

تحلیل تنش‌های بین‌لایه‌ای در اتصال نواری دوطرفه غیرهمگن با استفاده از تئوری کانتروویج توسعه- یافته چندجمله‌ای

محسن شایسته زراعتی^۱، مسعود طهانی^۲، سیدعبدالمجید یوسف ثانی^۳

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، shayesteh@mail.um.ac.ir

^۲ استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، mtahani@um.ac.ir

^۳ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، yousefsani@um.ac.ir

چکیده

وجود تمرکز تنش‌های بین‌لایه‌ای برشی و عمودی در نواحی نزدیک به لبه‌های ناحیه اتصال در اتصالات غیرهمگن یکی از مهم‌ترین عوامل بروز جدایش در این ناحیه و به دنبال آن خرابی اتصال است. از این رو، مطالعه دقیق اثرات لبه با استفاده از تئوری‌های با دقت بالا ضرورتی انکارناپذیر است. در این پژوهش با استفاده از تئوری کانتروویج توسعه‌یافته چندجمله‌ای تنش‌های میان‌لایه‌ای یک اتصال نواری دوطرفه غیرهمگن تحت کشش محوری مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات تعادل دوبعدی و شرایط مرزی متناظر با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل استخراج گردیده است. با انتخاب حدس اولیه مناسب، معادلات حاکم بر تعادل در هر دو جهت با استفاده از روش متغیرهای فضای حالت و به صورت تکراری حل شده است. نتایج حاصل از این تئوری با تحقیقات قبلی صورت گرفته برای این هندسه مقایسه و صحت‌سنجی شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که برخلاف مقادیر ناچیز تنش‌های بین‌لایه‌ای در بخش میانی ناحیه اتصال، با نزدیک شدن به لبه‌های ناحیه اتصال و افزایش تمرکز تنش، اثرات لبه منجر به افزایش شدید این تنش‌ها در فواصل بسیار کوچکی از لبه‌ها می‌گردد. این افزایش شدید تنش می‌تواند منجر به جدایش و خرابی اتصال گردد. نتایج این پژوهش حاکی از آنست که تئوری کانتروویج توانایی خوبی در پیش‌بینی و تحلیل تنش‌های بین‌لایه‌ای در سازه‌هایی نظیر اتصالات نواری دوطرفه دارد.

واژه‌های کلیدی

تحلیل تنش‌های بین‌لایه‌ای، تئوری کانتروویج توسعه‌یافته چندجمله‌ای، حل تحلیلی، اتصال نواری دوطرفه غیرهمگن

مقدمه

امروزه اتصالات چسبی به‌عنوان یکی از پرکاربردترین و مستحکم‌ترین دسته اتصالات شناخته می‌شوند. دامنه وسیع مورد استفاده این اتصالات در صنایع مختلف مانند خودروسازی، هوافضا، صنایع دریایی و ساختمان‌سازی نشان‌دهنده اهمیت و گستردگی این اتصالات است. این دسته از اتصالات در کنار معایب محدود و اندکی که دارند از مزایای زیادی برخوردارند؛ از جمله مهم‌ترین این مزایا می‌توان به وزن

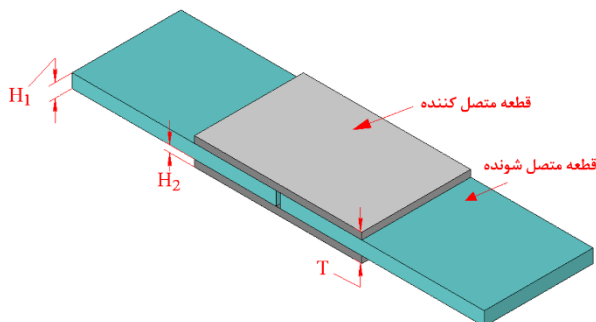
کم در مقایسه با سایر اتصالات مکانیکی اشاره کرد [۱]. علاوه بر وزن پایین، تمرکز تنش کمتر در ناحیه اتصال و توزیع تنش بهتر در طول ناحیه اتصال نیز از مزایای استفاده از اتصالات چسبی می‌باشد که موجب افزایش چشم‌گیر مقاومت این اتصالات و همچنین رونق آن‌ها در مقایسه با اتصالات مکانیکی پیچ، پرچ و جوش شده است. طراحی و ساخت یک اتصال چسبی مناسب، نیازمند ارزیابی دقیق استحکام اتصال و پیش‌بینی از کارافتادگی آن است. اما پیش از به کارگیری معیارهای از کارافتادگی مناسب، طراح باید پیش‌بینی صحیح و تخمینی با دقت بالا از توزیع تنش‌های بین‌لایه‌ای در داخل ناحیه اتصال (در راستای طول و ضخامت) و نیز دیگر نواحی مستعد تمرکز تنش داشته باشد. با توجه به اینکه بررسی توزیع تنش‌های بین‌لایه‌ای به وسیله آزمایش و روش‌های اندازه‌گیری تجربی امکان‌پذیر نیست، بدین منظور می‌بایست از روش‌های تحلیلی یا عددی با دقت بالا استفاده کرد. شبیه‌سازی عددی به کمک روش اجزای محدود، اگرچه ابزاری بسیار کاربردی در زمینه تحلیل و طراحی سازه‌ای به‌شمار می‌رود، اما به دلیل ماهیت حل تقریبی، از دقت کافی در پیش‌بینی توزیع تنش‌های بین‌لایه‌ای به خصوص در نزدیکی لبه‌های اتصالات چسبی برخوردار نیست [۲].

با بررسی پیشینه پژوهش‌های صورت گرفته در این خصوص می‌توان دریافت که موضوع حل تحلیلی و بررسی تنش‌های اتصالات چسبی از موضوعات مهم و قابل توجه پژوهش‌گران بوده است و امروزه نیز همچنان از اهمیت زیادی برخوردار است. اولین تحقیقاتی که در این زمینه انجام گرفت به سال ۱۹۳۸ باز می‌گردد که نشان‌دهنده قدمت و اهمیت این موضوع می‌باشد [۳]. اگرچه ارائه اولین تئوری‌های تحلیلی گامی بسیار بزرگ در شناسایی رفتار اتصالات چسبی می‌باشد اما هر کدام از این تئوری‌ها محدودیت‌های زیادی داشت که با کاهش دقت و در نتیجه اختلاف نتایج حاصل از آن‌ها با رفتار حقیقی اتصال همراه بود. تعدادی از تئوری‌ها در هندسه اتصالات محدودیت داشتند و تعدادی نیز در خواص مواد متصل شونده یا ضخامت اتصال محدود بودند.

به مرور زمان و با ارائه تئوری‌های جدید در مدل‌سازی اتصالات چسبی و حل تحلیلی این دسته از اتصالات تعدادی از این محدودیت‌ها رفع شد و نتایج دقیق‌تری بدست آمد. در همین راستا یوسف‌ثانی و

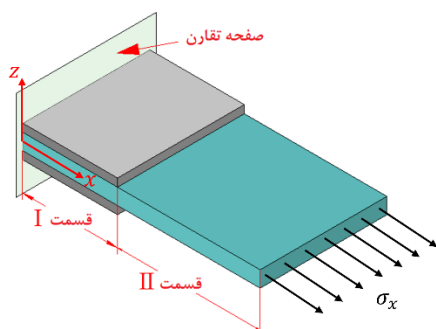
مدلسازی هندسی اتصال غیرهمگن

اتصال نواری دوطرفه به نحوی است که دو قطعه متصل شونده میانی، با وجود یک گپ کوچک در بین آن‌ها، به وسیله دو قطعه اتصال دهنده از بالا و پایین به یکدیگر متصل می‌شوند. هندسه این نوع از اتصال در شکل ۱ قابل مشاهده است.



شکل ۱: هندسه اتصال نواری دوطرفه غیرهمگن

با صرف نظر کردن از فاصله گپ کوچک بین دو قطعه میانی و با توجه به تقارن کامل اتصال تحت بار کششی محوری، می‌توان نیمی از هندسه اتصال را مانند شکل ۲ مدل کرد. انجام این کار باعث کاهش چشم‌گیر مدت زمان حل و انجام محاسبات می‌شود. مطابق شکل ۲ مبدا دستگاه مختصات در وسط ضخامت T و قطعه میانی تحت تنش محوری یکنواخت σ_x در نظر گرفته شده است. برای استخراج معادلات حاکم بر مدل لازم است تا این هندسه به دو قسمت I و II (نواحی داخلی و بیرونی اتصال) تقسیم شده و معادلات تعادل و به دنبال آن توابع جابجایی و تنش برای این دو قسمت بصورت مجزا استخراج شود. در ادامه، معادلات تعادل برای یکی از این دو قسمت نوشته می‌شود و برای قسمت دیگر نیز بطور مشابه قابل استخراج است.



شکل ۲: مدل اتصال نواری دوطرفه غیرهمگن متقارن تحت کشش محوری

معادلات تعادل و شرایط مرزی

برای استخراج معادلات تعادل و شرایط مرزی می‌توان از اصل حداقل انرژی پتانسیل و اعمال لم اساسی حساب تغییرات استفاده نمود. اصل حداقل انرژی پتانسیل که شکل خاصی از اصل جابجایی مجازی محسوب می‌شود، بیان می‌کند که برای یک جسم پیوسته الاستیک که

طهانی [۴ و ۵] با استفاده از تئوری لایه‌ای^۱، تنش‌های میان‌لایه‌ای یک اتصال چسبی با هندسه تک‌لبه را در ابعاد مختلفی از ضخامت لایه چسب تحلیل کردند. آن‌ها با تحلیل دقیق تنش‌های عرضی عمودی و برشی توانستند رفتار اتصال را پیش‌بینی کنند و نتیجه گرفتند که افزایش تعداد لایه‌های ریاضی در تئوری لایه‌ای موجب افزایش دقت نتایج حاصل از این تئوری می‌شود. سلاحی و همکارانش [۶] با استفاده از روش انرژی و تئوری تیر تیموشنکو مدلی ارائه کردند که قابلیت تحلیل یک اتصال تک‌لبه تحت بارگذاری و شرایط مرزی مختلف را دارا بود. آن‌ها با بیان این تئوری توانستند محدودیت حل تحلیلی در شرایط مرزی و بارگذاری‌های مختلف را بردارند. ونگ^۲ و همکارانش [۷] با تحلیل هندسه‌ای خاص که در طول خط اتصال با تغییر ضخامت همراه است توانستند به خوبی رفتار این اتصال را پیش‌بینی کنند. آن‌ها با تحلیل اتصال پله‌ای دوطرفه^۳ تنش‌های برشی و تنش‌های عمودی چسب که در پژوهش‌های مقدماتی در نظر گرفته نمی‌شد را با دقت خوبی پیش‌بینی کردند. بهرامی و همکارانش [۸] نیز با بهره‌گیری از حل عددی و حل تحلیلی توانستند تنش در جهات مختلف را برای هندسه‌هایی خاص بررسی کنند و همچنین اثر لبه را بهبود ببخشند.

در این پژوهش، اتصال نواری دوطرفه^۴ برای اولین بار با استفاده از تئوری کانتروویچ^۵ توسعه یافته چندجمله‌ای مورد تحلیل قرار گرفته است. تئوری کانتروویچ بدون استفاده از تئوری تیر و هیچ گونه بسط تیلور و همچنین بدون هیچ محدودیتی در ضخامت تیر، توانایی تحلیل انواع اتصالات چسبی را دارد. روش کانتروویچ اولین بار در سال ۱۹۵۸ توسط شخصی به همین نام برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به کار گرفته شد [۹]. کر^۶ برای اولین بار تئوری کانتروویچ توسعه یافته را بیان کرد و از آن در مسائل مختلفی همچون خمش، کمانش و ارتعاشات آزاد استفاده کرد [۱۰]. همچنین کر برای توسعه بیشتر روش کانتروویچ، تئوری کانتروویچ توسعه یافته چندجمله‌ای را نیز مطرح کرد که با افزایش دقت این تئوری در مقایسه با تئوری ابتدایی کانتروویچ همراه بود. هر چند که روش کانتروویچ چندجمله‌ای پاسخ‌هایی دقیق‌تر ارائه می‌کند اما با توجه به سادگی و یا پیچیدگی معادلات حاکم بر هر مسئله می‌توان از روش تک‌جمله‌ای و یا چندجمله‌ای استفاده کرد. در این پژوهش با توجه به اینکه روش تک‌جمله‌ای توانایی حل دقیق را ندارد، از روش کانتروویچ چندجمله‌ای دوبعدی استفاده شده است. همان‌طور که بیان شد در این پژوهش برای اولین بار در تحلیل اتصالات چسبی از تئوری کانتروویچ توسعه یافته استفاده شده است. بهره بردن از این تئوری علاوه بر حصول نتایجی با دقت بالا نیازی به استفاده از هیچ فرض ساده‌کننده‌ای ندارد و همین موضوع وجه تمایز اصلی این تئوری با پژوهش‌های صورت گرفته قبلی در زمینه اتصالات چسبی می‌باشد.

⁴ Double-sided strap joint

⁵ Kantorovich

⁶ Kerr

¹ Layerwise

² Wang et al.

³ Double stepped lap joint

دیفرانسیل در جهات x و z نوشت. اگر توابع $\tilde{u}_i(z)$ و $\tilde{w}_i(z)$ مقادیری معلوم فرض شوند، دسته اول معادلات تعادل در جهت x و شرایط مرزی در این جهت به صورت زیر قابل بیان است:

$$\delta u_i: -\frac{dN_x^i}{dx} + Q_{x1}^i = 0 \quad (6)$$

$$\delta w_i: -\frac{dQ_x^i}{dx} + N_z^i = 0$$

$$\begin{aligned} u_i = w_i = 0 & \quad \text{at } x = 0 \\ N_x^i = P_x^i, Q_{x2}^i = 0 & \quad \text{at } x = L \end{aligned} \quad (7)$$

در روابط بالا منتهجهای تنش این گونه تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} & (N_x^i, N_z^i, Q_{x1}^i, Q_{x2}^i) \\ & = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \tilde{u}_i, \sigma_z \tilde{w}_i, \sigma_{xz} \tilde{u}_i', \sigma_{xz} \tilde{w}_i') dz \end{aligned} \quad (8)$$

برای بدست آوردن دسته معادلات تعادل در جهت z و شرایط مرزی نیز کافی است توابع $w_i(x)$ و $u_i(x)$ معلوم فرض شوند. بنابراین نتیجه می شود:

$$\delta \tilde{u}_i: -\frac{d\tilde{Q}_x^i}{dz} + \tilde{N}_z^i - \tilde{P}_x^i = 0 \quad (9)$$

$$\delta \tilde{w}_i: -\frac{d\tilde{N}_z^i}{dz} + \tilde{Q}_{x2}^i = 0$$

$$\tilde{N}_z^i = \tilde{Q}_{x1}^i = 0 \quad \text{at } z = \pm h/2 \quad (10)$$

در این روابط منتهجهای تنش به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} & (\tilde{N}_x^i, \tilde{N}_z^i, \tilde{Q}_{x1}^i, \tilde{Q}_{x2}^i) \\ & = \int_0^L (\sigma_x u_i', \sigma_z w_i, \sigma_{xz} u_i, \sigma_{xz} w_i') dx \end{aligned} \quad (11)$$

حال برای ارائه روابط تعادل بر حسب ترمهای جابجایی، بایستی روابط تنش-کرنش در مختصات اصلی ماده نوشته شود. بنابراین با استفاده از قانون هوک ارتباط بین تنش و کرنش به صورت زیر تعریف می گردد [۱۳]:

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] \quad (12)$$

که در این رابطه ماتریس $[C]$ برای هر ماده m به صورت زیر تعریف می شود:

$$C_m = \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_m & 0 \\ \nu_m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_m}{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

با جایگذاری روابط کرنش-جابجایی (۴) در رابطه (۱۳)، روابط تنش-جابجایی بدست می آید. در نهایت با جایگذاری منتهجهایی که بر حسب توابع جابجایی و مشتقات آنها هستند در رابطه (۶) و (۹)، به ترتیب معادلات تعادل بر حسب ترمهای جابجایی در جهت x و z بدست خواهد آمد. لازم به ذکر است که سیستم معادلات حاصل، شامل $2n$ معادله دیفرانسیل کوپل در هر جهت می باشد.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (-T_{11}^{ij} u_j'' - T_{14}^{ij} w_j' + T_{22}^{ij} u_j + T_{23}^{ij} w_j') & = 0 \\ \sum_{j=1}^n (-T_{32}^{ij} u_j' - T_{33}^{ij} w_j'' + T_{41}^{ij} u_j' + T_{44}^{ij} w_j) & = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

در حالت تعادل می باشد، همه جابجاییهای متعارفی که شرایط مرزی و معادلات تعادل را ارضا می کنند، انرژی پتانسیل جسم را کمینه (صفر) می کنند. این اصل را می توان به شکل عبارت زیر بیان کرد [۱۱]:

$$\delta \Pi = \delta(U + V) = \delta U + \delta V = 0 \quad (1)$$

در این رابطه Π انرژی پتانسیل کل، U انرژی کرنشی داخلی و V منفی کار انجام شده توسط نیروهای خارجی وارد بر جسم است. نیروهای خارجی همان بارگذاریهای وارد شده بر نمونه هستند که می توانند عرضی، محوری، خمشی، برشی و یا پیچشی باشند. در مسئله حاضر تنها نیروی خارجی موجود، نیروی کشش یکنواخت محوری است (شکل ۲). تغییرات انرژی کرنشی داخلی جسم نیز که ناشی از تنشهای داخلی جسم است، به صورت زیر بیان می شود [۱۲]:

$$\delta U = \iiint_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}) dV \quad (2)$$

برای بدست آوردن مقادیر تنش و یا کرنش در هر جهت و بر حسب میدان جابجایی، می بایست مولفه های تغییر مکان جداسازی شوند. در نتیجه میدان جابجایی دوبعدی در این تئوری به صورت زیر تعریف می گردد:

$$u(x, z) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \tilde{u}_i(z) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$w(x, z) = \sum_{i=1}^n w_i(x) \tilde{w}_i(z)$$

که در آن $u(x, z)$ و $w(x, z)$ به ترتیب جابجایی هر نقطه با مختصات دلخواه (x, z) در جهات x و z است. پارامتر n بیانگر تعداد توابع مستقل جابجایی لازم برای حل مسئله است. لازم به ذکر است که اگر $n = 1$ باشد، روش را کانتروویچ توسعه یافته تک جمله ای، و اگر $n > 1$ باشد به آن روش کانتروویچ توسعه یافته چند جمله ای می گویند. بر اساس میدان جابجایی ارائه شده می توان روابط کرنش را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x & = \sum_{i=1}^n (u_i'(x) \tilde{u}_i(z)), \varepsilon_z = \sum_{i=1}^n (w_i(x) \tilde{w}_i'(z)) \\ \gamma_{yz} & = \sum_{i=1}^n (v_i(x) \tilde{v}_i'(z)), \gamma_{xy} = \sum_{i=1}^n (v_i'(x) \tilde{v}_i(z)) \\ \gamma_{xz} & = \sum_{i=1}^n (u_i(x) \tilde{u}_i'(z) + w_i'(x) \tilde{w}_i(z)) \end{aligned} \quad (4)$$

از آنجا که تنها بارگذاری وارد شده مطابق شکل ۲، بارگذاری محوری یکنواختی می باشد که در $x = L$ به قطعه میانی وارد شده است، δV ناشی از بارگذاریهای خارجی به صورت زیر تعریف می شود [۱۲]:

$$\delta V_{Axial} = - \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_x \delta u(x, z)|_{x=L} dz \quad (5)$$

با توجه به روابط حاصله برای δU و δV ، با استفاده از رابطه (۱) و بر اساس اصل حداقل انرژی پتانسیل می توان دو دسته معادله

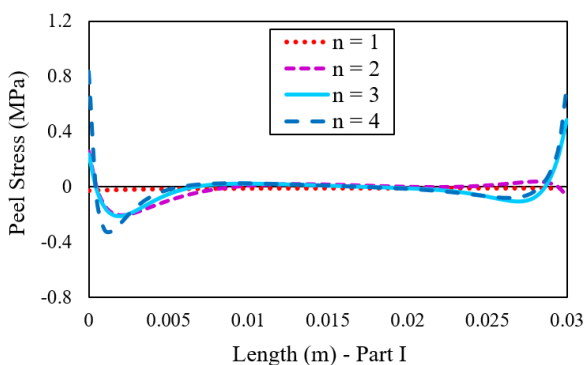
پایه‌سازی روابط تئوری کانتروویچ و همچنین تحلیل این روابط نیز در محیط نرم‌افزار متلب انجام شده و خروجی حاصل از آن در نمودارهای ادامه مقاله آمده است.

نتایج، بحث و بررسی

با توجه به شرایط مرزی و بارگذاری‌های وارد بر این مسئله مطابق شکل ۲، معادلات حل شده و در ادامه نتایج عددی برای تنش‌های بین‌لایه‌ای (عرضی) عمودی و برشی در طول خطوط اتصال گزارش شده است. اتصال تحت بار کششی یکنواخت به مقدار $\sigma_x = 1000 \text{ kN/m}$ قرار دارد. طول قسمت I برابر با ۳ سانتی‌متر و طول قسمت II برابر با ۴ سانتی‌متر در نظر گرفته شده است. مطابق شکل ۱ ضخامت قطعات متصل‌شونده و متصل‌کننده به ترتیب برابر $H_1 = 16 \text{ mm}$ و $H_2 = 2 \text{ mm}$ می‌باشد و در مجموع ضخامت کل T در ناحیه اتصال برابر با ۲ سانتی‌متر است. جنس و خواص مکانیکی مواد استفاده شده در مدل این اتصال در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱: خواص مکانیکی مواد استفاده شده در اتصال نواری دوطرفه

	قطعات میانی	قطعات بیرونی
جنس ماده	آلومینیوم	فولاد
مدول کشسانی	$E = 70 \text{ GPa}$	$E = 207 \text{ GPa}$
ضریب پواسون	$\nu = 0.34$	$\nu = 0.3$



شکل ۳: همگرایی تعداد جملات مستقل در توزیع تنش عرضی عمودی

از جمله مهم‌ترین پارامترهای تاثیرگذار در دقت و همگرایی حل به روش کانتروویچ، تعداد جملات مستقل فرض شده برای معادلات جایجایی است. در شکل ۳ تاثیر تعداد جملات در دور آخر تکرار بر روی توزیع تنش عرضی عمودی در محل خط اتصال بالایی ارائه شده است. شایان ذکر است که با اضافه شدن تعداد جملات و به تبع آن افزایش قابل توجه ابعاد ماتریس‌های تعریف شده در بخش قبلی، مدت زمان حل قدری افزایش می‌یابد، اما این کار موجب افزایش قابل توجه دقت پاسخ‌ها می‌شود. به عبارت دیگر اگرچه نتایج پیش‌بینی شده با این تئوری با تعداد یک جمله مستقل نمی‌تواند به درستی پیش‌بینی‌کننده رفتار اتصال باشد، با افزایش تعداد جملات مستقل، توزیع تنش به سرعت به توزیع واقعی همگرا می‌شود.

$$\sum_{j=1}^n (-\tilde{T}_{11}^{ij} \tilde{u}_j'' - \tilde{T}_{14}^{ij} \tilde{w}_j' + \tilde{T}_{22}^{ij} \tilde{u}_j + \tilde{T}_{23}^{ij} \tilde{w}_j') = \tilde{P}_x^i \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^n (-\tilde{T}_{32}^{ij} \tilde{u}_j' - \tilde{T}_{33}^{ij} \tilde{w}_j'' + \tilde{T}_{41}^{ij} \tilde{u}_j' + \tilde{T}_{44}^{ij} \tilde{w}_j) = 0$$

نمونه‌ای از ثوابت T_{rs}^{pq} در رابطه زیر تعریف شده است:

$$T_{11}^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}^m \tilde{u}_i \tilde{u}_j dz \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

که در آن m بیان‌گر جنس ماده بوده و برای هر ماده عدد متفاوتی است. ثوابت معادلات جهت Z نیز به‌طریق مشابه قابل بیان هستند. لازم‌به‌ذکر است که برای بدست آوردن حل معادلات در جهت Z ، روش معرفی شده در مقاله طهانی و همکارانش [۱۴] که در آن به تحلیل تنش دیسک دوار پرداختند، استفاده شده است. این روش نحوه اعمال روش پیوستگی جایجایی و تنش بین لایه‌ها را به‌صورت همزمان با شرایط مرزی سطوح بالایی و پایینی یعنی $Z = \pm h/2$ بیان می‌کند که در پژوهش حاضر برای مرز لایه k ام و $(k+1)$ به صورت زیر بیان می‌شود [۱۴].

- پیوستگی جایجایی‌ها

$$\tilde{u}_i^{(k)}|_{z=z_{k+1}} = \tilde{u}_i^{(k+1)}|_{z=z_{k+1}} \quad (17)$$

$$\tilde{w}_i^{(k)}|_{z=z_{k+1}} = \tilde{w}_i^{(k+1)}|_{z=z_{k+1}}$$

- پیوستگی تنش‌ها

$$\tilde{Q}_{x1}^i|_{z=z_{k+1}} = \tilde{Q}_{x1}^i|_{z=z_{k+1}} \quad (18)$$

$$\tilde{N}_z^i|_{z=z_{k+1}} = \tilde{N}_z^i|_{z=z_{k+1}}$$

با اعمال روش کانتروویچ در مسئله حاضر، معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم تبدیل به دو سری معادلات دیفرانسیل معمولی می‌شوند. برای حل معادلات بدست‌آمده، لازم است تا توابع جایجایی در یک جهت حدس زده شوند و توابع جهت دیگر بدست آیند و در مرحله بعدی با استفاده از توابع جایجایی بدست‌آمده در مرحله اول می‌توان جایجایی جهت دیگر را بدست آورد. این روند باید تا حصول همگرایی ادامه یابد. اگر توابع جایجایی جهت Z معلوم فرض شوند، با فرض متغیرهای حلت، دستگاه معادلات حاکم را به فرم کلی زیر می‌توان نشان داد:

$$\{X\}' = [A]\{X\} + \{F\} \quad (19)$$

با توجه به ضرایب ثابت T_{pq}^{ij} که نمونه‌ای از آن‌ها در معادله (۱۶) تعریف شده است، می‌توان نشان داد که حل عمومی معادله (۱۹) به‌صورت زیر است [۱۵]:

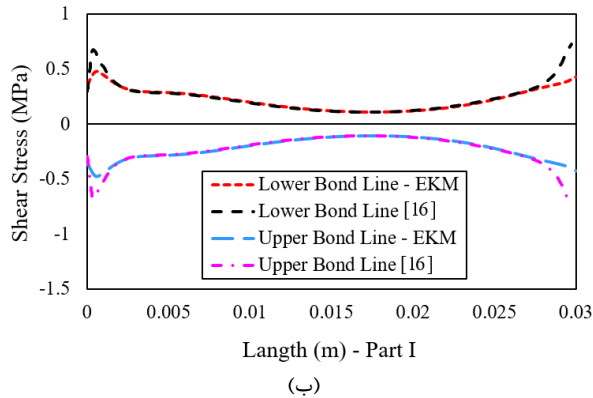
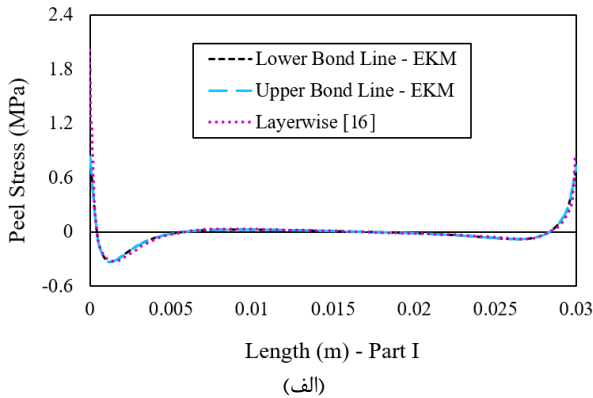
$$\{X\} = [U_x][Q(x)]\{K\} \quad (20)$$

که در آن ماتریس $[Q(x)]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[Q(x)] = \text{diag}(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_{4n} x}) \quad (21)$$

در روابط (۲۰) و (۲۱) λ_m ($m = 1, 2, \dots, 4n$) و $[U_x]$ به ترتیب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $[A]$ هستند. بردار $\{K\}$ در رابطه (۲۰) شامل ثوابت مجهولی است که از شرایط مرزی تعریف شده در مرزهای $x = 0, L$ بدست می‌آیند. معادلات جهت Z نیز به طریق مشابه قابل حل می‌باشد. در پژوهش حاضر تمام محاسبات ریاضی،

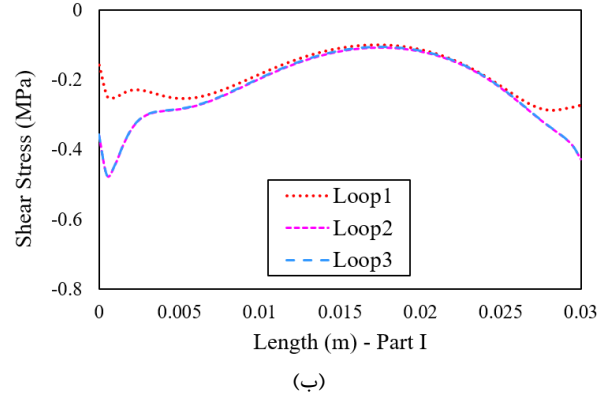
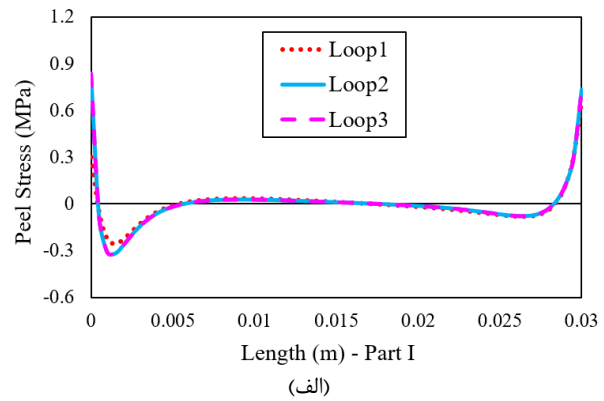
دقت خوبی پیش‌بینی کند. اختلاف موجود بین نتایج حاصل از تئوری‌های کانترووچ و لایه‌ای در مجاورت لبه‌های ناحیه اتصال راه، که متاثر از اثرات لبه و تکینگی تنش در نزدیکی لبه‌ها است، می‌توان با افزایش تعداد جملات مستقل، افزایش تعداد تکرار و انتخاب توابع حدسی مناسب‌تر کاهش داد. افزون بر این، برای استخراج و حل معادلات به کمک این تئوری، ریاضیات بسیار پیچیده مورد نیاز نیست.



شکل ۵: مقایسه توزیع تنش‌های بین‌لایه‌ای عرضی در خطوط اتصال بالایی و پایینی با نتایج تئوری لایه‌ای [۱۶]. الف) تنش عمودی و ب) تنش برشی

مراجع و منابع

- [1] Nguyen, T.H. and Le Grogneq, P., 2021. Analytical and numerical simplified modeling of a single-lap joint. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 108, p.102827.
- [2] Nguyen, V.T. and Caron, J.F., 2006. A new finite element for free edge effect analysis in laminated composites. *Computers & structures*, 84(22-23), pp.1538-1546.
- [3] Volkersen O. *Luftfahrtforschung* 1938; 15:41.
- [4] Yousefsani, S.A. and Tahani, M., 2013. Analytical solutions for adhesively bonded composite single-lap joints under mechanical loadings using full layerwise theory. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 43, pp.32-41.
- [5] Yousefsani, S.A. and Tahani, M., 2013. Accurate determination of stress distributions in adhesively bonded homogeneous and heterogeneous double-lap joints. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 39, pp.197-208.
- [6] Selahi, E., Tahani, M. and Yousefsani, S.A., 2014. Analytical solution of stress field in adhesively bonded composite single-lap joints under mechanical loadings. *International Journal of Engineering*, 27(3), pp.475-486.



شکل ۴: بررسی همگرایی نتایج حاصل از تکرار حل معادلات، الف) تنش عرضی عمودی و ب) تنش عرضی برشی

علاوه بر تعداد ترم، تعداد تکرار روند حل نیز در نتیجه نهایی تاثیر بسزایی دارد. از آنجا که امکان پیش‌بینی رفتار به‌صورت دقیق در تابع حدس اولیه وجود ندارد، نمی‌توان به پاسخ حاصل از دور اول تکرار بسنده کرد. از این رو، با انجام تکرار روند حل در دورهای متوالی می‌توان از همگرایی پاسخ‌ها و دقت نتایج اطمینان حاصل نمود. در شکل ۴ همگرایی توزیع تنش‌های عرضی عمودی و برشی در خط اتصال بالایی با چهار جمله مستقل در حل معادلات مشاهده می‌شود. همچنین، به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصل از پژوهش حاضر، تنش‌های بین‌لایه‌ای عرضی عمودی و برشی با چهار جمله مستقل در معادلات جایجایی و در دور سوم تکرار با نتایج پژوهش یوسف‌ثانی و همکاران [۱۶] که از تئوری لایه‌ای برای همین منظور استفاده کرده‌اند، در شکل ۵ مقایسه شده است. همان‌طور که در این شکل قابل مشاهده است، با مقایسه توزیع تنش عمودی حاصل از دو روش مورد اشاره می‌توان گفت تئوری کانترووچ در تمام طول خط اتصال قادر است تنش‌های عرضی عمودی را با دقت بالایی پیش‌بینی کند؛ اگرچه در نزدیکی لبه‌های اتصال، بین توزیع تنش عرضی برشی حاصل از تئوری‌های کانترووچ و لایه‌ای تا حدودی اختلاف (ناشسی از عوامل متعددی نظیر خطاهای عددی و یا اثرات لبه) وجود دارد.

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که روش کانترووچ با محاسبات کم و سرعت بالا، توانایی خوبی در تحلیل تنش‌های بین‌لایه‌ای در اتصال نواری دوطرفه غیرهمگن داشته و می‌تواند تنش‌ها را در ناحیه اتصال با

- [10] Kerr, A.D., 1968. An extension of the Kantorovich method. *Quarterly of Applied Mathematics*, 26(2), pp.219-229.
- [11] Reddy, J.N., 2006. *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press.
- [12] Reddy, J.N., 2013. *An introduction to continuum mechanics*. Cambridge university press.
- [13] Feynman, R.P., 1963. *The Feynman lectures on physics. I*, p.46.
- [14] Tahani, M., Nosier, A. and Zebarjad, S.M., 2005. Deformation and stress analysis of circumferentially fiber-reinforced composite disks. *International journal of solids and structures*, 42(9-10), pp.2741-2754.
- [15] Franklin, J.N., 1968. *Matrix Theory*, Prentice-Hall. *Englewood Cliffs, NJ*, 1(1969), pp.141-193.
- [16] Yousefsani, S.A., Tahani, M. and Tahani, M.R., 2012, October. Stress Analysis of Heterogeneous Double-Sided Strap Joints under Mechanical Loading Using Full Layerwise Theory. In *International Conference on Mechanical Engineering and Advanced Technology, ICMEAT 2012*.
- [7] Wang, S., Xie, Z. and Li, X., 2019. A modified analytical model for stress analysis of adhesively bonded stepped-lap joints under tensile load. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 77, p.103794.
- [8] Bahrami, B., Ayatollahi, M.R., Alavi, S.K. and da Silva, L.F.M., 2022. On the prediction of the stress field in adhesive joints using a combined analytical-numerical method. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 116, p.103151.
- [9] Kantorovich, L.V., 1964. *Approximate methods of higher analysis*. Translated by CD Benster, Interscience Publishers Inc., New York, USA, Printed by: P. Noordhoff Ltd., Groningen, The Netherlands.