

یک الگوریتم محورگیری برای برنامه‌ریزی خطی با قیدهای مکمل خطی

خاطره قربانی مقدم^۱، رضا قنبری^۲ و جواد محمدنیا^۳

^۱ عضو هیئت علمی موسسه تحقیقات ریاضی دکتر مصاحب، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران، k.ghorbni@khu.ac.ir

^۲ عضو هیئت علمی دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران، rghanbani@um.ac.ir

^۳ دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

چکیده

مساله‌های برنامه‌ریزی خطی با قیدهای مکمل خطی^۱ (LPCC) جز مساله‌های پرکاربرد در رشته تحقیق در عملیات هستند. LCPP جز مساله‌های NP-hard هستند. در این مقاله، یک حالت خاص از LCPP را بررسی می‌کنیم. این حالت خاص، وقتی رخ می‌دهد که بخواهیم حاصلضرب دو متغیر صفر شوند، یعنی $x_p x_m = 0$. این حالت در بسیاری از مسایل بهینه‌سازی پدیدار می‌شود. از جمله مسایلی که شامل قدرمطلق هستند که نمی‌توان آن‌ها را به صورت مسائل خطی یا مسایل صفر و یک بیان کرد. برای حل این مساله یک الگوریتم شاخه و کران ارائه خواهیم کرد و در پایان الگوریتم را روی مثالی عددی پیاده‌سازی خواهیم کرد.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی خطی، قیدهای مکمل خطی، برنامه‌ریزی صفر و یک، الگوریتم شاخه و کران.

۱- مقدمه

مساله برنامه‌ریزی خطی با قیدهای مکمل خطی به شکل زیر است:

$$\begin{cases} \min g^T x, \\ s. t., \\ a_i^T x \geq b_i, & i = 1, \dots, m, \\ 0 \leq (a_i^T x - b_i) \perp (a_{p+i}^T x - b_{p+i}) \geq 0, & i = m+1, \dots, m+p. \end{cases}$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$. علامت $y \perp z$ به این معنی است که y عمود بر z است. که در حالت برداری به صورت $y^T z = 0$ و برای مقادیر اسکالر به صورت $yz = 0$ نوشته می‌شود. بدون از دست دادن کلیت، می‌توان نامعادلات را دوباره مرتب کرد به طوری که $2p$ نامعادله آخر در p شرط مکمل قرار گیرند [2].

نامعادله‌های $a_i^T x \geq b_i$ را برای $i = 1, \dots, m$ قیدهای استاندارد و برای $i = m+1, \dots, m+p$ قیدهای مکمل می‌نامیم. در حالت کلی، این مسایل را می‌توان با قیدهای تساوی یا حالتی که شرایط مکمل آن‌ها آمیخته باشد، نیز بیان کرد. برای راحتی مسائل LCPP را به شکلی که ذکر شد در نظر می‌گیریم.

LCPP کاربردهای فراوانی دارد [1,3,4,5] که از آن جمله می‌توان به بهینه‌سازی مرتبه‌ای (سلسله مراتبی) است. یک برنامه بهینه‌سازی مرتبه‌ای^۲ می‌تواند چندین مساله‌ی سطح پایین داشته باشد و خود مساله‌های سطح پایین نیز ممکن است چند زیر مساله داشته باشد، که می‌توان آن را با چند LCPP نمایش داد، ولی در اینجا مساله مرتبه‌ای را در نظر می‌گیریم که تنها یک مساله سطح پایین دارد. به عبارتی، مساله زیر را خواهیم داشت:

^۱ Linear Programming with Linear Complementarity Constraints

^۲ Hierarchical Optimization

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,y} c^T x + \sum_{i=1}^r h^{iT} y^i, \\ \text{s. t.}, \\ Ax + \sum_{i=1}^r B^i y^i \geq b, \\ y^i \in \operatorname{argmin}_{v^i} d^{iT} v^i + \frac{1}{2} (v^i)^T Q v^i, \\ \text{s. t.}, \\ C^i v^i \geq g^i - Fx - \sum_{i \neq j, j=1}^r G^j y^j, \end{array} \right. \quad (1)$$

به طوری که $x \in \mathbb{R}^n$, $y^i, v^i \in \mathbb{R}^{p^i}$ و $b \in \mathbb{R}^m$ و $g^i \in \mathbb{R}^{q^i}$ است، و هر Q^i متقارن و نیمه معین مثبت است و c ، d^i ، h^i ، A ، B^i ، C^i ، F ، G^i و Q^i همگی ابعاد مناسبی دارند. این مساله تنها یک متغیر تصمیم y^i دارد. چون هر زیر مساله محدب است، پس بهینگی باید در شرایط K.K. T صدق کند. به عبارتی مساله (1) را می‌توان بر حسب یک مساله LPCC به صورت زیر نوشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min, \quad c^T x + \sum_{i=1}^r h^{iT} y^i, \\ \text{s. t.}, \\ Ax + \sum_{i=1}^r B^i y^i \geq b, \\ Fx + C^i y^i + \sum_{i \neq j, j=1}^r G^j y^j - w^i = g^i, \quad i = 1, \dots, r, \\ d^i + Q^i y^i - C^{iT} \lambda^i = 0, \quad i = 1, \dots, r, \\ 0 \leq w^i \perp \lambda^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, r. \end{array} \right. \quad (2)$$

۲- مسایل LPCC در حالت خاص

در این بخش می‌خواهیم یک حالت خاص در LPCC را بررسی کنیم. این حالت خاص وقتی رخ می‌دهد که بخواهیم حاصلضرب دو متغیر صفر شوند، یعنی $x_p x_m = 0$

۲.۱. مساله برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای عمود بر هم

مساله B را به عنوان مساله اصلی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(B) \begin{cases} \min, & g^T x, \\ \text{s. t.}, & \\ Ax \geq b, & \\ x_{mi} \geq 0, & i = 1, \dots, t \\ x_{pi} \geq 0, & i = 1, \dots, t, \\ x_{oi} \geq 0, & i = 1, \dots, q \\ (x_{pi})^T (x_{mi}) = 0, & i = 1, \dots, t. \end{cases} \quad (2)$$

که در آن $x = (x_{oi}, x_{pi}, x_{mi})$ برای حل این مساله، ابتدا مساله فوق را بدون در نظر گرفتن قید $(x_{pi})^T (x_{mi}) = 0$ ، $i = 1, \dots, t$ ، با استفاده از روش سیمپلکس حل می‌کنیم، اگر در تکرار نهایی به ازای هر قید مکمل، یکی از متغیرهای x_{pi} و x_{mi} در پایه نباشد، در این صورت جواب فوق جواب بهینه مساله اصلی نیز خواهد بود. اگر هر دو متغیر x_{pi} و x_{mi} به ازای هر قید مکمل در پایه باشند، با توجه به این که $x_{pi} \geq 0$ و $x_{mi} \geq 0$ می‌باشند، اگر قید $x_{pi} \leq 0$ یا $x_{mi} \leq 0$ را به مساله اضافه کنیم، موجب می‌شود که $x_{pi} = 0$ یا $x_{mi} = 0$ به دست بیایید، برای این منظور، از روش شاخه و کران به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

الگوریتم ۱ الگوریتم شاخه و کران برای حل مساله

گام ۰: اگر مساله LP آزاد شده نشدنی باشد توقف کن، مساله اصلی نشدنی است.

گام ۱: $z^* \leftarrow \infty$, $L \leftarrow \emptyset$.

گام ۲: اگر جواب مساله آزاد شده، جواب مساله اصلی نیز بود z^* را برابر مقدار بهینه بگذار و خارج شو در غیر این صورت قرار بده: $L \leftarrow L \cup (LP, z_{LP}, k)$ (که LP مساله آزاد شده مساله اصلی و z_{LP} مقدار بهینه مساله LP و k تعداد قیدهای مکمل نقض شده است).

گام ۳: تا هنگامی که $L \neq \emptyset$ است انجام بده:

۳-۱. مساله (LP, z_{LP}, k) را در L که دارای کمترین تعداد قیدهای مکمل نقض شده است، انتخاب کن و مساله‌های

$LP' = LP \cup \{(x_{pi}) \leq 0\}$ و $LP'' = LP \cup \{(x_{mi}) \leq 0\}$ را حل کن، هر کدام از مساله‌های LP' و LP''

که نشدنی شدند را حذف کن و قرار بده:

۳-۱-۱. z'' و z' جواب بهینه مساله‌های LP' و LP'' .

۳-۱-۲. k'' و k' تعداد قیدهای مکمل نقض شده در جواب بهینه مساله‌های LP' و LP'' .

۳-۲. اگر $k' = 0$ و $k'' = 0$ در این صورت $z^* \leftarrow \min\{z^*, z', z''\}$ و به ۳-۵ برو.

۳-۳. اگر $k' = 0$ در این صورت $z^* \leftarrow \min\{z^*, z'\}$ و به ۳-۵ برو در غیر این صورت قرار بده

$L \leftarrow L \cup (LP', z', k')$

۳-۴. اگر $k'' = 0$ در این صورت $z^* \leftarrow \min\{z^*, z''\}$ و به ۳-۵ برو در غیر این صورت قرار بده

$L \leftarrow L \cup (LP'', z'', k'')$

۳-۵. مساله (LP, z_{LP}, k) که در گام ۳ انتخاب شد را از L حذف کن و همچنین اگر مقدار z^* بهبود یافته است،

هر مساله (LP, z_{LP}, k) با z_{LP} را از L حذف کن.

گام ۴: اگر $z^* = +\infty$ چاپ کن "مساله جواب شدنی ندارد"، در غیر این صورت، جواب بهینه مساله را چاپ کن.

قضیه ۱. الگوریتم ۱ خاتمه پیدا می کند و پیچیدگی آن $O(2^t l)$ است که در آن l زمان مورد نیاز برای حل مساله ی برنامه ریزی خطی است.

قضیه ۲. در صورت شدنی بودن مساله B ، جواب تولید شده توسط الگوریتم ۱، بهینه سراسری خواهد بود.

۳- نتیجه و جمع بندی

مساله های برنامه ریزی خطی با قیدهای مکمل خطی (LCPP) جز دسته مسائل مهم در رشته تحقیق در عملیات محسوب می شوند. محقق های بسیاری در این زمینه فعالیت داشته اند و مقالات زیادی در این زمینه به چاپ رسیده است. LCPP جز مسائل NP-سخت هستند که عمدتاً روش های بسیاری برای حل آن ها پیشنهاد شده است. در این مقاله یک حالت خاص مساله LCPP را بررسی کرده ایم. این حالت خاص زمانی رخ می دهد که حاضرب دو متغیر صفر شوند، یعنی $x_p x_m = 0$. الگوریتم شاخه و کران را برای حل این مساله پیشنهاد دادیم و مشاهده شد جواب بدست آمده از الگوریتم پیشنهادی بر روی نمونه های اجرایی از روش های پیشنهادی بهتر است.

۴- مراجع

1. C. Chen, H. Yang, X. Li L. Chen and M. Shi, Optimization of solar and heat pump complementary powered desiccant air conditioning system, Journal of Building Engineering, 87 (2024), <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2024.109084>.
2. H. Fang, S. Leyffer, and T. Munson. A pivoting algorithm for linear programming with linear complementary constraint, Optimization Methods Software, 27(1):89-114 (2012).
3. Z. Guo, J. Wang, F. Dong and H. Xu, Multi-objective optimization of multi-energy complementary system based on cascade utilization of heat storage, Energy Conversion and Management, 299 (2024), <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2023.117864>.
4. J. Hu, J. E. Mitchell, J. S. Pangz and B. Yu. On Linear programs with Linear Complementary Constraints, Journal of Global Optimization, 53 (1):29-51 (2012).
5. J. Hu, J. E. Mitchell, J. S. Pang, K. P. Bennett, and G. Kunapuli, On the global solution of linear programs with linear complementary constraints, SIAM Journal on Optimization, 19 (1):445-471, 2008.