

## کنترل حلقه باز بهینه شده یک سامانه کوانتومی دو ترازه

جاویدان ، کوروش<sup>۱</sup> ؛ اکبرپور، مسعود<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

<sup>۲</sup> دانشکده فیزیک دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه، گاوازنگ، زنجان، ایران

### چکیده

اغلب نیازمند آن هستیم که ترکیب خاصی از ویژه حالت های یک سیستم کوانتومی را در اختیار داشته باشیم. برای دستیابی به این مقاصد؛ وجود تکنیک های کنترلی کوانتومی، بسیار کارآمد خواهند بود. در این پژوهش، مساله ی کنترل انتقال تراز حالات مختلف سیستم کوانتومی را به روش لیاپونو برای یک سامانه کوانتومی دو-سطحی همدوس و بسته؛ با در نظر گرفتن فاکتورهای مهم و مؤثر در کنترل این سامانه را حل و بررسی کرده ایم. مدلی که برای کنترل این سامانه طراحی شده، هیچ محدودیتی در انتخاب حالات ابتدائی و انتهای سامانه ندارد. رسیدن به کت نهایی مورد نظر؛ در عین مینیمم کردن شدت میدان خارجی اعمال شده، سرعت انتقال تراز و دستیابی به پایداری پس از رسیدن به حالت نهایی، از اهداف این مدل کنترلی می باشد که به دو روش عددی و تحلیلی حل شده و نتایج با هم مقایسه گردیده اند.

واژگان کلیدی: کنترل کوانتومی - سیستم های کنترلی دو سطحی - کنترل کوانتومی لیاپونو

## Optimized Open-Loop Control of a Two-State Quantum System

Javidan, Kurosh<sup>1</sup> ; Akbarpour, Masoud<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

<sup>2</sup> Department of Physics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences, Gavazang, Zanjan, Iran

### Abstract

we often need quantum systems in a particular composition of Eigen-States to work with. To reach this goal, the entity of Quantum Control Techniques is so useful.

In this research, we had solved and investigated a Control Problem of Different State-Transition via Lyapunov Method, for a closed & coherent qubit under considering essential and useful elements of control. In presented model, there is no limitation on considering any initial & final state. The goal of this model is to reach the desired State; aside minimizing the intensity of external field, velocity of state-transition and achieving sustainable manner. This was done numerically & analytically; and so the results of each of these, are compared with each other.

**Keywords:** Quantum Control – 2 State Controlling Systems – Lyapunov Quantum Control

PACS No. 03.67.Lx, 03.65.-w

### مقدمه

اما برای انجام آزمایش، لازم است تا سامانه مورد نظر در یک حالت اولیه ی بخصوص مرکب یا خالص قرار گرفته باشد تا روی آن آزمایش صورت گیرد بنابراین لازم است تا سامانه را آماده کنیم.

در حالت طبیعی، یک سامانه ی کوانتومی در ابتدای امر می تواند در یک حالت اولیه آمیخته قرار داشته باشد.

$$|\Psi^{(0)}(t_i)\rangle = \sum_{p=1}^{M=dim} C_p^i |\psi_p^{(0)}\rangle \quad (2)$$

$$|\Psi^n(r, dt)\rangle = \sum_{m=1}^M C_m^n(r, dt) |\psi_m\rangle ; n = \text{fixed} \quad (1)$$

اکنون با اکستریم کردن تابع لیاپوونو، می توان فرم تابع کنترل را به دست آورد. [1]

$$V(t) \equiv \frac{1}{2} (1 - |\langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle|^2) \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \langle \Psi_f | \Psi(t) \rangle \langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle)$$

با مشتق گیری و تشکیل نامعادله ی نزولی، خواهیم داشت:

$$\dot{V}(t) \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{\hbar} \sum_{k=1}^K \lambda_k(t) \cdot x_k \right) \leq 0 \quad (11)$$

برای آنکه نامعادله ی فوق برقرار بشود؛ لازم است تمامی جملات داخل جمع بندی، مثبت باشند. یعنی:

$$\lambda_k(t) \cdot x_k \geq 0 \quad (12)$$

بنابراین تابع کنترل باید به فرم کلی زیر باشد:

$$\lambda_k(t) = M_k \cdot F_k(x_k) ; M_k > 0 \quad (13)$$

از ویژگی های تابع  $F$  اینست که:

✓ کاملاً یکنواخت و هموار باشد.

✓ با شیب ملایم از مبداء مختصات بگذرد.

✓ در ربع اول و یا سوم و از نظر اندازه، بین صفر و یک باشد.

با یک نگاه در آخرین رابطه از فرمول (11)، متوجه خواهید شد که اگر کت های اولیه و نهائی، بر یکدیگر متعامد و ویژه کت های هامیلتونی باشند؛ آنگاه کنترلر  $\lambda_k(t)$  کاملاً بلا استفاده خواهد بود.

برای حل این ایراد؛ بهتر است رابطه ی (11) را به فرم قطبی بنویسیم تا بتوانیم از تحولات لحظه به لحظه ی کت حالت جو یا شویم. [1]

$$\dot{V}(t) = \frac{-1}{\hbar} \sum_{k=1}^K [\lambda_k(t) \cdot \|\langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle\| \cdot \text{Im}(e^{i\angle \langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle} \langle \Psi_f | H_k | \Psi(t) \rangle)] \quad (14)$$

و اِلمان قابل تعیینی که کنترل کننده ی مسیر گذار است

$$\gamma(t) = \angle \langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle \quad (15)$$

$$= \pi - \text{Arccos} \left( \cos \theta_f \cdot \cos \theta(t) \right) + \left( \sin \theta_f \cdot \sin \theta(t) \cdot \cos(\varphi_f - \varphi(t)) \right)$$

در حقیقت زوایای  $\varphi(t)$  و  $\theta(t)$  و رابطه ای که میان آنهاست؛ مسیر گذار را کنترل می کنند. اکنون به سراغ معادله ی تحول شرودینگر و کت های دلخواه اولیه و نهائی برویم.

$$H_{(T)}(t) = H_{(0)} + \lambda(t) \cdot H_{(\lambda)} \quad (16)$$

$$= \begin{bmatrix} h_{1,1}^{(0)} & 0 \\ 0 & h_{2,2}^{(0)} \end{bmatrix} + \lambda(t) \begin{bmatrix} 0 & h_{1,2}^{(\lambda)} \\ h_{2,1}^{(\lambda)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\Psi^{(0)}(t_i)\rangle = \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) |\psi_1^{(0)}\rangle + \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \cdot e^{i\varphi_i} |\psi_2^{(0)}\rangle$$

$$|\Psi^{(0)}(t_f)\rangle = \sum_{p=1}^{M=\dim} C_p^f |\psi_p^{(0)}\rangle \quad (3)$$

ما یک سامانه کوانتومی دو-ترازه ی بسته و همدوس را انتخاب کرده و به دنبال آن بودیم که مدلی برای انتقال جمعیت از یک تراز به تراز دیگر را در بستر یک میدان خارجی قابل کنترل به همراه بهینه کردن شدت میدان خارجی در ازای دستیابی به کت مورد نظر در کوتاهترین زمان ممکن و یا با عبور از مسیر دلخواه؛ به دست آوریم.

## دینامیک مسأله

با توجه به نظریه لیاپوونو [1] در سال 1892، که برای

کنترل غیر مستقیم سامانه و دستیابی به پایداری پس از کنترل، ارائه شد. بطور کلی یک سامانه غیر خطی را به گونه ای در نظر بگیرید که

$$\dot{\lambda}(t) = f(x) \quad (4)$$

فرض کنید

$$\lambda_{eq} = 0 \quad (5)$$

نقطه تعادل باشد. آنگاه این نقطه ی تعادل پایدار است اگر:

$$\forall \varepsilon > 0 : \delta = \delta(\varepsilon) \quad \|\lambda(t)\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0 : \|\lambda(t)\| < \varepsilon \quad (6)$$

قضیه: اگر مشتق تابع لیاپوونو  $V(\lambda(t))$  در همسایگی نقطه ی تعادل، منفی باشد؛ آنگاه آن نقطه ی تعادل، پایدار است. تابع لیاپوونو دارای ویژگی های بخصوصی است. [1] مثلاً اینکه:

✓ باید پیوسته باشد.

✓ دارای یک نقطه ی اکستریم منحصر به فرد، نسبت به دیگر نقاط در همسایگی خود باشد.

✓ آهنگ تغییرات در همسایگی آن نقطه ی تعادل، منفی و سیر نزولی داشته باشد.

برای تعیین این تابع لیاپوونو، از معیار بورس استفاده کرده ایم. [1]

$$d_{Bures}(|\Psi(t)\rangle, |\Psi_f\rangle) \equiv \min_{\theta} \|\Psi(t)\rangle - e^{i\theta} |\Psi_f\rangle\| ; \theta \in \mathbf{R} \quad (7)$$

بطوریکه تابع لیاپوونو را بر حسب فاصله لحظه ای میان حالت در حال تحول و حالت نهایی هدف تعریف و با اکستریم کردن آن، کمینه ی تابع شدت میدان خارجی را به دست می آوریم. [1]

$$V \equiv \frac{1}{2} (1 - |\langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle|^2) \quad (8)$$

در حالت عمومی معادله ی تحول سامانه را می نویسیم.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = (H_0 + \sum_k \lambda_k(t) H_k) |\Psi(t)\rangle \quad (9)$$

یعنی ماکزیمم فیدلیتی پیش رفت. به عبارتی در حلقه باز، مسأله‌ی ما بهینه نیست. اما در حل تحلیلی، دیگر آزمون و خطایی وجود ندارد! صرفاً با تشکیل یک معادله برای ماکزیمم فیدلیتی؛ می‌توان شدت میدان کمینه شده را به ازای هر مسیر خطی برای هر کت‌حالت اولیه و نهائی، به دست آورد. معادله‌ای که مسأله‌ی ما را به این بهینه می‌کند:

$$V \equiv \frac{1}{2} (1 - |\langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle|^2) = 0 \quad (21)$$

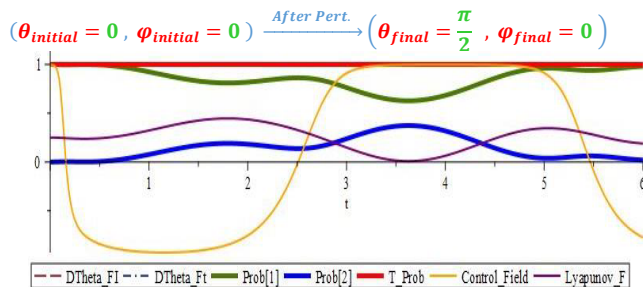
در حقیقت صفر شدن تابع لیاپوونو؛ نشانگر انتقال تراز کامل است.

### نتایج محاسبات عددی و تحلیلی

در انجام هر دو مدل محاسبات، پارامتر گذر زمان برای تحول، به گونه‌ای مقیاس بندی شده است که هر واحد زمانی؛ معادل با یک دوره  $10E-16$  [sec] می‌باشد. در تمامی نمودارها، به اینکه انتقال کامل ترازا در چه لحظه‌ای رخ داده است؛ دقت کنید.

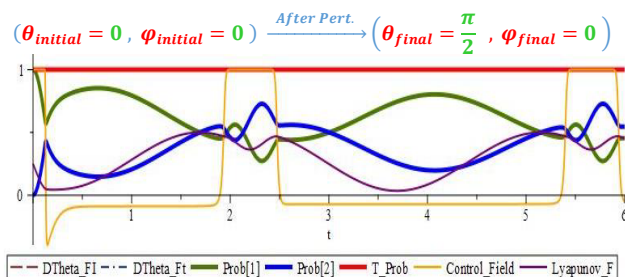
○ نتایج حل عددی:

$$H_{(T)}(t) = \sigma_z + \lambda(t) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma_x$$



شکل 1 هرچند که تابع لیاپوونو به صفر رسیده است اما در همان لحظه تابع کنترلر در بیشترین مقدار خود قرار دارد؛ یعنی سیستم کنترلی کاملاً روشن است و تبعاً همین باعث اختلال جزئی در انتقال تراز می‌شود که مشاهده می‌کنید جمعیت ترازا به یکدیگر نزدیک شده‌اند ولی نه کامل.

$$H_{(T)}(t) = \sigma_z + \lambda(t) \cdot 4 \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$



شکل 2 در نمودار فوق نیز به دلیل عدم هم‌خوانی مقادیر تابع لیاپوونو و تابع کنترلر، سامانه دوباره از وضعیت مورد نظر خارج می‌شود.

$|\Psi^{(\lambda)}(t)\rangle = \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)|\psi_1^{(\lambda)}\rangle + \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \cdot e^{i\varphi(t)}|\psi_2^{(\lambda)}\rangle$   
 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_n^{(0)} | \Psi^{(\lambda)}(t) \rangle = H_{(T)}(t) \langle \psi_n^{(0)} | \Psi^{(\lambda)}(t) \rangle$   
 تا اینجا، مسأله را به روش عددی می‌توان حل کرد. اما برای حل به روش تحلیلی؛ از نظریه اختلال کمک گرفته و با توجه به اینکه سامانه دو-تراز دارد؛ اختلال را تا مرتبه اول در نظر می‌گیریم. [2]

$$|\psi_n^{(\lambda)}(t)\rangle = |\psi_n^{(0)}\rangle + \lambda^1(t)|\psi_n^{(1)}\rangle + \dots \quad (17)$$

$$|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} \left( \frac{-h_{m,n}^{(\lambda)}(\delta_{m,n-1} + \delta_{m-1,n})}{(h_{m,m}^{(0)} - h_{n,n}^{(0)})} \right) |\psi_m^{(0)}\rangle$$

و برای ویژه مقادیر انرژی:

$$E_n^{(\lambda)}(t) = E_n^{(0)} + \lambda^1(t)E_n^{(1)} + \dots \quad (18)$$

$$E_{\pm}^{(\lambda)}(t) = \left( \frac{h_{m,m}^{(0)} + h_{n,n}^{(0)}}{2} \right) \pm \left( \frac{h_{m,m}^{(0)} - h_{n,n}^{(0)}}{2} \right) \sqrt{1 + \frac{\|\lambda(t) \cdot (h_{m,n}^{(\lambda)} \delta_{m,n-1})\|^2}{\left( \frac{h_{m,m}^{(0)} - h_{n,n}^{(0)}}{2} \right)^2}}$$

با اعمال روابط اختلالی فوق، خواهیم دید که چگونه می‌توان شدت میدان خارجی کمینه شده را بدست آورد. اما بطور کلی، چه برای حل عددی و چه برای حل تحلیلی، اولاً تابع  $M$  را در روش عددی هر بار با آزمون و خطا مقادری می‌کنیم و در روش تحلیلی با اکستریم کردن معادله لیاپوونو، مینیم آن را به دست آوریم. ثانیاً فرم تابع  $F$  را با توجه به ویژگی‌هایی که قبلاً به آن اشاره کردیم  $\tanh()$  در نظر می‌گیریم. اما برای  $\theta(t)$  و  $\varphi(t)$ ، لزوم قطعی شدن انتقال تراز، ایجاب می‌کند که این دو تابع مستقل از یکدیگر نباشند. از آنجایی که ما به سریع‌ترین تحول ممکن علاقه مند بودیم؛ لذا این دو تابع باید صورت خطی به یکدیگر مرتبط می‌شدند. پس باز هم فرم  $\tanh()$  را برای آن‌ها در نظر گرفتیم. یعنی:

$$\theta(t) \equiv \Delta\theta \cdot \tanh(t) \rightarrow t = \tanh^{-1}\left(\frac{\theta(t)}{\Delta\theta}\right) \quad (19)$$

$$\Delta\theta = |\theta_f - \theta_i| ; \quad \Delta\varphi = |\varphi_f - \varphi_i|$$

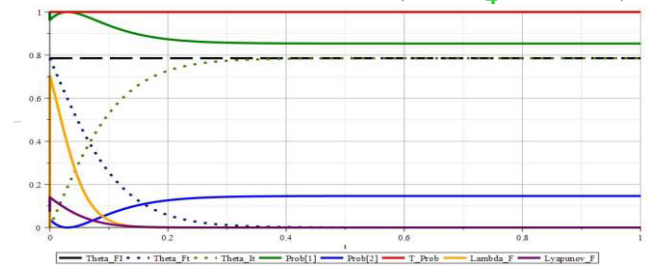
$$\varphi(t) \equiv \Delta\varphi \cdot \tanh(t) \xrightarrow{(19)} \varphi(t) \equiv \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\theta}\right) \cdot \theta(t) \quad (20)$$

توجه داشته باشید که این تعیین توابع زوایا؛ منجر به ایجاد تحول از مسیری خواهد شد که ما تعیین می‌کنیم! به عبارت دیگر، این مدل کنترل از نوع بازخوردی و بسته نیست؛ بلکه از نوع حلقه‌ی باز است. در حل عددی، صرفاً می‌توان با یک حدس اولیه در تعیین شدت میدان خارجی و دیدن نتایج، با آزمون و خطا به سمت بهترین مدل

○ نتایج حل تحلیلی:

$$H_{(T)}(t) = \sigma_z + \lambda(t) \cdot X(t) \cdot \sigma_x$$

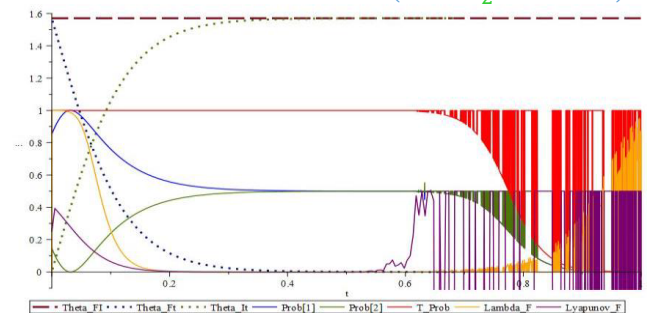
$$(\theta_{initial} = 0, \varphi_{initial} = 0) \xrightarrow{\text{After Pert.}} (\theta_{final} = \frac{\pi}{4}, \varphi_{final} = 0)$$



شکل 3 همچنان که در نمودار فوق می بینید، انتقال تراز در مدت زمان بسیار کوتاه تر و بطور کامل انجام شده و از پایداری کامل در گذر زمان نیز برخوردار است. تابع لیاپونو و تابع کنترلر هر دو به صفر رسیده اند.

$$H_{(T)}(t) = \sigma_z + \lambda(t) \cdot X(t) \cdot \sigma_x$$

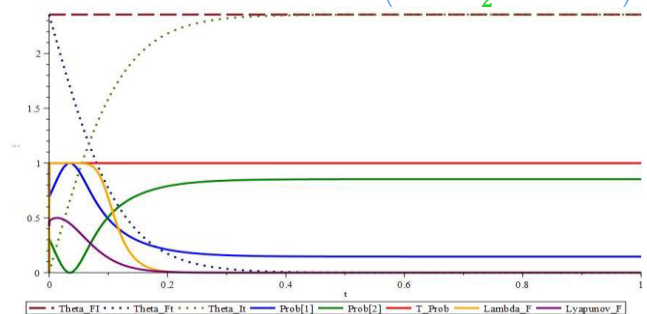
$$(\theta_{initial} = 0, \varphi_{initial} = 0) \xrightarrow{\text{After Pert.}} (\theta_{final} = \frac{\pi}{2}, \varphi_{final} = 0)$$



شکل 4 تقریباً پس از گذشت نیم واحد زمانی، پایداری سیستم مختل شده و جمعیت هر دو تراز به سمت صفر نزدیک می شوند که باعث بروز عدم پایداری کل شده است. شاید به دلیل یونیزه شدن کامل اتم باشد.

$$H_{(T)}(t) = \sigma_z + \lambda(t) \cdot X(t) \cdot \sigma_x$$

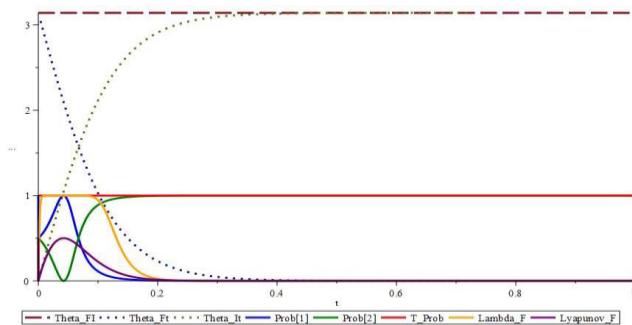
$$(\theta_{initial} = 0, \varphi_{initial} = 0) \xrightarrow{\text{After Pert.}} (\theta_{final} = \frac{3\pi}{2}, \varphi_{final} = 0)$$



شکل 5 انتقال تراز در مدت زمان بسیار کوتاه تر و بطور کامل انجام شده و از پایداری کامل در گذر زمان نیز برخوردار است. تابع لیاپونو و تابع کنترلر هر دو به صفر رسیده اند.

$$H_{(T)}(t) = \sigma_z + \lambda(t) \cdot X(t) \cdot \sigma_x$$

$$(\theta_{initial} = 0, \varphi_{initial} = 0) \xrightarrow{\text{After Pert.}} (\theta_{final} = \pi, \varphi_{final} = 0)$$

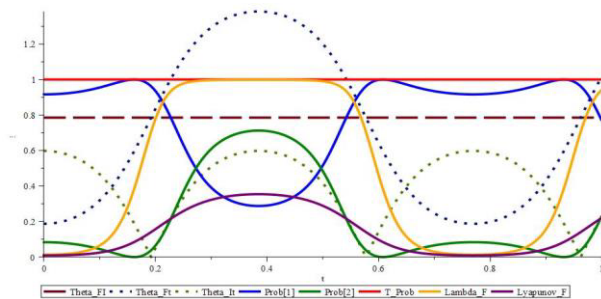


شکل 6 انتقال تراز در مدت زمان بسیار کوتاه تر و بطور کامل انجام شده و از پایداری کامل در گذر زمان برخوردار است. تابع لیاپونو و تابع کنترلر نیز به صفر رسیده اند.

$$H_{(T)}(t) = \sigma_z + \lambda(t) \cdot X(t) \cdot \sigma_x$$

$$(\theta_{initial} = 0, \varphi_{initial} = 0) \xrightarrow{\text{After Pert.}} (\theta_{final} = \frac{\pi}{4}, \varphi_{final} = \frac{\pi}{2})$$

$$\theta(t) := \theta_f \cdot \tanh\left(\cos\left(\frac{a}{c} \cdot t\right)\right) ; \quad \varphi(t) := \varphi_f \cdot \tanh\left(\sin\left(\frac{a}{c} \cdot t\right)\right)$$



شکل 7 دو تابع زاویه با اختلاف فاز  $\pi/2$  نسبت به یکدیگر، در حال تحول هستند که همین باعث بروز نارسایی در روند انتقال تراز می شود. در همان لحظاتی که اختلاف زاویه ی بین کت اولیه و کت لحظه ای، به صفر می رسد؛ جمعیت تغییر یافته ی ترازها، به شرایط اولیه ی مسأله بازمی گردند. در نتیجه انتقال کامل و پایدار ترازها هیچوقت رخ نخواهد داد.

### نتیجه گیری:

برای آنکه سامانه پس از انتقال تراز کامل انجام شده؛ در وضعیت پایدار باقی بماند، لازم است تا شدت میدان خارجی اعمال شده بر سامانه، بصورت دینامیک عمل کند و به نرمی خاموش شود تا مبدا سیستم دوباره به شرایط قبلی بازگردد و اینکه وابستگی خطی میان زوایای سمتی و قطبی، از شروط لازم برای به ثمر رسیدن این پروسه ی انتقال تراز است.

### مرجع ها:

[1] Cong, S., 2014. *Control Of Quantum Systems Theory and Methods*. s.l.:s.n.

[2] Zwiebach, P. B., 2008. *MIT Quantum Mechanics Courses*. s.l., MIT University.