دفترچه‌ی مقالات چهارمین کنفرانس ملی اطلاعات و محاسبات کوانتومی

---

۱۹ و ۲۰ مهر ماه ۱۴۰۲

برگزارکنندگان

حامیان کنفرانس

تهاتر تیزی اندازه‌گیری و اختلال

صابریان، نیره[1]؛ اخترشناس، سید جواد[1]؛ شاه‌بیگی، فرشته[2]

[1] گروه فیزیک دانشگاه فردوسی مشهد، میدان آزادی، مشهد.

[2] دانشکده فیزیک، نجوم و علوم کامپیوتری کاربردی، دانشگاه یاگیلونین، کراکوف، لهستان

چکیده

کسب اطلاعات یک سیستم کوانتومی با استفاده از اندازه‌گیری، حالت آن را مختل می‌کند. منحصر به فرد نبودن حالت‌های پس از اندازه‌گیری و وابستگی آن به روش اندازه‌گیری، معمای اختلال-اطلاعات را پیچیده‌تر نیز می‌کند. بنابراین دو سوال مطرح می‌شود؛ یک اینکه اختلال کمینه ایجادشده توسط یک اندازه‌گیری چقدر است؟ و دوم اینکه با درنظر گرفتن یک اختلال مشخص، در بهترین شرایط ممکن، اندازه‌گیری چه مقدار اطلاعات می‌دهد؟ در این مقاله، رهیافت‌های متنوعی را برای بررسی این پرسش‌ها پیشنهاد می‌دهیم و پاسخ‌های صریحی برای مجموعه اندازه‌گیری‌های کیوبیتی دوتایی متوازن و فضاهای حالت پساندازه‌گیری متناظر با اعمال کانال‌های پائولی به‌دست می‌آوریم. به‌طور خاص نشان می‌دهیم که روابط تبادلی متفاوتی بین تیزی این اندازه‌گیری و منابع کوانتومی حفظ‌شده در حالت‌های پساندازه‌گیری، پس از به‌کارگیری روش اندازه‌گیری بهینه، برحسب همدوسی و هم‌بستگی‌های شبه ناهم‌خوانی بر اثر اعمال اندازه‌گیری به‌صورت محلی نیز داریم.

واژه های کلیدی: ***اندازه‌گیری‌های کیوبیتی دوتایی متوازن، کانال‌های پائولی، تیزی، کوانتومی بودن کانال، عدم قطعیت کوانتومی محلی.***

Measurement sharpness and disturbance trade-off

Saberian, Nayere[1]; Akhtarshenas, Seyed Javad [1]; Shahbeigi, Fereshte [2]

[1] Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
[2] Faculty of Physics, Astronomy and Applied Computer Science, Jagiellonian University, 30-348 Krakow, Poland

Abstract

Obtaining information from a quantum system through measurement typically disrupts its state. The post-measurement states for a given measurement, however, are not unique and highly rely on the chosen measurement strategy, complicating the puzzle of information-disturbance. Two distinct questions are then in order. Firstly, what is the minimum disturbance a measurement may induce? Secondly, when a fixed disturbance occurs, how informative is the possible measurement in the best-case scenario? Here, we propose various approaches to tackle these questions and provide explicit solutions for the set of unbiased binary qubit measurements and post-measurement state spaces that are equivalent to the image of a Pauli channel. In particular, we show there are different trade-off relations between the sharpness of this measurement and quantum resources preserved in the post-measurement states, employing the optimal measuring strategy, in terms of coherence and discord-like correlation once the measurement is applied locally.

***Keywords**: Unbiased Binary Qubit POVM, Pauli Channel, Sharpness, Channel quantumness, Local Quantum Uncertainty (LQU).*

مقدمه

یکی از نتایج مهم مکانیک کوانتومی قضیه "عدم کسب اطلاعات، بدون ایجاد اختلال" است، که بیان می‌کند به‌دست آوردن اطلاعات از یک سیستم کوانتومی، حتما منجر به ایجاد اختلال دراین سیستم می‌شود. پژوهش‌های بسیاری درباره مبادله این دو مفهوم انجام شده است مانند [2-8].

کسب اطلاعات، نیازمند اندازه‌گیری روی سیستم است. برای اندازه‌گیری‌های کوانتومی، حالت‌های پس از اندازه‌گیری، وابسته به انتخاب روش اندازه‌گیری هستند و این منحصربه‌فرد نبودن حالت‌های پسااندازه‌گیری، بر دشواری بررسی اختلال‌های ایجاد شده توسط اندازه‌گیری روی فضای حالت‌ها می‌افزاید. تعدادی از مقالات[9-12]، برای بررسی مسئله یکتا نبودن حالت پسااندازه‌گیری، مفهوم مهم سازگاری اندازه‌گیری-کانال را پیشنهاد داده‌اند. به‌طورکلی، استفاده از هر روشی برای اعمال یک اندازه‌گیری کوانتومی M، منجر به اختلال‌های خاصی روی فضای حالت‌ها می‌شود که معادل اعمال یک کانال کوانتومی E_M روی این حالت‌ها است. بدین‌ترتیب، چنین کانالی به‌عنوان کانال سازگار با اندازه‌گیری موردنظر، درنظر گرفته می‌شود.

در طرف مقابل، هر کانال کوانتومی E، تجزیه‌های مختلفی برحسب عملگرهای کاملا مثبت و ناافزاینده رد - Φ_i - دارد؛ نمایش‌های مختلف کراوس، مثالی از این مفهوم است. هریک از این عملیات، منجر به مجموعه‌ای از حالت‌های خروجی ممکن با احتمال‌های متناظر می‌شود و می‌توان این احتمال‌ها را به یک اندازه‌گیری کوانتومی، M_E، اختصاص داد که به معنای سازگار بودن این اندازه‌گیری با کانال کوانتومی E است. از آن‌جا که تجزیه‌های مختلف می‌تواند منجر به اندازه‌گیری‌های متفاوتی شود، مجموعه تمامی اندازه‌گیری‌های سازگار با کانال E، $D_E=\{M_E\}$، نشان می‌دهد که به ازای یک اختلال مشخص روی حالت‌ها، کدام اندازه‌گیری‌ها می‌توانند اعمال شوند و درنتیجه چه مقدار اطلاعات استخراج می‌شود.

با این‌که تاکنون مطالعات متفاوتی درباره اختلال پسااندازه‌گیری انجام شده است، نتیجه‌ای کمّی برای بیان وجود چنین رابطه‌ای بین تیزی و اختلال وجود ندارد.

در این مقاله، با استفاده از مفهوم سازگاری اندازه‌گیری-کانال و به‌کاربردن آن در مجموعه اندازه‌گیری‌های کیوبیتی دوتایی متوازن و کانال‌های پائولی به بررسی این پرسش می‌پردازیم. به‌این‌منظور، نشان می‌دهیم که برای مجموعه اندازه‌گیری‌ها و کانال‌های ذکرشده در بالا تبادل‌هایی بین میزان تیزی اندازه‌گیری و ویژگی‌های کوانتومی حالت‌های پسااندازه‌گیری وجود دارند. این ویژگی‌ها به دو روش مختلف در نظر گرفته می‌شوند: اول، همدوسی آن‌ها و دوم، هم‌بستگی‌های شبه ناهم‌خوانی آن‌ها.

اندازه‌گیری کوانتومی

اندازه‌گیری کوانتومی $M=\{m_i\}_{i=0}^{N-1}$ با N خروجی، مجموعه عملگرهای مثبت نیمه‌معین دارای شرط کامل بودن است. اگر اندازه‌گیری در شرط تعامد - $m_i m_j=\delta_{ij} m_i$ به ازای هر i و j - صدق کند به آن اندازه‌گیری برافکنشی گویند [13].

در این مقاله با اندازه‌گیری‌های کیوبیتی دوتایی متوازن - $Tr[m_i]=1$- مواجه می‌شویم که با $M_{s,\hat{n}}=\{m_\pm\}$ نشان داده می‌شوند به‌طوری‌که $m_\pm=\frac{1}{2}(I+s\hat{n}.\sigma)$، که در آن $s\in[0,1]$ میزان تیزبودن و $\hat{n}\in\mathbb{R}^3$ برداری یکه است که جهت اندازه‌گیری را تعیین می‌کند. تیزبودن یک اندازه‌گیری به معنای میزان نزدیکی آن به یک اندازه‌گیری برافکنشی است. توجه به این نکته لازم است که در حالت کلی میزان تیز بودن این نوع اندازه‌گیری توسط s یا تابع یکنوایی از آن مثل s^2 سنجیده می‌شود [14-16].

کانال کوانتومی

کانال کوانتومی نگاشتی کاملا مثبت و حفظ‌کننده رد است که روی حالت‌های کوانتومی اثر می‌کند. کانال پائولی $E_{\vec{p}}(\rho)=\sum_{j=0}^{3} p_j \sigma_j \rho \sigma_j$ مثال خاصی از کانال‌های کیوبیتی است. در این تعریف σ_0 ماتریس همانی است و σ_j برای $j\in\{1,2,3\}$ یک ماتریس پائولی است. بردار $\vec{p}\in\mathbb{R}^4$ یک بردار احتمال است و بنابراین مجموعه کانال‌های پائولی می‌تواند توسط یک چهاروجهی منظم در فضای $\mathbb{R}^3$ نمایش داده شود [17].

دو ویژگی متفاوت کانال کوانتومی را در ادامه توضیح می‌دهیم.

کوانتومی بودن کانال‌های کوانتومی: میزان کوانتومی بودن یک کانال، از کمینه کردن میانگین همدوسی کوانتومی فضای حالت پس از اعمال کانال، روی همه پایه‌های متعامد بهنجار این فضا حاصل می‌شود. در حقیقت این کمیت، میزان همدوسی حفظ‌شده در حالت‌ها پس از اعمال کانال را می‌سنجد، که به‌ازاء کانال‌های کلاسیکی-کوانتومی [18] که به‌طور کامل همدوسی کوانتومی همه حالت‌ها را ازبین می‌برد، صفر است. کوانتومی بودن کانال‌های پائولی از رابطه زیر حاصل می‌شود [19]:

$$Q(E_{\vec{p}}) = (p_0 - p_1)^2 + (p_2 - p_3)^2; \quad p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq p_3.$$

عدم قطعیت کوانتومی محلی (LQU) برای حالت چوی-جمیولکوفسکی: هم‌بستگی کوانتومی حالت چوی-جمیولکوفسکی [21,20] متناظر با یک کانال کوانتومی، نیز ویژگی‌های کوانتومی آن کانال را بیان می‌کند. با استفاده از رابطه بسته سنجه LQU در مقاله [22] و محاسبه آن برای حالت چوی-جمیولکوفسکی متناظر با کانال پائولی - $\rho^{\vec{p}}$ - خواهیم داشت:

$$L(\rho^{\vec{p}}) = 1 - P_{\max}; \quad P_{\max} = \max\{P_1, P_2, P_3\},$$

که در آن $P_i = 2(\sqrt{p_0 p_i} + \sqrt{p_j p_k})$ به‌طوری‌که i، j و k انتخاب‌های غیریکسانی از 1، 2 و 3 هستند. $L(\rho^{\vec{p}})$ نشان‌دهنده مقدار هم‌بستگی شبه ناهم‌خوانی حفظ‌شده در یک حالت بیشینه درهم‌تنیده پس از تحول توسط یک کانال پائولی است. این کمیت نیز برای کانال‌های کلاسیکی-کوانتومی، صفر می‌شود.

سازگاری اندازه‌گیری-کانال

کانال E و اندازه‌گیری M سازگار هستند اگر عملگرهای کاملا مثبت و ناافزاینده رد - Φ_i - وجود داشته باشند به‌طوری‌که به ازاء هر i و هر حالت ورودی ρ داشته باشیم $E(\rho) = \sum \Phi_i(\rho)$ و $Tr[m_i \rho] = Tr[\Phi_i(\rho)]$. یکی از نتایج مرجع [20] این است که $M_{s,\hat{n}}$ و $E_{\vec{p}}$ سازگار هستند اگر وتنها اگر در نامساوی $\frac{s^2 n_1^2}{P_1^2} + \frac{s^2 n_2^2}{P_2^2} + \frac{s^2 n_3^2}{P_3^2} \leq 1$ صدق کنند. $P_i = 0$، منجر به حذف کسر متناظر می‌شود. از این نامساوی نتیجه می‌شود که به ازاء همه کانال‌های سازگار با این اندازه‌گیری، $s \leq P_{\max} \leq 1$ که هر دو کران محکم است؛ کانال مربوط به اشباع کران پایین با مشخصات زیر است:

$$p_0 = 1 - 3p_1, \quad p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{8}(1 + s - \sqrt{1 + 2s - 3s^2}).$$

نتایج

در این بخش به بررسی میزان حفظ کردن منابع کوانتومی فضای حالت -همدوسی و هم‌بستگی‌های شبه ناهم‌خوانی- توسط اندازه‌گیری $M_{s,\hat{n}}$ می‌پردازیم.

یک رهیافت برای تعریف بهترین روش اندازه‌گیری، حفظ بیشترین منابع کوانتومی -در این‌جا همدوسی و هم‌بستگی کوانتومی در زمان اعمال محلی اندازه‌گیری- در فضای حالت‌ها است.

این کمیت‌ها به ترتیب با روابط زیر تعریف می‌شود:

$$Q_M := \max_{C_M} Q(E_M), \quad L_M := \max_{C_M} L(\rho_{E_M}),$$

به‌طوری‌که $Q(E_M)$ کوانتومی بودن کانال E_M سازگار با M است و $L(\rho_{E_M})$، سنجه LQU برای حالت چوی-جمیولکوفسکی کانال سازگار E_M و C_M مجموعه تمام کانال‌های سازگاز با M. این کمیت‌ها را به‌ترتیب *کوانتومی بودن اندازه‌گیری* و LQU *اندازه‌گیری* می‌نامیم. قضیه زیر محدود شدن این مقدار توسط تیزی را نشان می‌دهد.

قضیه 1: *اندازه‌گیری کیوبیتی دوتایی متوازن $M_{s,\hat{n}}$ را در نظر بگیرید. با محدود شدن به مدل‌های پسااندازه‌گیری هم‌ارز با اعمال کانال‌های پائولی، کوانتومی بودن اندازه‌گیری و LQU اندازه‌گیری در روابط زیر صدق می‌کنند:*

$$Q_{M_{s,\hat{n}}} \leq 1 - s^2, \quad L_{M_{s,\hat{n}}} = 1 - s.$$

نامساوی موجود در این روابط، برای اندازه‌گیری‌های در راستای محورهای اصلی اشباع می‌شود.

نتیجه مهم این قضیه این است که اگر یک اندازه‌گیری کاملا تیز باشد، یعنی $s = 1$، آن‌گاه مستقل از رهیافت اندازه‌گیری، فضای حالت‌های پسااندازه‌گیری کاملا کلاسیکی می‌شوند. یعنی مجموعه کانال‌های سازگار، فقط شامل کانال‌های کلاسیکی-کوانتومی است.

اکنون به طرف دیگر مسئله می‌پردازیم؛ با داشتن مجموعه اندازه‌گیری‌های سازگار با یک کانال کوانتومی مفروض، در پی یافتن بیشینه تیزی موجود در این مجموعه سازگار است. در ادامه

روابط تبادلی بیان می‌شود که نشان می‌دهد هرچه اختلال در فضای حالت‌های پساندازه‌گیری بیشتر باشد، اندازه‌گیری موردنظر تیزتر است و اطلاعات بیشتری می‌دهد. فرض کنیم $S(M)$ تیزی اندازه‌گیری M را می‌سنجد، مفهوم *تیزی کانال* را به‌صورت تیزی بیشینه s متناظر با M در مجموعه تمام Mهای سازگار با E – D_E – تعریف می‌کنیم؛ $S_E := \max_{D_E} S(M)$.

برای اندازه‌گیری‌های کیوبیتی دوتایی متوازن، ساده‌ترین انتخاب سنجه تیزی $S(M_{s,\hat{n}})=s$ است. برای کانال پائولی $E_{\vec{p}}$، تیزی کانال دقیقا برابر $P_{\max}$ است؛ $S_{E_{\vec{p}}} := \max_{D_{E_{\vec{p}}}} s = P_{\max}$.

قضیه 2: *کانال پائولی $E_{\vec{p}}$ را در نظر بگیرید که هم‌ارز با فضای حالت پس از اعمال تعدادی اندازه‌گیری $M_{s,\hat{n}}$ است. آن‌گاه تیزی کانال در روابط زیر صدق می‌کند:*

$$S_{E_{\vec{p}}} \le \sqrt{1-Q(E_{\vec{p}})}, \quad S_{E_{\vec{p}}} = 1-L(\rho^{\vec{p}}).$$

نتیجه گیری

در این مقاله، به بررسی این پرسش پرداختیم که چگونه کسب اطلاعات توسط اندازه‌گیری می‌تواند منابع کوانتومی حالت‌های سیستم را تحت تاثیر قرار دهد. برای پاسخ به این پرسش از مفهوم سازگاری اندازه‌گیری-کانال به‌عنوان بستری برای تعیین همه اختلال‌های ممکن ایجاد شده توسط یک اندازه‌گیری مفروض، بهره بردیم. استفاده از این مفهوم در تعیین همه اندازه‌گیری‌هایی که منجر به یک اختلال مشخص می‌شوند، نیز مفید بود.

با درنظر گرفتن اندازه‌گیری‌های کیوبیتی دوتایی متوازن و کانال‌های پائولی، در قضیه 1 نشان دادیم که تغییر حالت‌های پساندازه‌گیری از منظر منابع کوانتومی که توسط همدوسی و هم‌بستگی‌های شبه ناهم‌خوانی سنجیده می‌شود، لزوما مخرب است. یعنی مقادیر آن‌ها برای حالت‌های پس از اندازه‌گیری کمتر از حالت‌های پیش از اندازه‌گیری است که این اختلاف توسط تیزی اندازه‌گیری تعیین می‌شود. در وضعیت حدی اندازه‌گیری برافکنشی که حاوی بیشترین اطلاعات است، همه این منابع کوانتومی از بین می‌رود.

مطالعه طرف دیگر مسئله یعنی بررسی این پرسش که برای یک اختلال خاص، اندازه‌گیری حاوی چه مقدار اطلاعات می‌تواند باشد قضیه2 را نتیجه می‌دهد که تهاتر داشتن بیشترین اطلاعات و حفظ منابع در فضای حالت پساندازه‌گیری را نشان می‌دهد.

مرجع‌ها

[1] ترجمه تخصصی برخی لغات: تهاتر =trade-off؛ تیزی =Sharpness؛ اختلال=disturbance؛ هم‌بستگی شبه ناهم‌خوانی=discord-like correlation؛ عدم قطعیت محلی=local quantum uncertainty؛ همدوسی=coherence؛ سازگاری=compatibility؛ متوازن=unbiased؛ چهاروجهی=tetrahedron.

[2] C. A. Fuchs and A. Peres; "*Quantum-state disturbance versus information gain: Uncertainty relations for quantum information*"; Phys. Rev. A **53**, 2038 (1996).

[3] G. D'Ariano; "*On the heisenberg principle, namely on the information-disturbance trade-off in a quantum measurement*"; Fortschritte der Physik **51**, 318 (2003).

[4] L. Maccone; "*Information-disturbance tradeoff in quantum measurements*"; Phys. Rev. A 73, 042307 (2006).

[5] F. Sciarrino, M. Ricci, F. De Martini, R. Filip, and L. Mi˘sta; "*Realization of a minimal disturbance quantum measurement*"; Phys. Rev. Lett. **96**, 020408 (2006).

[6] F. Buscemi, M. Hayashi, and M. Horodecki; "*Global information balance in quantum measurements*"; Phys. Rev. Lett. **100**, 210504 (2008).

[7] P. Busch; "*no information without disturbance: Quantum limitations of measurement*"; in Quantum Reality, Relativistic Causality, and Closing the Epistemic Circle: Essays in Honour of Abner Shimony (Springer Netherlands, Dordrecht, 2009) pp. 229-256.

[8] G. Sharma and A. K. Pati; "*Trade-off relation for coherence and disturbance*"; Phys. Rev. A **97**, 062308 (2018).

[9] T. Heinosaari, T. Miyadera, and M. Ziman; "*An invitation to quantum incompatibility*"; Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **49**, 123001 (2016).

[10] T. Heinosaari and T. Miyadera; "*Qualitative noisedisturbance relation for quantum measurements*"; Phys. Rev. A **88**, 042117 (2013).

[11] T. Heinosaari, T. Miyadera, and D. Reitzner; "*Strongly incompatible quantum devices*"; Foundations of Physics **44**, 34-57 (2014).

[12] T. Heinosaari, D. Reitzner, T. c. v. Ryb´ar, and M. Ziman; "Incompatibility of unbiased qubit observables and Pauli channels"; Phys. Rev. A **97**, 022112 (2018).

[13] M. A. Nielsen and I. L. Chuang; "*Quantum Computation and Quantum Information*"; Cambridge University Press; Anniversary edition. (2011).

[14] P. Busch; "*On the sharpness and bias of quantum effects*"; Foundations of Physics **39**, 712 (2009).

[15] Y. Liu and S. Luo; "*Quantifying unsharpness of measurements via uncertainty*"; Phys. Rev. A **104**, 052227 (2021).

[16] A. Mitra; "*Quantifying unsharpness of observables in an outcome-independent way*"; International Journal of Theoretical Physics **61**, 236 (2022).

[17] I. Bengtsson and K. Zyczkowski; "*Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*"; 2nd ed. (Cambridge University Press, 2017).

[18] A. S. Holevo; "*Quantum coding theorems*"; Russian Mathematical Surveys **53**, 1295 (1998).

[19] F. Shahbeigi and S. J. Akhtarshenas; "*Quantumness of quantum channels*"; Phys. Rev. A **98**, 042313 (2018).

[20] A. Jamio lkowski; "*Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators*"; Reports on Mathematical Physics **3**, 275 (1972).

[21] M.-D. Choi; "*Completely positive linear maps on complex matrices*"; Linear Algebra and its Applications **10**, 285 (1975).

[22] D. Girolami, T. Tufarelli, and G. Adesso; "Characterizing nonclassical correlations via local quantum uncertainty"; Phys. Rev. Lett. **110**, 240402 (2013).