌شوند.

با وجود تمایزهای سطحی بین این دو گونه از آنالیز، تناظرهای مهمی بین آن‌ها وجود دارد، که ویژگی‌های اساسی اشیای مورد بررسی را برای ما آشکار می‌کند. برای نمونه، اگر یک کران کمّی یکنواخت دربارهٔ ارتباط اشیای متناهی در دست باشد، می‌توان با یک استدلال دقیق یک کران کیفی دربارهٔ ارتباط اشیای نامتناهی بیان کرد. برعکس، اگر یک کران کیفی روی اشیای نامتناهی داشته باشیم، با استفاده از استدلال فشردگی و تناقض[۳] می‌توان یک کران کمّی یکنواخت روی اشیای متناهی به‌دست آورد. یک تناظر دیگر بین آنالیز سخت و آنالیز نرم از اقتباس برهان‌های کیفی آنالیز نرم و ترجمه آن‌ها به برهان‌های کمّی در آنالیز سخت پدید می‌آید، که به استخراج برهان[۴] معروف است. برای مطالعهٔ مبسوط در این زمینه به [۲۸] مراجعه کنید.

قضیه ۱.۱۰. فرض کنید F فضای باناخ و $\mathcal{B}$ خانواده‌ای از فضاهای باناخ باشد. فرض کنید برای هر $\varepsilon > 0$ و هر زیرفضای متناهی‌بعد M از F فضای باناخ E از خانواده $\mathcal{B}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که M با زیرفضایی از E، $(1+\varepsilon)$-یکریخت باشد. دراین‌صورت ابرپالایهٔ $\mathcal{U}$ روی مجموعهٔ اندیس‌گذار I و نگاشتی از I به $\mathcal{U}$ وجود دارد (که هر $i \in I$ را به $E_i \in \mathcal{B}$ نظیر می‌کند) به‌طوری‌که F با زیرمجموعه‌ای از $(E_i)_{\mathcal{U}}$ به‌طور طولپا یکریخت است.

---
[1] hard analysis [2] soft analysis [3] compactness and contradiction arguments [4] proof mining

قضیهٔ ۱.۱۰ جنبهٔ تازه‌ای از ابرپالایه را نمایان می‌کند؛ اینکه چطور از طریق شناخت زیرفضاهای متناهی‌بعد فضای باناخی به توصیفی از کل آن فضا برسیم. حتی فراتر از این، اینکه چطور از ویژگی‌های موضعی فضا یا عنصری به ویژگی‌های سراسری آن پی ببریم؟ چطور با شناخت اشیای متناهی یا با پیچیدگی کمتر به شناخت اشیای نامتناهی یا پیچیده دست پیدا کنیم؟ برای به‌کارگیری ابرپالایه‌ها درک عمیق برهان قضیهٔ ۱.۱۰ ضروری است که برای مشاهدهٔ آن می‌توان به [۱۵] مراجعه کرد.

قضیهٔ شگفت‌انگیز زیر به اصل بازتابی موضعی[1] معروف است. این قضیه بیان می‌کند که ساختار زیرفضاهای متناهی‌بعد X و X^{**} بسیار مشابه است، اگرچه X^{**} غالباً بسیار پیچیده‌تر از X است؛ به‌ویژه چگونگی این شباهت را نیز به زیبایی شرح می‌دهد. اصل بازتابی موضعی دیدگاهی اساسی دربارهٔ شناخت دوگان دوم فضاهای باناخ را در اختیار ما قرار می‌دهد. برای دیدن برهان این قضیه می‌توان به [۲۵] مراجعه کرد.

قضیه ۲.۱۰ (اصل بازتابی موضعی). برای هر زیرفضای متناهی‌بعد $M \subseteq X^{**}$، هر مجموعهٔ متناهی $\{f_1, \ldots, f_n\}$ در X^*، و هر $\varepsilon > 0$ عملگر T از M به‌توی X وجود دارد به‌طوری‌که به‌روی برد خود $(1 + \varepsilon)$-یکریختی است و به‌علاوه

۱. $T|_{M\cap X} = \mathrm{id}_{M\cap X}$؛

۲. $\langle Tu, f_k\rangle = \langle u, f_k\rangle$ برای هر $u \in M$ و $k = 1, \ldots, n$.

یکی از نتایج اصل بازتابی موضعی این است که X^{**} قابل نشاندن در ابرتوانی از X است. ازآنجاکه $X_{\mathcal{U}}$ فضای باناخ ملموس‌تری نسبت به X^{**} است، بررسی زیرفضاها و ویژگی‌های X^{**} ساده‌تر می‌شود و لذا این نتیجه دیدی عمیق و متفاوت از X^{**} را به‌دست می‌دهد و در مطالعهٔ دوگان دوم بسیار کارآمد است.

قضیه ۳.۱۰. [۱۵] برای هر فضای باناخ X ابرپالایه‌ای مثل $\mathcal{U}$ و نشاننده‌ای طولپا مانند J از X^{**} به‌توی $X_{\mathcal{U}}$ وجود دارد به‌طوری‌که تحدید J به X همان نشانندهٔ طبیعی X در $X_{\mathcal{U}}$ است. به‌علاوه، نگاشتی تصویری با نرم ۱ به‌روی $J(X^{**})$ نیز وجود دارد.

قضیهٔ ۳.۱۰ تأییدی دیگر بر این ادعاست که ابرپالایه‌ها می‌توانند ساختارهای نامتناهی، پیچیده، و یا یک ویژگی سراسری را به‌وسیلهٔ ساختارهای متناهی، با پیچیدگی کمتر، و یا با ویژگی‌های موضعی

[1] principal of local reflexivity

توصیف کنند (در قضیهٔ ۳.۱۰ این ساختار نامتناهی یا شیء پیچیده فضای X^{**} است؛ همچنین یک ویژگی سراسری نیز می‌توانید ویژگی‌ای روی X^{**} باشد). به‌عبارت دیگر، ابرپالایه‌ها پلی میان آنالیز سخت و آنالیز نرم هستند. برای دیدن شاهدی دیگر بر این ادعا به [۱۰] رجوع کنید. در آنجا توسط ساختارهای موضعی (متناهی) و به کمک ابرپالایه‌ها یک ساختار نامتناهی و سراسری توصیف شده است.

ذکر چند نمونهٔ دیگر از نتایجی که توسط مفهوم ابرپالایه‌ها حاصل می‌شود، برای درک کارایی این دیدگاه مفید است. فرض کنیم A جبر باناخی باشد. ضرب روی A به دو روش به ضرب‌های $\Box$ و $\Diamond$ روی A^{**} قابل گسترش است، که به‌ترتیب به ضرب‌های اول و دوم آرنز معروف‌اند. ضرب اول و دوم آرنز به‌ترتیب روی مؤلفهٔ اول و مؤلفهٔ دوم w^*ـ‌پیوسته‌اند. جبر A را منظم آرنز گویند هرگاه این دو ضرب با هم برابر باشند [۱، ۵]. فرض کنیم $\mathcal{U}$ ابرپالایه باشد. نگاشت $Q_{\mathcal{U}} : A_{\mathcal{U}} \to A^{**}$ را با ضابطهٔ $Q_{\mathcal{U}}(a_i)_{\mathcal{U}} = w^* - \lim_{\mathcal{U}} a_i$ درنظر می‌گیریم. فرض کنید $\mathcal{U}$ به‌گونه‌ای باشد که عملگر پیوسته $J_{\mathcal{U}} : A^{**} \to A_{\mathcal{U}}$ با ویژگی $Q_{\mathcal{U}} J_{\mathcal{U}} = \mathrm{id}_{A^{**}}$ وجود داشته باشد. بنابراین ضرب دیگری نیز روی A^{**} به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$m \star_{\mathcal{U}} n = Q_{\mathcal{U}}(J_{\mathcal{U}}(m) J_{\mathcal{U}}(n)), \quad (m, n \in A^{**}).$$

بنابر قضیهٔ ۳.۱۰ ابرپالایهٔ $\mathcal{U}$، نگاشت تصویری $J : A^{**} \to A_{\mathcal{U}}$ و $Q : A_{\mathcal{U}} \to A^{**}$ وجود دارد به‌طوری‌که $QJ = \mathrm{id}_{A^{**}}$. ضرب تعریف‌شده توسط قضیهٔ ۳.۱۰ را با $\star$ نمایش می‌دهیم. ضرب $\star$ به‌طور مجزا w^*ـ‌پیوسته است [۱۷] و درحالتی‌که A یک C^*ـ‌جبر باشد، $(A^{**}, \star)$ نیز C^*ـ‌جبر است [۱۸] و به‌علاوه $\Diamond = \Box = \star$ [۱۱]. هنگامی‌که A جبر باناخ منظم آرنز باشد نیز می‌توان ابرپالایه‌ای مانند $\mathcal{U}$ یافت به‌گونه‌ای‌که $\Diamond = \Box = \star_{\mathcal{U}}$ [۶]. با فرآیندی مشابه و به کمک قضیهٔ ۳.۱۰ می‌توان دوگان دوم یک JB^*ـ‌دستگاه سه‌تایی مانند $(A, \{\cdot, \cdot, \cdot\})$ را به‌وسیلهٔ

$$\{m, n, p\} = Q(\{J(m), J(n), J(p)\}), \quad (m, n, p \in A^{**})$$

به JB^*ـ‌دستگاه سه‌تایی $(A^{**}, \{\cdot, \cdot, \cdot\})$ بدل کرد [۷، ۲۱].

۱۱ ریاضیات از دیدگاه ابرپالایه‌ها

فرض کنیم c فضای باناخ همهٔ دنباله‌های همگرا با نرم $\|(a_n)\| = \sup_n |a_n|$ باشد و تابعک $f : c \to \mathbb{C}$ روی c هر دنباله را به حد آن ببرد و $\mathcal{U}$ ابرپالایه‌ای دلخواه روی $\mathbb{N}$ باشد. تابعک

$$f_{\mathcal{U}} : \ell^\infty \to \mathbb{C}, \quad f_{\mathcal{U}}(x_i)_{i\in\mathbb{N}} = \lim_{\mathcal{U}} f(x_i)$$

را درنظر می‌گیریم. این مطلب که پالایهٔ فرشه درون هر ابرپالایه آزاد روی $\mathbb{N}$ قرار دارد، نتیجه می‌دهد که $f_{\mathcal{U}}$ توسیعی پیوسته از f است و لذا حد ابرپالایه توسیعی پیوسته از حد معمولی است.

این دیدگاه، موضوع دیگری را هم به ذهن می‌آورد. آیا ارتباطی بین وجود ابرپالایه‌ها (که از اصل انتخاب نتیجه می‌شود) و قضیهٔ هان‌ـباناخ وجود دارد؟ اصل انتخاب، قضیهٔ هان‌ـباناخ را نتیجه می‌دهد، اما قضیهٔ هان‌ـباناخ، اصل انتخاب را نتیجه نمی‌دهد. به‌عبارت‌دیگر، قضیهٔ هان‌ـباناخ ضعیف‌تر از اصل انتخاب است. شرایطی مشابه برای گزارهٔ «هر پالایه درون یک ابرپالایه قرار می‌گیرد»، وجود دارد، به این معنی که این گزاره اصل انتخاب را نتیجه نمی‌دهد، اما اصل انتخاب آن را نتیجه می‌دهد. آیا می‌توان بدون درنظر گرفتن اصل انتخاب، ارتباطی بین قضیهٔ هان‌ـباناخ و گزارهٔ «هر پالایه درون یک ابرپالایه قرار می‌گیرد» یافت؟

اجازه دهید برخی از گزاره‌های مهم را که از اصل انتخاب نتیجه می‌شوند یادآوری کنیم. اصل انتخاب را با AC، قضیهٔ کرین‌ـمیلمن[۱] را با KM، این گزاره را که هر حالت محض[۲] روی C^*ـ زیرجبر B از A قابل گسترش به A است با PSE، قضیهٔ هان‌ـباناخ را با HB، پارادوکس باناخ‌ـ تارسکی[۳] را با BTP، این گزاره را که هر پالایه مشمول در یک ابرپالایه است با UT، این گزاره را که هر ایده‌آل در جبر بولی مشمول در یک ایده‌آل اول است با BPI، این گزاره را که گوی واحد دوگان هر فضای باناخ دارای حداقل یک نقطه فرین است با EE، قضیهٔ تیخونوف را با TC و قضیهٔ باناخ‌ـآلاغلو[۴] را با BA نشان می‌دهیم.

گزارهٔ UT قضیهٔ هان‌ـباناخ را نتیجه می‌دهد. زیرا فرض کنیم $Y \subseteq X$ زیرفضای برداری از فضای نرمدار X و $f : Y \to \mathbb{C}$ تابعکی با نرم ۱ باشد. مجموعهٔ

$$I = \{M : \text{زیرفضایی متناهی‌بعد است } M \subseteq X\}$$

[1] Krein-Milman theorem [2] pure state [3] Banach-Tarski theorem [4] Banach-Alaoglu theorem

مجهز به رابطهٔ ترتیب

$$M_1 \leq M_2 \iff M_1 \subseteq M_2,$$

را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم $\mathcal{F}$ پالایهٔ فرشه روی مجموعهٔ جهت‌دار $(I, \geq)$ باشد. گزارهٔ UT و قضیهٔ ۱.۱۰ وجود ابرپالایه‌ای مثل $\mathcal{U}$ شامل $\mathcal{F}$ را تضمین می‌کنند به‌طوری‌که X توسط عملگر طولپای $\theta : X \hookrightarrow (M)_{\mathcal{U}}$ قابل نشاندن در $(M)_{\mathcal{U}}$ است. مراحل ابتدایی قضیهٔ هان‌ـباناخ که اصل انتخاب در آن دخیل نیست، نتیجه می‌دهد که برای هر $M \in I$، گسترش $f_M : M \to \mathbb{C}$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $f_M|_{M\cap Y} = f|_{M\cap Y}$ و $\|f_M\| = \|f\|$. اینک کافی است نگاشت $X \xrightarrow{\theta} (M)_{\mathcal{U}} \xrightarrow{(f_M)_{\mathcal{U}}} \mathbb{C}$ را درنظر بگیریم. ویژگی‌های نگاشت θ که از طریق قضیهٔ ۱.۱۰ ساخته می‌شود، ایجاب می‌کند که $(f_M)_{\mathcal{U}} \circ \theta$ توسیع مطلوب f به X باشد.

به‌همین‌ترتیب می‌توان قضیهٔ هان‌ـباناخ را برای یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب با استفاده از UT اثبات کرد [۲۳].

مشابه با آنچه که در اثبات قضیهٔ تیخونوف انجام دادیم، می‌توان نشان داد که گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

$$\mathrm{UT} \iff \mathrm{BPI} \iff \mathrm{BA} \iff \mathrm{TC}$$

اصل انتخاب با EE هم‌ارز است [۲]. به‌ویژه، گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

$$\mathrm{AC} \iff \mathrm{UT} + \mathrm{KM} \iff \mathrm{HB} + \mathrm{KM} \iff \mathrm{EE}$$

قضیهٔ هان‌ـباناخ با برقراری UT یا KM اثبات می‌شود، اما قضیهٔ هان‌ـباناخ به‌تنهایی هیچ‌یک از دیگر احکام را نتیجه نمی‌دهد. در واقع، در [۲۶] مدلی ساخته شده است که در آن قضیهٔ هان‌ـباناخ برقرار است، درحالی‌که UT و KM برقرار نیستند. نکتهٔ جالب این است که اگر اصل انتخاب را تا حد قضیهٔ هان‌ـباناخ ضعیف کنیم، باز هم پارادوکس باناخ‌ـتارسکی قابل اثبات است. اطلاعات اخیر را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد [۱۴، ۱۹، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۶، ۲۷]:

$$\mathrm{AC} \Longrightarrow \mathrm{UT}, \mathrm{BIP}, \mathrm{BA}, \mathrm{TC}, \mathrm{KM} \Longrightarrow \mathrm{HB} \Longrightarrow \mathrm{BTP}$$

اما تضعیف اصل انتخاب تبعات زیادی دارد، برای نمونه، اگر به‌جای AC، UT را درنظر بگیریم، نمی‌توان نشان داد که هر مجموعهٔ نامتناهی شامل یک زیرمجموعهٔ شمارا است، یا اینکه،

اگر X و Y دارای عدد اصلی‌ای اکیداً کمتر از $\mathrm{card}(\mathbb{R})$ باشند، اجتماعشان هم این‌گونه است [۱۹].

گزارهٔ PSE گزارهٔ UT را نتیجه می‌دهد. زیرا فرض کنیم X یک C^*ـجبر جابه‌جایی یکدار و $\mathcal{F}$ یک پالایه روی مجموعهٔ I باشد. $X_{\mathcal{F}}$ را خارج‌قسمت $\ell^\infty(I,X)$ بر ایده‌آل بستهٔ

$$N_{\mathcal{F}} = \{(x_i)_{i\in I} : \lim_{\mathcal{F}} \|x_i\| = ۰\}$$

درنظر می‌گیریم. بنابراین $X_{\mathcal{F}}$ نیز یک C^*ـجبر است. فرض کنیم f تابعکی ضربی و ناصفر باشد. تعریف می‌کنیم

$$X_{\mathcal{F}}^f = \{(x_i)_{\mathcal{F}} : \text{وجود داشته باشد } \lim_{\mathcal{F}} f(x_i)\}$$
$$f_{\mathcal{F}} : X_{\mathcal{F}}^f \to \mathbb{C}, \quad (f)_{\mathcal{F}}(x_i)_{\mathcal{F}} = \lim_{\mathcal{F}} f(x_i)$$

دراین‌صورت $f_{\mathcal{F}}$ روی $*$ـزیرجبر $X_{\mathcal{F}}^f$ تابعک ضربیِ کراندار است و بنابراین توسیع پیوستهٔ $f_{\mathcal{F}} : \overline{X_{\mathcal{F}}^f} \to \mathbb{C}$ وجود دارد. این توسیع درواقع تابعکی ضربی روی یک C^*ـجبر است و بنابراین می‌توانیم آن را به تابعک ضربی $h : X_{\mathcal{F}} \to \mathbb{C}$ گسترش دهیم. $\mathcal{U}$ را به‌صورت

$$A \subseteq I,\ A \in \mathcal{U} \iff h(۱_A) = ۱$$

تعریف می‌کنیم که در آن ۱_A عضوی از $X_{\mathcal{F}}$ است که روی اندیس‌های $i \in A$ برابر ۱ و روی اندیس‌های $i \in A^c$ برابر ۰ است. توجه کنید که $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$، زیرا هرگاه $A \in \mathcal{F}$ دراین‌صورت

$$h(۱_A) = f_{\mathcal{F}}(۱_A) = ۱.$$

همچنین چون برای هر A، ۱_A یک عضور خودتوان و h ضربی است، $h(۱_A)$ یکی از مقادیر صفر و یک را اختیار می‌کند. لذا برای هر $A \subseteq I$ یکی از مجموعه‌های A یا A^c در $\mathcal{U}$ واقع است. پالایه بودن $\mathcal{U}$ نیز به‌راحتی نتیجه می‌شود. بنابراین $\mathcal{U}$ یک ابرپالایه شامل $\mathcal{F}$ است.

به‌عنوان نتایجی از مشاهدات بالا می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. $\mathrm{HB} \Longrightarrow \mathrm{UT} \Longrightarrow \mathrm{PSE}$.

۲. $\mathrm{UT} \Longrightarrow \mathrm{PSE} \Longrightarrow \mathrm{KM}+\mathrm{HB}$.

۳. $\mathrm{AC} \iff \mathrm{UT}+\mathrm{KM} \iff \mathrm{PSE}+\mathrm{KM} \iff \mathrm{KM}+\mathrm{HB}$.

به‌علاوه، $\mathrm{KM} \Longrightarrow \mathrm{UT}$ و $\mathrm{UT} \Longrightarrow \mathrm{KM}$ هیچ‌کدام نمی‌توانند صادق باشند، زیرا اگر، مثلاً، $\mathrm{KM} \Longrightarrow \mathrm{UT}$ برقرار باشد، آنگاه $\mathrm{AC} \Longrightarrow \mathrm{UT}$ نیز درست است، اما UT اکیداً ضعیف‌تر از AC است [۱۴].

با تغییر اندکی در تعریف ابرپالایه می‌توان به جستجوی مجموعه‌های بسیار بزرگ پرداخت؛ به این ترتیب که به جای این شرط که اشتراک متناهی از اعضای $\mathcal{U}$ دوباره در $\mathcal{U}$ باشد، شرط کنیم اشتراک تعداد شمارا از اعضای $\mathcal{U}$ در $\mathcal{U}$ باشند. این ویژگی را به‌اختصار CIP می‌نامند. اگر چنین ابرپالایه‌ای روی X با عدد اصلی κ وجود داشته باشد، اشتراک هر $\lambda < \kappa$ مجموعه در $\mathcal{U}$ دوباره در $\mathcal{U}$ قرار می‌گیرد. جستجوی مجموعه‌های بسیار بزرگ، بسیار دشوار به‌نظر می‌رسد. وجود ابرپالایه‌ای با ویژگی CIP در دستگاه اصول موضوعهٔ ZFC قابل اثبات نیست، حتی سازگاری ZFC با وجود یک ابرپالایه با ویژگی CIP نیز نامشخص است.

مراجع

[1] Arens, R., The adjoint of a bilinear operation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 839–848.

[2] Bell, J. L., Fremlin, D. H., A geometric form of the axiom of choice, *Fund. Math.*, **77** (1972), 167–170.

[3] Cartan, H., Filtres et ultrafiltres, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **205** (1937), 777–779.

[4] Chang, C. C., Keisler, H. J., *Model Theory*, 3rd. ed., North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990 .

[5] Dales, H. G., *Banach Algebras and Automatic Continuity*, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[6] Daws, M., Ultrapowers of Banach algebras and modules, *Glasg. Math. J.*, **50** (2008), 539–555.

[7] Dineen, S., Complete holomorphic vector fields on the second dual of a Banach space, *Math. Scand.*, **59** (1986), 131–142.

[8] Faal, R., The Second Dual of the Algebra of Bounded Operators and Tensor Products, Master‘s thesis, Ferdowsi University of Mashhad, 2013.

[9] Faal, R., Ebrahimi Vishki, H. R., More on the Arens regularity of $B(X)$, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **94** (2016), 296–303.

[10] Faal, R., Ebrahimi Vishki, H. R., Dean’s identity and the principal of local reflexivity, (preprint).

[11] Godefroy, G., Iochum, B., Arens-regularity of Banach algebras and the geometry of Banach spaces *J. Funct. Anal.*, **80** (1988), 47–59.

[12] Goldblatt, R., *Lectures on the Hyperreals; an Introduction to Nonstandard Analysis*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, vol.188, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[13] Hamilton, A. G., *Logic for Mathematicians*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[14] Harlpern,J. D., Levy, A., The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice, axiomatic set theory part 1, *Proc. Symp. Pure Math.*, **13** (1971), 83–134.

[15] Heinrich, S., Ultraproducts in Banach space theory, *J. Reine Angew. Math.*, **313** (1980). 72–104.

[16] Hindman, N., Strauss, D., *Algebra in the Stone-C□ech Compactification- Theory and Applications*, Walter de Gruyter, Berlin, 2012.

[17] Iochum, B., Loupias, G., Remarks on the bidual of Banach algebra (the C* case), *Annales scientifiques de l’Université de Clermont-Ferrand, série Mathématiques*, **27** (1991), 107-118.

[18] Iochum, B., Loupias, G., Arens regularity and local reflexivity principle for Banach algebras, *Math. Ann.*, **284** (1989), 23–40.

[19] Jech, T. J., *The Axiom of Choice*, Dover Books on Mathematics, Dover, New York, 2008.

[20] Kirman, A., Sondermann, D., Arrow's theorem, many agents, and invisible dictators, *J. Econ. Theory*, **5** (1972), 267–277.

[21] Khosravi, A. A., Ebrahimi Vishki, H. R., Peralta, M., Aron-Berner extensions of triple maps with applications to the bidual of Jordan Banach triple system, available at `arxiv: 1901.01822v1`.

[22] Łoś, J., Ryll-Nardzewski, C., On the application of Tychonoff's theorem in mathematical proofs, *Studia Math.*, **38** (1951) 233–237.

[23] Luxemburg, W. A. J., Two applications of the method of construction by ultrapowers to analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 416–419.

[24] Luxemburg, W. A. J., Reduced powers of the real number system and equivalents of the Hahn-Banach extension theorem, in *Appl. Model Theory Algebra, Anal., Probab., Proc. Int. Sympos. Calif. Inst. Technol.*, 1969, 123–137.

[25] Martínez-Abejón, A., An elementary proof of the principle of local reflexivity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127** (1999), 1397–1398.

[26] Pincus, D., Independence of the prime ideal theorem from the Hahn Banach theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78** (1972), 766–770.

[27] Pincus, D., The strength of the Hahn-Banach theorem, Lecture Notes in Mathematics, vol. 369, Springer-Verlag, Berlin, 1974, 203–248.

[28] Tao, T., *Hilbert's Fifth Problem and Related Topics*, American Mathematical Society, Providence RI, 2014.

[29] Vaught, L. R., Alfred Tarski's work in model theory *J. Symbolic Logic*, **51** (1986), 869–882.

[30] Wang, H., *A logical Journey: From Gödel to Philosophy*, Bradford Book, Massachusetts, 1977.

رامین فعال: دانش‌آموختهٔ دکترای ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

رایانامه: `faal.ramin@yahoo.com`

حمیدرضا ابراهیمی ویشکی: دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی محض

رایانامه: `vishki@um.ac.ir`

Farhang va Andishe-ye Riyazi
Volume 41, Number 70, Spring/Summer 2022, Pages 75–98
doi: 10.30504/mct.2022.1038.1734

Ultrafilters in Mathematics: An Overview

R. Faal[1], H. R. Ebrahimi Vishki[2]

[1]Ph.D. in pure mathematics from Ferdowsi University of Mashhad, Iran
[2]Pure Mathematics Department, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

Abstract. Ultrafilter appears as an utmost applicable concept in numerous branches of mathematics including logic, algebra, topology, nonstandard analysis, and functional analysis. In this article, regarding the properties and applications of ultrafilters, we intend to identify the structure of this concept specially in functional analysis. To this end, ultrafilters are investigated in terms of set theory, measure theory, Stone-Cech compactification, nonstandard analysis and functional analysis which enable us to describe this concept from various perspectives.

Keywords: ultrafilter, principle of local reflexivity, ultraproduct of Banach spaces, the Łoś theorem, second dual
Article history: Recieved 29 January 2019; Accepted 24 July 2019

[1]faal.ramin@yahoo.com
[2]vishki@um.ac.ir

ISSN 1022-6443/