

قوانین استنتاج برای استلزام های احتمالاتی مفصل مبنا

الناز معدنی خوش بخت، محمد امینی* و علی دولتی

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۱۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۶/۱۰

نوع مقاله: علمی مروری

چکیده. در منطق فازی ارزش گذاری گزاره های شرطی با استفاده از عملگرهای استلزام انجام می شود. عملگرهای استلزامی توابع دو متغیره ای بر تکیه گاه مربع واحد و تعمیمی از استلزام دو ارزشی منطق کلاسیک هستند. روش های گوناگونی برای ساخت عملگرهای استلزامی ارائه شده است. یک رده از این توابع، استلزام های احتمالاتی هستند که براساس توابع مفصل ساخته می شوند. در این مقاله به معرفی روش های ساخت چهار خانواده از استلزام های احتمالاتی مفصل مبنا پرداخته می شود و برخی از قوانین استنتاج برای دو خانواده از این عملگرها مطالعه می شود. در پایان کاربردهایی از این مفاهیم در پزشکی، کشاورزی و منابع آب های زیرزمینی ارائه می شود.

۱. مقدمه

در منطق کلاسیک دو ارزشی برای رابطه استلزام $p \rightarrow q$ تعریف‌های مختلفی وجود دارد که رایج‌ترین آن تعریف $p \vee q \sim$ یا معادل آن $(p \wedge \sim q) \sim$ است. اگر x ارزش (یا درجه درستی) گزاره p و y ارزش گزاره q باشد، تابع $I(x, y)$ که $I: \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$: درجه درستی گزاره «اگر p آنگاه q » را نشان می‌دهد که از چهار حالت ممکن در حالت $x = 1$ و $y = 0$ نادرست و در سه حالت دیگر درست است. در منطق فازی ارزش گزاره‌ها در استلزام $p \rightarrow q$ مقادیری در بازه $[0, 1]$ است [۴]. عملگرهای استلزام (یا استلزام‌های فازی) تعمیمی از استلزام دو ارزشی منطق کلاسیک هستند که برای ارزش‌گذاری گزاره‌ها استفاده می‌شوند و در زمینه‌های مختلفی مانند منطق فازی، کنترل فازی، نظریه تصمیم و سیستم‌های هوشمند کاربرد دارند. از آنجایی که در هر زمینه‌ای با اهداف کاربردی متفاوت، استلزام‌های ویژه‌ای نیاز هست، بسیاری از محققان توجه خود را به مطالعه نظری استلزام‌ها و روش‌های ساخت چنین توابعی معطوف کرده‌اند. چهار روش معمول برای ساخت عملگرهای استلزام عبارتند از: [۲۰]

آ) استلزام‌های ساخته شده از رابط‌های فازی: استفاده از عملگرهای منطقی فازی یعنی T -نرم، S -نرم و عملگر نفی یک روش متداول برای ساخت استلزام است. (S, N) -استلزام، R -استلزام و QL -استلزام، شناخته شده‌ترین استلزام‌های ساخته شده با این روش هستند [۸، ۱۱].

ب) استلزام‌های ساخته شده از توابع مولد: در این روش با استفاده از توابع یک متغیره با ویژگی‌های خاص که اغلب با مولدهای دیگر عملگرهای منطقی فازی مانند T -نرم در ارتباط هستند، استلزام‌های جدیدی ساخته می‌شود. این روش بعد از معرفی دو خانواده از عملگرهای استلزام با نام‌های f -استلزام و g -استلزام توسط یاگر^۱ [۳۰] مطرح شد و شامل خانواده عملگرهای استلزام پیشنهاد شده در [۳۲] هم می‌شود.

ج) استلزام‌های ساخته شده از دیگر عملگرهای استلزام: این روش شامل استفاده از عملیات شبکه $\max$ و $\min$ ، کلاس‌های مزدوج، ترکیب محدب، ترکیب $\sup$ -* و غیره می‌شود [۹، ۱۱، ۲۳]. اخیراً محققان بر اساس مجموع‌های ترتیبی روش‌های مختلفی را برای ساختن عملگرهای استلزام از یک خانواده معین ارائه نموده‌اند [۲۹، ۳۱، ۳۳]. علاوه بر این، ساختن خانواده‌ای از عملگرهای استلزام با استفاده از یک تابع مولد n متغیره و n عملگر استلزام شناخته شده که در [۱۳] معرفی شده است، جزو این روش به شمار می‌آید.

^۱Yager

د) استلزام‌های ساخته شده با استفاده از توابع چند جمله‌ای: در این روش با در نظر گرفتن یک تابع چند جمله‌ای دو متغیره و اعمال شرایطی بر ضرایب چند جمله‌ای، یک عبارت نهایی به دست می‌آید که در تعریف عملگر استلزام صدق می‌کند [۲۱، ۲۲].

یکی از روش‌های جدید برای ساختن استلزام‌ها، استفاده از مفهوم احتمال شرطی است. در این روش تعبیر احتمالی گزاره شرطی $p \rightarrow q$ مورد توجه است و بر اساس پیشامدهای تصادفی به جای گزاره‌ها، بیان می‌شود. این دیدگاه منجر به تعریف استلزام‌های احتمالاتی می‌شود که با استفاده از تابع مفصل ساخته می‌شوند و ارتباطی بین نظریه احتمال و منطق فازی ایجاد می‌کنند.

علم آمار و منطق فازی هر دو برای مطالعه الگوهای شامل عدم قطعیت به کار می‌روند. علم آمار برای مطالعه الگوهای مبتنی بر عدم قطعیت آماری (پیشامدهای تصادفی) و منطق فازی برای مطالعه الگوهای مبتنی بر عدم قطعیت امکانی (ابهام و نادقیق بودن) مناسب هستند. این دو مبحث با هم در تناقض نیستند و دیگری را شامل نمی‌شوند. بنابراین می‌توان در یک مسئله از هر دو بهره گرفت [۳]. در آمار و احتمال کلاسیک، برای به دست آوردن احتمال رخداد یک پیشامد، آزمایش تصادفی از یک فضای نمونه با اعضای یکسان انجام می‌شود. اما در آمار و احتمال فازی هر یک از اعضای فضای نمونه با درجه عضویت مختص به خود متعلق به این فضا هستند.

در این مقاله ۴ رده از عملگرهای استلزام احتمالاتی مفصل مبنا برگرفته از مراجع [۱۲، ۱۴، ۱۵، ۲۴] مطالعه می‌شود. علاوه بر این، روش‌هایی برای ساخت استلزام بر اساس توابع شبه مفصل و مفصل گاوسی در مراجع [۲۷، ۲۵، ۲۸] بیان شده است که در تحقیقات آینده مدنظر ما نیز خواهد بود. در ادامه این مقاله، ابتدا به بیان مختصر مفاهیم پایه‌ای پرداخته می‌شود. سپس در بخش‌های ۳ تا ۶ به ترتیب استلزام احتمالی، استلزام شرطی، S -استلزام احتمالی و استلزام $J_{C_1, C_2, I}$ مطالعه می‌شود. در بخش ۷ به بررسی قوانین عکس نقیض، قانون تفکیک دو مقدم و T -شرطی برای استلزام احتمالی و S -استلزام احتمالی پرداخته می‌شود. کاربردهایی از عملگرهای استلزام در بخش ۸ ارائه می‌شود. در بخش پایانی جمع بندی و نتیجه‌گیری مقاله بیان می‌شود.

۲. مفاهیم مقدماتی

در این بخش، برخی از مفاهیم پایه‌ای مربوط به عملگر استلزام و تابع مفصل ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۲. ([۱۱]) تابع $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2 : I$ یک عملگر استلزام نامیده می‌شود اگر برای هر $x_1, x_2, y_1, y_2, x, y \in [0, 1]$ ویژگی‌های زیر را دارا باشد

الف) برای هر y و $x_1 < x_2$ و $I(x_1, y) \geq I(x_2, y)$

$$\begin{aligned} \text{ب) برای هر } x \text{ و } y_1 < y_2 : I(x, y_1) &\leq I(x, y_2) \\ \text{ج) } I(0, 0) = I(0, 1) = I(1, 1) = 1 - I(1, 0) &= 1 \end{aligned}$$

از تعریف ۱.۲ مشاهده می‌شود که برای هر $x, y \in [0, 1]$ $I(0, y) = I(x, 1) = 1$.

تعریف ۲.۲. استلزام I دارای ویژگی خنثی بودن درستی است، اگر برای هر $y \in [0, 1]$ $I(1, y) = y$.

تعریف ۳.۲. ([۱۱]) تابع $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ یک نرم مثلثی یا T -نرم نامیده می‌شود، اگر برای هر $x, y, z \in [0, 1]$ در شرایط زیر صدق کند

$$\begin{aligned} \text{الف) شرط مرزی: } T(x, 1) &= x \\ \text{ب) شرط جابه‌جایی: } T(x, y) &= T(y, x) \\ \text{ج) شرط شرکت‌پذیری: } T(x, T(y, z)) &= T(T(x, y), z) \\ \text{د) شرط یکنوایی: } y \leq z &\implies T(x, y) \leq T(x, z) \end{aligned}$$

عملگر T -نرم تعمیم ترکیب عطفی کلاسیک $\wedge$ ، معادل اشتراک برای مجموعه‌ها است. متداول‌ترین عملگرهای T -نرم عبارت‌اند از: $T_M(x, y) = \min(x, y)$ (T -نرم مینیم)، $T_P(x, y) = xy$ (T -نرم ضرب جبری) و $T_{LK}(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$ (T -نرم لوکاسویچ).

تعریف ۴.۲. فرض کنید T یک تابع T -نرم باشد. در این صورت T

$$\begin{aligned} \text{الف) پیوسته است، اگر در هر دو مولفه پیوسته باشد.} \\ \text{ب) مثبت است، اگر } T(x, y) = 0 \text{ آنگاه } x = 0 \text{ یا } y = 0. \end{aligned}$$

تعریف ۵.۲. ([۱۱]) تابع $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ یک عملگر نفی نامیده می‌شود اگر N نزولی باشد با $N(0) = 1$ و $N(1) = 0$.

عملگر نفی تعمیم نقیض کلاسیک $\sim$ است که جدول ارزش آن دو حالت دارد: $\sim 0 = 1$ و $\sim 1 = 0$.

عملگر نفی استاندارد تابع $N_C(x) = 1 - x$ است. تابع $N_I(x) = I(x, 0)$ عملگر نفی متناظر با استلزام I است که عملگر نفی طبیعی نامیده می‌شود.

$$\text{کوچک‌ترین عملگر نفی } N_{D_1} \text{ است که به صورت } N_{D_1}(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ تعریف می‌شود.}$$

تعریف ۶.۲. عملگر نفی N قوی است، اگر برای هر $x \in [0, 1]$ ، $N(N(x)) = x$.

تعریف ۷.۲. ([۲۶]) تابع $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ یک مفصل نامیده می‌شود، اگر شرایط زیر برقرار باشند

الف) برای تمام $x \in [0, 1]$ ، $C(x, 0) = C(0, x) = 0$ ، $C(x, 1) = C(1, x) = x$.
 ب) تابع C صعودی باشد، یعنی برای تمام $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1]$ به طوری که $x_1 \leq x_2$ و $y_1 \leq y_2$

$$C(x_2, y_2) + C(x_1, y_1) \geq C(x_1, y_2) + C(x_2, y_1).$$

قضیه ۸.۲. ([۲۶]) اگر $C(x, y)$ یک تابع مفصل باشد، آنگاه $C(x, y)$ در شرط لیب شیتس^۱ صدق می‌کند. یعنی

$$|C(x_2, y_2) - C(x_1, y_1)| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0, 1]^2$$

بنابراین مفصل $C(x, y)$ پیوسته یکنواخت است.

قضیه ۹.۲. ([۱۸]) فرض کنید T یک تابع T -نرم باشد. در این صورت T یک مفصل است اگر و فقط اگر در شرط لیب شیتس صدق کند.

قضیه ۱۰.۲. ([۱۸]) اگر مفصل $C(x, y)$ شرکت‌پذیر باشد، آنگاه $C(x, y)$ یک T -نرم پیوسته است.

سه تابع مفصل مهم عبارت‌اند از: $\Pi(x, y) = xy = T_P(x, y)$ (مفصل استقلال)،
 $W(x, y) = \max(x + y - 1, 0) = T_{LK}(x, y)$ (مفصل کران پایین فرشه- هافدینگ^۲) و
 $M(x, y) = \min(x, y) = T_M(x, y)$ (مفصل کران بالای فرشه- هافدینگ).
 هر مفصل C در نابرابری زیر صدق می‌کند

$$W(x, y) \leq C(x, y) \leq M(x, y), \quad x, y \in [0, 1].$$

قضیه ۱۱.۲. ([۲۶]) فرض کنید $C(x, y)$ یک تابع مفصل باشد. در این صورت مشتق جزئی
 ، برای تمام x ها، تقریباً همه جا وجود دارد، غیر نزولی است و $0 \leq \frac{\partial C(x, y)}{\partial x}$ به
 طور مشابه، مشتق جزئی $\frac{\partial C(x, y)}{\partial y}$ ، برای تمام y ها، تقریباً همه جا وجود دارد، غیر نزولی است و
 $0 \leq \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} \leq 1$

¹Lipschitz

²Fréchet-Hoeffding

تعریف ۱۲.۲. تابع $\hat{C} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ با ضابطه

$$\hat{C}(x, y) = x + y - 1 + C(1 - x, 1 - y),$$

مفصل بقای متناظر با مفصل $C(x, y)$ نامیده می‌شود.

۳. استلزام احتمالی

اولین خانواده از عملگرهای استلزام احتمالاتی مفصل مبنا که توسط گرژگورزسکی^۱ [۱۴] معرفی شد، در این بخش ارائه می‌گردد و شرط لازم و کافی برای استلزام بودن این عملگر بیان می‌شود.

فرض کنید Ω یک فضای نمونه‌ای، $\mathcal{F}$ یک سیگما جبر از پیشامدهای Ω و P یک اندازه احتمال روی $\mathcal{F}$ باشد. فرض کنید A و B دو پیشامد (گزاره) در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشند. ارزش استلزام $A \rightarrow B$ زمانی درست است که از درست بودن A بتوان درست بودن B را نتیجه گرفت. معمولاً در عمل، نمی‌توان به طور قطع از درست بودن پیشامدها اطمینان حاصل کرد. اما می‌توانیم احتمال درست بودن A یعنی $P(A)$ و $A \rightarrow B$ یعنی $P(A \rightarrow B)$ را پیش‌بینی کنیم. یک روش برای پیش‌بینی احتمال یک استلزام، احتمال شرطی $P(B|A)$ است که از رابطه زیر حاصل می‌شود

$$(۱.۳) \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

که در آن $P(A) > 0$. از این رو بنا به (۱.۳)، با دانستن احتمال‌های $P(A)$ و $P(B|A)$ ، می‌توان احتمال $P(A \cap B)$ را بیابیم. بر همین اساس، عملگرهای استلزام احتمالاتی ساخته می‌شوند.

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی یکنواخت بر بازه $(0, 1)$ با مفصل متناظر $C(x, y)$ باشند. در این صورت برای هر $x \in (0, 1], y \in [0, 1]$ ،

$$(۲.۳) \quad P(Y \leq y | X \leq x) = \frac{P(Y \leq y, X \leq x)}{P(X \leq x)} = \frac{C(x, y)}{x}.$$

بر اساس رابطه (۲.۳)، عملگر استلزام احتمالی تعریف می‌شود.

^۱Grzegorzewski

تعریف ۱.۳. فرض کنید $C(x, y)$ یک مفصل دلخواه باشد. در این صورت، تابع

$$I_C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$$

$$(3.3) \quad I_C(x, y) = \begin{cases} \frac{C(x, y)}{x}, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad y \in [0, 1],$$

یک استلزام احتمالی (بر مبنای مفصل $C(x, y)$) نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۳. استلزام احتمالی I_C یک عملگر استلزام است، اگر و فقط اگر $\frac{C(x, y)}{x}$ برای هر $y \in [0, 1]$ نسبت به x غیر صعودی باشد.

اثبات. شرط ج تعریف ۱.۲ با توجه به ویژگی الف تعریف تابع مفصل برقرار است. غیرنزولی بودن I_C نسبت به مولفه y از غیرنزولی بودن تابع مفصل نسبت به مولفه‌های آن برقرار است. شرط غیرصعودی بودن I_C نسبت به مولفه x معادل با شرط بیان شده در قضیه است. $\square$

مثال ۳.۳. خانواده مفصل علی-میخائیل-حق^۱ (AMH) با ضابطه

$$C_\theta(x, y) = \frac{xy}{1 - \theta(1-x)(1-y)}, \quad \theta \in [-1, 1]$$

را در نظر بگیرید [۲۶]. در این صورت

$$I_{C_\theta}(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{1 - \theta(1-x)(1-y)}, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad y \in [0, 1].$$

تابع I_{C_θ} یک عملگر استلزام احتمالی است، اگر و فقط اگر برای هر $x > 0$ ،

$$\frac{\partial}{\partial x} I_{C_\theta}(x, y) = \frac{-\theta y(1-y)}{(1 - \theta(1-x)(1-y))^2} \leq 0. \quad \theta \in [0, 1]$$

۴. استلزام شرطی

دولتی و همکاران [۱۲] با استفاده از مشتق جزئی تابع مفصل، خانواده دیگری از عملگرهای استلزام احتمالاتی مفصل مینا را معرفی کردند. در این بخش به روش ساخت و بررسی شرط لازم برای استلزام بودن این عملگر پرداخته می‌شود.

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی یکنواخت بر بازه $(0, 1)$ با مفصل متناظر $C(x, y)$ باشد. در این صورت برای هر $x, y \in [0, 1]$ [۲۶]

$$P(Y \leq y | X = x) = \frac{\partial}{\partial x} C(x, y).$$

¹ Ali-Mikhail-Haq

بر این اساس، عملگر استلزام شرطی تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۴. فرض کنید $C(x, y)$ یک مفصل دلخواه باشد. در این صورت، تابع

$$I_C^* : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1] \text{ با ضابطه}$$

$$(۱.۴) \quad I_C^*(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial^*}{\partial x} C(x, y), & x > 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad y \in [0, 1],$$

که در آن،

$$\frac{\partial^*}{\partial x} C(x, y_0) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} C(x, y_0), & x \in D_{y_0}, \\ \inf \left\{ \frac{\partial}{\partial x} C(x_1, y_0) \mid x_1 \in (0, x) \cap D_{y_0} \right\}, & x \notin D_{y_0}, \end{cases}$$

$$D_{y_0} = \left\{ x \in [0, 1] \mid \frac{\partial}{\partial x} C(x, y_0) \text{ باشد} \right\},$$

یک استلزام شرطی (بر مبنای مفصل $C(x, y)$) نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۴. تابع I_C^* یک عملگر استلزام است، اگر و فقط اگر مفصل $C(x, y)$ نسبت به مولفه x مقعر باشد.

اثبات. شرط ج تعریف ۱.۲ با توجه به ویژگی الف در تعریف تابع مفصل برقرار است. از تابع توزیع بودن $\frac{\partial}{\partial x} C(x, y)$ نسبت به y غیر نزولی بودن I_C^* نسبت به y برقرار است. بنابراین $I_C^*(x, y)$ عملگر استلزام است اگر و فقط اگر $\frac{\partial}{\partial x} C(x, y)$ نسبت به مولفه x غیر صعودی یا به طور معادل $C(x, y)$ نسبت به x مقعر باشد. $\square$

مثال ۳.۴. خانواده مفصل فارلی-گمبرن-مورگنسترن^۱ (FGM) با ضابطه

$$C_\theta(x, y) = xy(1 + \theta(1 - x)(1 - y)), \quad \theta \in [-1, 1]$$

را در نظر بگیرید [۲۶]. در این صورت

$$(۲.۴) \quad I_{C_\theta}^*(x, y) = \begin{cases} y(1 + \theta x(1 - x)(1 - y)), & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$I_{C_\theta}^*$ یک عملگر استلزام است، اگر و فقط اگر $-\theta y(1 - y) \leq 0$ که معادل $\frac{\partial^2}{\partial x^2} C_\theta(x, y) = -2\theta y(1 - y) \leq 0$ است با این که $\theta \in [0, 1]$.

^۱Farlie-Gumble-Morgenstren

مثال ۴.۴. خانواده مفصل مارشال-اولکین^۱ با ضابطه $C_{\alpha,\beta}(x,y) = xy \min(x^{-\alpha}, y^{-\beta})$ و $\alpha, \beta \in [0, 1]$ را در نظر بگیرید [۲۶]. این مفصل نسبت به هر مولفه مقعر است. بنابراین $I_{C_{\alpha,\beta}}^*$ یک عملگر استلزام است.

۵. S - استلزام احتمالی

در این بخش، روش ساخت S - استلزام احتمالی که توسط گرگزورژسکی [۱۵] معرفی شد، ارائه می‌شود. در ادامه مشاهده می‌شود که این عملگر در حالت کلی یک عملگر استلزام است. فرض کنید A و B دو پیشامد (گزاره) در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشند. در این صورت، تفسیر احتمالی تعریف رابطه استلزام در منطق کلاسیک $(p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q)$ را به صورت زیر می‌توان بیان نمود

$$\begin{aligned} P(A' \cup B) &= P(A') + P(B) - P(A' \cap B) \\ &= P(A') + P(A \cap B) \\ &= P(A \cap B) - P(A) + 1. \end{aligned}$$

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی یکنواخت بر بازه $(0, 1)$ با مفصل متناظر $C(x, y)$ باشند. بنابراین برای هر $x, y \in [0, 1]$ داریم

$$\begin{aligned} P(Y \leq y \text{ یا } X \leq x) &= P(X \leq x, Y \leq y) - P(X \leq x) + 1 \\ (1.5) \quad &= C(x, y) - x + 1. \end{aligned}$$

بر اساس رابطه (۱.۵)، S - استلزام احتمالی تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۵. فرض کنید $C(x, y)$ یک مفصل دلخواه باشد. در این صورت تابع $\tilde{I}_C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ با ضابطه

$$(2.5) \quad \tilde{I}_C(x, y) = C(x, y) - x + 1,$$

یک S - استلزام احتمالی (بر مبنای مفصل $C(x, y)$) نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۵. اگر $\tilde{I}_C$ یک S - استلزام احتمالی باشد، آنگاه یک عملگر استلزام است.

¹ Marshall-Olkin

اثبات. برای اثبات شرط الف تعریف ۱.۲، نشان می‌دهیم که $\tilde{I}_C$ نسبت به مولفه x نزولی است. به عبارت دیگر $\frac{\partial}{\partial x} \tilde{I}_C(x, y) \leq 0$. چون مشتق رابطه (۲.۵) نسبت به مولفه x به صورت $\frac{\partial}{\partial x} C(x, y) - 1$ است و بنا به قضیه ۱.۲، $\frac{\partial}{\partial x} C(x, y) \leq 1$ ، در نتیجه $\frac{\partial}{\partial x} \tilde{I}_C(x, y) \leq 0$. به طور مشابه، برای شرط ب، ثابت می‌شود که $\frac{\partial}{\partial y} \tilde{I}_C(x, y) \geq 0$. شرط ج نیز با توجه به ویژگی الف در تعریف تابع مفصل برقرار است. در نتیجه $\tilde{I}_C$ یک عملگر استلزام است. $\square$

جدول ۱: چند S -استلزام احتمالی رایج

$C(x, y)$	$\tilde{I}_C(x, y)$
$\Pi(x, y)$	$\tilde{I}_{\Pi}(x, y) = xy - x + 1$
$M(x, y)$	$\tilde{I}_M(x, y) = \min(x, y) - x + 1$
$W(x, y)$	$\tilde{I}_W(x, y) = \max(x + y - 1, 0) - x + 1$

۶. استلزام $J_{C_1, C_2, I}$

در این بخش، یک روش نسبتاً پیچیده برای ساخت عملگرهای استلزام معرفی می‌شود. این روش برخی از ساختارهای اولیه استلزام‌های مفصل مبنا را گسترش می‌دهد و همچنین انواع جدیدی از عملگرهای استلزام تولید می‌کند.

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی یکنواخت بر بازه $(0, 1)$ با مفصل متناظر $C(x, y)$ باشند. در این صورت مشابه بخش ۴، برای هر $x, t \in [0, 1]$ داریم $\frac{\partial}{\partial t} C(x, t) = P(X \leq x | Y = t)$. بر این اساس مزیار^۱ و کلیساروا^۲ [۲۴] یک روش جدید برای ساخت عملگرهای استلزام مفصل مبنا ارائه کردند.

قضیه ۱.۶. فرض کنید $C_1(x, y)$ و $C_2(x, y)$ دو تابع مفصل و I عملگر استلزام انتگرال‌پذیر باشند. در این صورت، تابع $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$: $J_{C_1, C_2, I}$ با ضابطه

$$(۱.۶) \quad J_{C_1, C_2, I}(x, y) = \int_0^1 I(f_{C_1, x}(t), f_{C_2, y}(t)) dt$$

^۱Mesiar

^۲Kolesárová

که در آن

$$f_{C,x}(t) = \sup_{z \in [0,x]} \{g_{C,z}(t)\},$$

$$g_{C,x}(t) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} C(x, t), & \text{اگر مشتق وجود داشته باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

یک عملگر استلزام است.

اثبات. برای اثبات شرط الف تعریف ۱.۲، اگر $x_1, x_2, t \in [0, 1]$ و $x_1 \leq x_2$ ، آنگاه $f_{C,x_1}(t) \leq f_{C,x_2}(t)$. چون تابع I نسبت به متغیر اول غیر صعودی است، داریم $I(f_{C_1,x_1}(t), f_{C_2,y}(t)) \geq I(f_{C_1,x_2}(t), f_{C_2,y}(t))$. بنابراین

$$\int_0^1 I(f_{C_1,x_1}(t), f_{C_2,y}(t)) dt \geq \int_0^1 I(f_{C_1,x_2}(t), f_{C_2,y}(t)) dt.$$

اثبات شرط ب نیز مشابه است. شرط ج نیز با توجه به استلزام بودن I به آسانی به دست می‌آید. $\square$

مثال ۲.۶. عملگر استلزام I با نفی طبیعی کلاسیک، مفصل دلخواه $C(x, y)$ و مفصل $C_a(x, y)$ با ضابطه

$$C_a(y, t) = \text{median}\{0, t + ay - a, y\}, \quad y, t, a \in [0, 1],$$

را در نظر بگیرید. در این صورت

$$f_{C_a,y}(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t + a(y - 1) < y \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & a(1 - y) < t < a + y(1 - a) \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 J_{C,C_a,I}(x,y) &= \int_0^1 I(f_{C,x}(t), f_{C_a,y}(t)) dt \\
 &= \int_0^{a(1-y)} I(f_{C,x}(t), 0) dt + \int_{a(1-y)}^{a+y(1-a)} I(f_{C,x}(t), 1) dt \\
 &\quad + \int_{a+y(1-a)}^1 I(f_{C,x}(t), 0) dt \\
 &= 1 - \int_0^{a(1-y)} f_{C,x}(t) dt - \int_{a+y(1-a)}^1 f_{C,x}(t) dt \\
 &= 1 - x - C(x, a(1-y)) + C(x, a + (1-a)y).
 \end{aligned}$$

نتیجه ۳.۶. اگر تابع $C(x, y)$ یک مفصل باشد، آنگاه برای هر $a \in [0, 1]$ ، تابع $I_{C,a} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ با ضابطه

$$(۲.۶) \quad I_{C,a}(x, y) = 1 - x - C(x, a(1-y)) + C(x, a + (1-a)y),$$

برای هر $x, y \in [0, 1]$ ، یک عملگر استلزام با نفی طبیعی کلاسیک است.

ملاحظه ۴.۶. با قرار دادن $a = 0$ در رابطه (۲.۶)، S - استلزام احتمالی بر مبنای مفصل $C(x, y)$ به دست می‌آید. بنابراین S - استلزام احتمالی حالت خاصی از قضیه ۱.۶ است.

ملاحظه ۵.۶. هر ترکیب محدب از عملگرهای استلزام $I_{C_1,a}$ و $I_{C_2,a}$ متناظر با مفصل‌های $C_1(x, y)$ و $C_2(x, y)$ ، یک عملگر استلزام $J_{C_1,C_2,I}$ است.

اثبات. چون هر ترکیب محدب از توابع مفصل، یک تابع مفصل است و می‌توان نوشت

$$J_{\lambda,C_1,C_2}(x, y) = C^*(x, \lambda + (1-\lambda)y) - C^*(x, (1-\lambda)y) - x + 1$$

که در آن $C^*(x, y) = \beta C_1(x, y) + (1-\beta)C_2(x, y)$ ، $0 \leq \beta \leq 1$ ، نتیجه برقرار است.

مثال ۶.۶. اگر در رابطه (۲.۶) $a = 0.5$ ، آنگاه داریم $I_{W,0.5}(x, y) = I_{M,0.5}(x, y)$. زیرا

$$\begin{aligned}
 I_{W,0.5}(x, y) &= 1 - x - \max(x + \frac{1-y}{2} - 1, 0) + \max(x + \frac{1+y}{2} - 1, 0) \\
 &= 1 - x + \min(x, \frac{y+1}{2}) - \min(x, \frac{1-y}{2}) \\
 &= I_{M,0.5}(x, y)
 \end{aligned}$$

۷. قوانین استنتاج برای عملگرهای استلزام

همان طور که در مقدمه بیان شد، در هر زمینه‌ای از منطق فازی با اهداف کاربردی گوناگون، استلزام‌های ویژه‌ای نیاز است. به جز ویژگی‌هایی که در تعریف ۱.۲ بیان شد، عملگر استلزام در حالت کلی باید از لحاظ منطقی تعمیم مناسبی از استلزام در منطق دوازده‌گانه باشد. به همین دلیل می‌توان برای عملگر استلزام ویژگی‌های دیگری نیز در نظر گرفت. این ویژگی‌ها عبارت‌اند از:

$$(۱) \text{ ویژگی خنثی بودن درستی: } I(1, y) = y$$

$$(۲) \text{ اصل همانی: } I(x, x) = 1$$

$$(۳) \text{ ویژگی تبادل‌پذیری: } I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z))$$

$$(۴) \text{ ویژگی ترتیبی: } I(x, y) = 1 \iff x \leq y$$

برای هر عملگر استلزام تمام ویژگی‌ها به طور همزمان برقرار نیست. این ویژگی‌ها برای انتخاب یک عملگر استلزام برای یک کاربرد خاص مهم هستند. برخی از ویژگی‌های بیان شده برای استلزام‌های احتمالاتی مفصل مبنا در مراجع [۱۶، ۱۰، ۲۴] بررسی شده است.

در منطق کلاسیک قوانین استنتاج زیادی وجود دارد که شامل استلزام هستند. از جمله این قوانین می‌توان به قوانین عکس نقیض، تفکیک دو مقدم و قیاس استثنایی اشاره کرد. تعمیم این قوانین در منطق فازی بر مبنای عملگر استلزام و عملگرهای فازی دیگر تعریف می‌شود. طبق مطالعات انجام شده، عملگرهای استلزامی که در این قوانین صدق کنند، از اهمیت بالاتری در مسائل کاربردی برخوردار هستند. به عنوان مثال عملگرهای استلزامی که در قوانین عکس نقیض صدق می‌کنند، نقش مهمی در استدلال تقریبی و سیستم‌های پشتیبانی تصمیم ایفا می‌کنند. در این بخش قوانین عکس نقیض، تفکیک دو مقدم و T —شرطی برای استلزام احتمالی و S —استلزام احتمالی بررسی می‌شود [۱۶، ۱۰].

۱.۷. **قوانین عکس نقیض.** یک قانون مهم در منطق کلاسیک قانون عکس نقیض است که به صورت $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ بیان می‌شود. با توجه به این که نقیض کلاسیک در قانون نفی مضاعف $(\sim(\sim p) = p)$ صدق می‌کند، قوانین زیر نیز در منطق کلاسیک وجود دارد

$$\sim p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow p, \quad p \rightarrow \sim q \equiv q \rightarrow \sim p.$$

در این بخش ابتدا تعمیم قوانین عکس نقیض در منطق فازی یادآوری و سپس این قوانین برای استلزام احتمالی و S —استلزام احتمالی بررسی می‌شود.

تعمیم قوانین عکس نقیض در منطق فازی بر مبنای عملگر استلزام و عملگر نفی می‌باشد که در تعریف بعد بیان شده است [۱۱].

تعریف ۱.۷. فرض کنید I عملگر استلزام و N عملگر نفی باشد. در این صورت الف) I در قانون عکس نقیض با نفی N صدق می‌کند، اگر

$$(۱.۷) \quad I(x, y) = I(N(y), N(x)), \quad x, y \in [0, 1]$$

ب) I در قانون عکس نقیض مقدم با نفی N صدق می‌کند، اگر

$$(۲.۷) \quad I(N(x), y) = I(N(y), x), \quad x, y \in [0, 1]$$

ج) I در قانون عکس نقیض تالی با نفی N صدق می‌کند، اگر

$$(۳.۷) \quad I(x, N(y)) = I(y, N(x)), \quad x, y \in [0, 1]$$

قضیه ۲.۷. روابط (۱.۷) و (۲.۷) برای استلزام احتمالی با هر عملگر نفی N برقرار نیست.

اثبات. فرض کنید I_C یک استلزام احتمالی باشد. در این صورت

$$(۴.۷) \quad I_C(1, y) = \frac{C(1, y)}{1} = C(1, y) = y, \quad y \in [0, 1].$$

از طرفی بنا به [۶، لم ۹.۲.۳]، $N_{I_C} = N_{D_1}$ که یک نفی قوی نیست. بنابراین برای هر $y \in [0, 1]$

$$I(N_I(y), N_I(1)) = I(N_I(y), 0) = N_I(N_I(y)) \neq y = I(1, y)$$

در نتیجه I_C در رابطه (۱.۷) با هر عملگر نفی صدق نمی‌کند. از طرف دیگر با توجه به این که $N_{I_C} = N_{D_1}$ نفی قوی پیوسته نیست، بنا به [۶، نتیجه ۱۹.۵.۱] می‌توان نتیجه گرفت که I_C با هر عملگر نفی در رابطه (۲.۷) صدق نمی‌کند. $\square$

قضیه ۳.۷. رابطه (۳.۷) برای استلزام احتمالی تنها با N_{D_1} برقرار است.

اثبات. برای هر استلزام احتمالی I_C و هر $x \in [0, 1]$ نتیجه می‌شود

$$I_C(x, N_{D_1}(y)) = \begin{cases} 0, & x, y > 0 \\ 1, & x = 0 \text{ یا } y = 0 \end{cases} = I_C(y, N_{D_1}(x))$$

برای نشان دادن یکتایی نفی N_{D_1} ، فرض کنید رابطه (۳.۷) برای I_C با نفی $N \neq N_{D_1}$ برقرار باشد. با استفاده از رابطه (۴.۷)، برای هر $x \in [0, 1]$ خواهیم داشت

$$N(x) = I_C(1, N(x)) = I_C(x, N(1)) = I_C(x, 0) = N_{I_C}(x).$$

از طرفی می‌دانیم $N_{I_C} = N_{D_1}$ که یک تناقض است. در نتیجه رابطه (۳.۷) برای هر استلزام احتمالی، تنها با عملگر نفی طبیعی N_{D_1} نتیجه می‌دهد. $\square$

گزاره ۴.۷. اگر $\tilde{I}_C$ یک S -استلزام احتمالی باشد که با نفی N در روابط (۱.۷) یا (۲.۷) یا (۳.۷) صدق کند آنگاه $N = N_C$.

اثبات. به سادگی می‌توان نشان داد که هر S -استلزام احتمالی $\tilde{I}_C$ از چپ خنثی است. حال اگر $\tilde{I}_C$ با نفی N در رابطه (۱.۷) صدق کند، آنگاه بنا به [۶، لم ۱۴.۵.۱] ثابت می‌شود که $N = N_{\tilde{I}_C}$ عملگر نفی قوی است. در نتیجه برای هر $x \in [0, 1]$

$$N(x) = N_{\tilde{I}_C}(x) = \tilde{I}_C(x, 0) = C(x, 0) - x + 1 = 1 - x = N_C(x).$$

اگر $\tilde{I}_C$ با نفی N در رابطه (۲.۷) صدق کند، آنگاه برای هر $x \in [0, 1]$

$$x = \tilde{I}_C(1, x) = \tilde{I}_C(N(0), x) = \tilde{I}_C(N(x), 0) = N_{\tilde{I}_C}(N(x))$$

و از آن جایی که $N_{\tilde{I}_C} = N_C$ بنابراین $1 - N(x) = x$ و در نتیجه $N = N_C$.
به طور مشابه با در نظر گرفتن رابطه (۳.۷) نیز می‌توان ثابت کرد که $N = N_{\tilde{I}_C} = N_C$. $\square$

نتیجه ۵.۷. S -استلزام احتمالی $\tilde{I}_C$ در قانون عکس نقیض (۱.۷) با نفی N_C صدق می‌کند، اگر و فقط اگر

$$(5.7) \quad C(x, y) = \hat{C}(y, x), \quad x, y \in [0, 1].$$

اثبات. برای هر S -استلزام احتمالی $\tilde{I}_C$ و هر $x, y \in [0, 1]$ داریم

$$\begin{aligned} \tilde{I}_C(x, y) = \tilde{I}_C(1 - y, 1 - x) &\iff C(x, y) - x + 1 = C(1 - y, 1 - x) - (1 - y) + 1 \\ &\iff C(x, y) = y + x - 1 + C(1 - y, 1 - x) \\ &\iff C(x, y) = \hat{C}(y, x). \end{aligned}$$

$\square$

قضیه ۶.۷. مفصل $C(x, y)$ جواب معادله (۵.۷) است، اگر و فقط اگر مفصل $C_1(x, y)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$(۶.۷) \quad C(x, y) = \frac{C_1(x, y) + \hat{C}_1(y, x)}{۲}.$$

اثبات. اگر مفصل $C(x, y)$ جواب معادله (۵.۷) باشد، آنگاه $C(x, y) = \hat{C}(y, x)$ بنابراین با قرار دادن مفصل $C(x, y)$ به جای $C_1(x, y)$ ، معادله (۶.۷) برقرار می‌شود. برعکس، فرض کنید برای مفصل $C(x, y)$ دلخواه، مفصل $C_1(x, y)$ وجود دارد به طوری که معادله (۶.۷) برقرار باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \hat{C}(y, x) &= y + x - ۱ + C(۱ - y, ۱ - x) \\ &= x + y - ۱ + \frac{۱}{۲}[C_1(۱ - y, ۱ - x) + \hat{C}_1(۱ - x, ۱ - y)] \\ &= \frac{۱}{۲}[C_1(۱ - y, ۱ - x) - ۱ + x + y + C_1(y, x)] \\ &= \frac{۱}{۲}[\hat{C}_1(y, x) + C_1(x, y)] = C(x, y). \end{aligned}$$

□

نتیجه ۷.۷. S —استلزام احتمالی $\tilde{I}_C$ در قانون عکس نقیض (۱.۷) با نفی N_C صدق می‌کند، اگر و فقط اگر مفصل $C_1(x, y)$ وجود داشته باشد به طوری که $C(x, y) = \frac{C_1(x, y) + \hat{C}_1(y, x)}{۲}$.

مثال ۸.۷. خانواده مفصل FGM تعریف شده در مثال ۳.۴ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\hat{C}_\theta(y, x) = xy + \theta(۱ - y)(۱ - x)xy = C_\theta(x, y).$$

در نتیجه بنا به نتیجه ۵.۷، رابطه (۱.۷) برای S —استلزام احتمالی بر مبنای مفصل FGM برقرار است.

۲.۷. قانون تفکیک دو مقدم. یک قانون مهم دیگر در منطق دو ارزشی کلاسیک قانون تفکیک دو مقدم است که برای سه گزاره p ، q و r به صورت زیر بیان می‌شود

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r.$$

این قانون در منطق فازی نقش مهمی در استدلال تقریبی و مکانیسم‌های استنتاج رابطه‌ای فازی ایفا می‌کند، زیرا می‌توان یک طرح سلسله مراتبی به دست آورد که پیچیدگی محاسباتی سیستم را به

طور قابل توجهی کاهش دهد [۱۷، ۱۹]. در این بخش ابتدا تعمیم قانون تفکیک دو مقدم در منطق فازی یادآوری و سپس این قانون برای استلزام احتمالی و S -استلزام احتمالی بررسی می‌شود. تعمیم قانون تفکیک دو مقدم در منطق فازی بر مبنای عملگر استلزام و عملگر T -نرم می‌باشد که در تعریف بعد بیان شده است [۱۱].

تعریف ۹.۷. فرض کنید I یک عملگر استلزام و T یک T -نرم باشد. در این صورت، زوج (I, T) در قانون تفکیک دو مقدم صدق می‌کند، اگر

$$(۷.۷) \quad I(x, I(y, z)) = I(T(x, y), z), \quad x, y, z \in [0, 1].$$

گزاره ۱۰.۷. فرض کنید I_C یک استلزام احتمالی و T یک T -نرم باشد به طوری که زوج (I_C, T) در رابطه (۷.۷) صدق کند. در این صورت T مثبت است.

اثبات. اگر زوج (I_C, T) در رابطه (۷.۷) صدق کند، آنگاه بنا به تعریف ۳.۳، نتیجه می‌شود

$$I_C(T(x, y), 0) = \begin{cases} \frac{C(T(x, y), 0)}{T(x, y)}, & T(x, y) > 0, \\ 1, & T(x, y) = 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & T(x, y) > 0, \\ 1, & T(x, y) = 0. \end{cases}$$

با برهان خلف فرض کنید $x_0, y_0 \neq 0$ وجود دارد به طوری که $T(x_0, y_0) = 0$. از این رو، $I_C(T(x_0, y_0), 0) = 1$. اما $I_C(x_0, 0) = 0$ بنابراین زوج (I_C, T) در رابطه (۷.۷) صدق نمی‌کند که این با فرض در تناقض است و برهان کامل می‌شود. $\square$

در مثال‌های زیر هدف پیدا کردن T -نرم مثبتی است که زوج (I_C, T) در رابطه (۷.۷) صدق کند. به این منظور رابطه (۷.۷) بر اساس رابطه I_C به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$(۸.۷) \quad \frac{C(T(x, y), z)}{T(x, y)} = \frac{C\left(x, \frac{C(y, z)}{y}\right)}{x}, \quad x, y, z \in (0, 1].$$

مثال ۱۱.۷. مفصل $C(x, y) = \frac{xy}{x+y-xy}$ و T -نرم T_P را در نظر بگیرید. رابطه (۸.۷) به ازای مفصل C و T_P برقرار است، زیرا

$$\begin{aligned} \frac{C(T_P(x, y), z)}{T_P(x, y)} &= \frac{C(xy, z)}{xy} = \frac{z}{xy - xyz + z} \\ \frac{C\left(x, \frac{C(y, z)}{y}\right)}{x} &= \frac{C\left(x, \frac{z}{y+z-yz}\right)}{x} = \frac{z}{xy - xyz + z} \end{aligned}$$

در نتیجه استلزام احتمالی I_C با T -نرم T_P ، در رابطه (۷.۷) صدق می‌کند.

مثال ۱۲.۷. خانواده مفصل [۲۶]

$$C_{\theta}(x, y) = \max(\theta xy + (1 - \theta)(x + y - 1), 0), \quad \theta \in (0, 1]$$

و T -نرم T_P را در نظر بگیرید. با محاسبات ساده می‌توان نتیجه گرفت که این مفصل در حالتی که $\theta \in [0, 0.35]$ در رابطه (۸.۷) صدق می‌کند. در نتیجه استلزام احتمالی $I_{C_{\theta}}$ وقتی $\theta \in [0, 0.35]$ با T -نرم T_P ، در رابطه (۷.۷) صدق می‌کند.

گزاره ۱۳.۷. اگر $\tilde{I}_C$ یک S -استلزام احتمالی و T یک T -نرم باشد و رابطه (۷.۷) برای زوج $(\tilde{I}_C, T)$ برقرار باشد، آنگاه

$$(9.7) \quad T(x, y) = x - C(x, 1 - y), \quad x, y \in [0, 1].$$

اثبات. فرض کنید رابطه (۷.۷) برای زوج $(\tilde{I}_C, T)$ برقرار باشد. در این صورت،

$$C(T(x, y), z) - T(x, y) + 1 = C(x, C(y, z) - y + 1) - x + 1.$$

با قرار دادن $z = 0$ داریم

$$0 - T(x, y) + 1 = C(x, 0 - y + 1) - x + 1 \implies T(x, y) = x - C(x, 1 - y).$$

□

از گزاره ۱۳.۷ می‌توان نتیجه گرفت که حتی اگر تابع T تعریف شده در رابطه (۹.۷)، یک T -نرم باشد، نمی‌توان ادعا کرد که زوج $(\tilde{I}_C, T)$ در رابطه (۷.۷) صدق می‌کند. البته رابطه موردنظر برای برخی موارد خاص مانند $x, y, z \in \{0, 1\}$ برقرار است اما در حالت کلی ممکن است برقرار نباشد.

مثال ۱۴.۷. فرض کنید $C_{\theta}(x, y)$ مفصل FGM باشد. در این صورت با قرار دادن این مفصل در رابطه (۹.۷)، داریم

$$T(x, y) = x - x(1 - y)(1 + \theta(1 - x)y) = xy(1 - \theta(1 - x)(1 - y))$$

تابع T در ویژگی‌های تعریف ۳.۲ صدق می‌کند. بنابراین تابع T یک T -نرم است. اما زوج $(\tilde{I}_{C_{\theta}}, T)$ در رابطه (۷.۷) صدق نمی‌کند. زیرا با در نظر گرفتن $x = 0.2, y = 0.7, z = 0.1$ و $\theta = -0.4$ ، طرف چپ و راست رابطه (۷.۷) به ترتیب برابر 0.8617 و 0.8614 می‌باشد، که یک تناقض است.

ملاحظه ۱۵.۷. تابع T در رابطه (۹.۷)، جابه‌جایی پذیر است، اگر و فقط اگر مفصل $C(x, y)$ در رابطه زیر صدق کند

$$(۱۰.۷) \quad C(x, y) = x + y - ۱ + C(۱ - y, ۱ - x).$$

بنابراین اگر $C(x, y)$ در رابطه (۱۰.۷) صدق نکند، آنگاه تابع T یک عملگر T -نرم نخواهد بود و در نتیجه زوج $(\tilde{I}_C, T)$ در رابطه (۷.۷) صدق نمی‌کند.

مثال ۱۶.۷. خانواده مفصل تعریف شده در مثال ۱۲.۷ را در نظر بگیرید. بنا به رابطه (۱۰.۷)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} x + y - ۱ + C_\theta(۱ - y, ۱ - x) &= x + y - ۱ \\ &+ \max(\theta(۱ - y)(۱ - x) + (۱ - \theta)(۱ - x - y), ۰) \\ &= x + y - ۱ + \max(\theta xy - x - y + ۱, ۰) \\ &= \max(\theta xy, x + y - ۱) \neq C_\theta(x, y). \end{aligned}$$

در نتیجه، بنا به توجه ۱۵.۷، تابع T تعریف شده در رابطه (۹.۷)، جابه‌جایی پذیر نیست و از این رو یک عملگر T -نرم هم نخواهد بود و در نتیجه زوج $(\tilde{I}_C, T)$ در رابطه (۷.۷) صدق نمی‌کند.

۳.۷. T -شرطی. یک قانون مهم در منطق دو ارزشی کلاسیک قانون قیاس استثنایی است که برای دو گزاره p و q به صورت زیر بیان می‌شود

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q.$$

این قانون یکی از قوانین استنباط است که در آن از دو گزاره منطقی کلاسیک $(p \rightarrow q)$ و p ، گزاره q را نتیجه می‌گیریم. از این رو در منطق فازی، عملگر استلزام و عملگر T -نرم نقش مهمی را در فرآیند قیاسی ایفا می‌کنند. برای تحقق قانون قیاس استثنایی، عملگر استلزام باید دارای ویژگی T -شرطی باشد. در این بخش ابتدا مفهوم T -شرطی بیان و سپس این ویژگی برای استلزام احتمالی و S -استلزام احتمالی بررسی می‌شود.

تعریف ۱۷.۷. فرض کنید I یک عملگر استلزام و T یک T -نرم باشد. در این صورت، زوج (I, T) در T -شرطی صدق می‌کند، اگر

$$(۱۱.۷) \quad T(x, I(x, y)) \leq y, \quad x, y \in [0, ۱].$$

قضیه ۱۸.۷. فرض کنید I_C یک استلزام احتمالی بر مبنای مفصل دلخواه C باشد. در این صورت، زوج (I_C, T) در رابطه (۱۱.۷) صدق می‌کند، اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in [0, 1]$ به طوری که $x > y$ ، نامساوی $C(x, y) \leq xy$ برقرار باشد.

اثبات. فرض کنید رابطه (۱۱.۷) برای زوج (I_C, T) برقرار باشد. در این صورت این رابطه برای زوج (I_C, T_M) نیز برقرار است. به عبارت دیگر

$$(12.7) \quad T_M(x, I_C(x, y)) = \min(x, \frac{C(x, y)}{x}) \leq y, \quad x > 0.$$

$x, y \in [0, 1]$ را در نظر می‌گیریم به طوری که $x > y$. اگر $\min(x, \frac{C(x, y)}{x}) = x$ ، آنگاه بنا به نامساوی (۱۲.۷)، $x \leq y$ که با فرض در تناقض است. بنابراین $\min(x, \frac{C(x, y)}{x}) = \frac{C(x, y)}{x} \leq y$ در نتیجه $C(x, y) \leq xy$ و برهان کامل می‌شود. برعکس، فرض کنید برای هر $x, y \in [0, 1]$ که $x > y$ ، $C(x, y) \leq xy$. با توجه به ویژگی یکنوایی عملگر T -نرم، می‌توان نوشت

$$T(x, I_C(x, y)) = T(x, \frac{C(x, y)}{x}) \leq T(x, \frac{xy}{x}) \leq \min(x, y) = y.$$

علاوه بر این، از آنجایی که بزرگ‌ترین T -نرم T_M است، برای هر T -نرم T ، نتیجه می‌شود

$$T(x, I_C(x, y)) \leq \min(x, I_C(x, y)) \leq x.$$

بنابراین تمام استلزام‌های احتمالی و T -نرم‌ها، برای هر $x \leq y$ ، در رابطه (۱۱.۷) صدق می‌کنند
□ و برهان کامل می‌شود.

گزاره ۱۹.۷. اگر I_C یک استلزام احتمالی باشد، آنگاه رابطه (۱۱.۷) برای زوج (I_C, T_P) برقرار است.

اثبات. اگر I_C یک استلزام احتمالی باشد، آنگاه برای هر $x, y \in [0, 1]$ داریم

$$T_P(x, I_C(x, y)) = x I_C(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ C(x, y), & x > 0. \end{cases}$$

بنابراین اگر $x = 0$ ، آنگاه $T_P(x, I_C(x, y)) \leq y$. اگر $x > 0$ ، آنگاه

$$T_P(x, I_C(x, y)) = C(x, y) \leq \min(x, y) \leq y,$$

□ و برهان کامل می‌شود.

مثال ۲۰.۷. خانواده مفصل AMH تعریف شده در مثال ۳.۳ را در نظر بگیرید. در این مفصل اگر $\theta \in [-1, 0]$ ، آنگاه $1 - \theta(1-x)(1-y) > 1$ و در نتیجه $C_\theta(x, y) \leq xy$. بنابراین زوج (I_{C_θ}, T) برای هر $\theta \in [-1, 0]$ در رابطه (۱۱.۷) صدق می‌کند.

مثال ۲۱.۷. خانواده مفصل

$$C_\theta(x, y) = \frac{xy}{(1 + (1-x^\theta)(1-y^\theta))^{\frac{1}{\theta}}}, \quad \theta \in (0, 1]$$

را در نظر بگیرید [۲۶]. در این خانواده مفصل همواره $1 < (1 + (1-x^\theta)(1-y^\theta))^{\frac{1}{\theta}}$ و در نتیجه $C_\theta(x, y) \leq xy$. بنابراین رابطه (۱۱.۷) برای زوج (I_{C_θ}, T) برقرار است.

گزاره ۲۲.۷. فرض کنید $\tilde{I}_C$ یک S -استلزام احتمالی باشد. در این صورت زوج $(\tilde{I}_C, T_M)$ در رابطه (۱۱.۷) صدق نمی‌کند.

اثبات. اگر زوج $(\tilde{I}_C, T_M)$ در رابطه (۱۱.۷) صدق کند، آنگاه برای هر $x, y \in [0, 1]$ که $x > y$ داریم

$$T_M(x, \tilde{I}_C(x, y)) = \min(x, C(x, y) - x + 1) \leq y \implies C(x, y) \leq x + y - 1. \quad (13.7)$$

از آنجایی که تابع مفصل یک تابع نامنفی است، نامساوی (۱۳.۷) در حالتی که $x + y < 1$ برقرار نیست. در نتیجه، زوج $(\tilde{I}_C, T_M)$ در رابطه (۱۱.۷) صدق نمی‌کند. $\square$

گزاره ۲۳.۷. فرض کنید $\tilde{I}_C$ یک S -استلزام احتمالی باشد. در این صورت زوج $(\tilde{I}_C, T_{LK})$ در رابطه (۱۱.۷) صدق می‌کند.

اثبات. زوج $(\tilde{I}_C, T_{LK})$ در رابطه (۱۱.۷) صدق می‌کند، اگر و فقط اگر

$$T_{LK}(x, \tilde{I}_C(x, y)) \leq y \iff \max(x + C(x, y) - x + 1 - 1, 0) \leq y \\ (14.7) \iff C(x, y) \leq y.$$

نامساوی (۱۴.۷) همواره برقرار است، چون بزرگ‌ترین تابع مفصل، مفصل $M(x, y)$ است و $M(x, y) \leq y$. $\square$

از گزاره‌های ۲۲.۷ و ۲۳.۷ نتیجه می‌گیریم که برخلاف استلزام احتمالی، S - استلزام احتمالی با هر T - نرم T در رابطه (۱۱.۷) صدق نمی‌کند. با این حال هر S - استلزام احتمالی با حداقل یک T - نرم T ، در رابطه (۱۱.۷) صدق می‌کند.

۸. کاربردهایی از عملگرهای استلزام

عملگرهای استلزام در زمینه‌های مختلف نظری و کاربردی کاربرد گسترده‌ای دارند. در ادامه چند مورد از کاربرد این عملگرها در مباحث مختلف ارائه می‌شود.

(۱) بهره‌وری محصولات کشاورزی: برای کشت محصولات کشاورزی در نواحی مختلف

با توجه به شرایط اقلیمی می‌توان به ارزیابی توان بازدهی کاشت و تولید یک محصول کشاورزی اقدام کرد. محصولاتی که با شرایط یک منطقه سازگاری دارند، برای کشاورزان بهره‌وری بالاتری دارند و کم‌ترین آسیب به منابع کشاورزی وارد می‌کنند. در کشت یک محصول متغیرهایی مانند متوسط دما، رطوبت نسبی، میزان بارش، بافت خاک و غیره می‌توانند مهم باشند. بعد از مدل‌سازی و تحلیل داده‌ها، نتایج به صورت گزاره‌های «اگر... آنگاه ...» گزارش شده و در اختیار تصمیم‌گیران قرار می‌گیرند. به عنوان مثال، اگر متوسط دما x باشد، آنگاه درجه تناسب محصول با محیط y است. بنابراین با استفاده از استلزام‌ها می‌توان گزاره‌های ورودی و خروجی را ارزش‌گذاری و ارزیابی کرد. از مطالعاتی که در این زمینه انجام شده است، می‌توان به مراجع [۵، ۷] اشاره کرد.

(۲) پایش کیفی منابع آب زیرزمینی: آب زیرزمینی در بسیاری از مناطق تنها منبع تامین

نیازهای آبی است. در چنین شرایطی حفظ کیفیت منابع آب موجود اهمیت دارد. برای کنترل کیفیت آب از شاخص‌های کیفیت استفاده می‌شود. این شاخص‌ها میانگین وزنی چندین پارامتر کیفی هستند که وزن هر پارامتر با توجه به اهمیت آن تعیین می‌شود. در کیفیت یک منبع آبی، مقدار عناصر منیزیم، سدیم، پتاسیم، کلر و غیره مهم هستند و به عنوان پارامترهای مدل در نظر گرفته می‌شوند. برای مدل‌سازی داده‌ها، با استفاده از روش استنتاج فازی که بر اساس مجموعه‌ای از گزاره‌های «اگر... آنگاه ...» است، می‌توان تجربه‌ها و دانش بشری را وارد مدل کرد. در نهایت با انجام عملیات ریاضی، یک عدد به عنوان خروجی به دست می‌آید که مشخص می‌کند که کیفیت آب زیرزمینی در کدام یک از دسته‌های عالی، مناسب، ضعیف، خیلی ضعیف و غیر قابل شرب قرار دارد [۲].

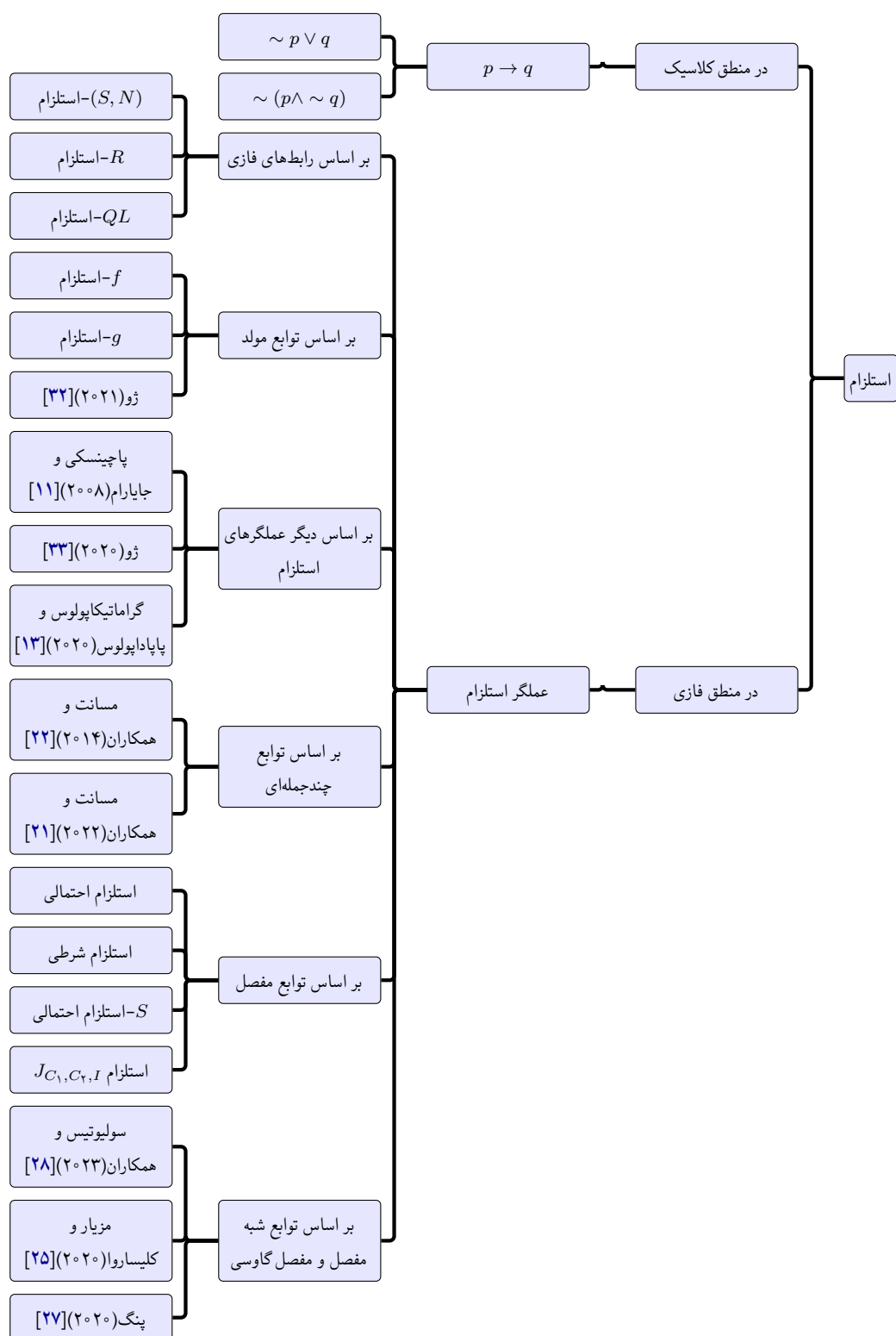
(۳) تشخیص اختلال تیروئید: ابهام و عدم قطعیت در تشخیص بیماری‌ها امری بدیهی است. زیرا بیماری‌ها به شکل‌های مختلف و همچنین با شدت و سختی متفاوتی ظاهر می‌شوند. در حقیقت بهترین تعاریفی که برای علائم بیماری‌ها وجود دارد با استفاده از اصطلاحات زبانی مبهم و غیردقیق ارائه می‌شود. علائم و سایر متغیرهای مرتبط از جمله متغیرهای آزمایشگاهی به سیستم فازی سپرده می‌شود و سیستم فازی است که میزان نزدیک بودن علائم به هر یک از بیماری‌ها یا سطوح مختلف بیماری را تعیین و به عنوان خروجی معرفی می‌کند. برای تشخیص اختلال تیروئید متغیرهای سن، BMI ، تست‌های آزمایشی مانند T^4 و T^3 و غیره به عنوان پارامترهای مدل در نظر گرفته می‌شوند. با استفاده از گزاره‌های «اگر... آنگاه...»، از تجربه متخصصان در تحلیل داده‌ها استفاده می‌شود. در نهایت با استفاده از سیستم استنتاج فازی، وضعیت سلامت افراد که شامل سه دسته سالم، کم‌کاری تیروئید و پرکاری تیروئید مشخص می‌شود [۱].

نتیجه‌گیری

عملگرهای استلزامی تعمیمی از استلزام دو ارزشی منطق کلاسیک هستند. از آنجایی که در هر زمینه‌ای با اهداف کاربردی متفاوت، استلزام‌های ویژه‌ای نیاز هست، یک زمینه برای پژوهش استلزام‌ها مسئله ساخت آن‌ها است. در شکل ۱ خلاصه‌ای از روش‌های ساخت استلزام نمایش داده شده است. عملگرهای استلزام احتمالاتی، نوعی از عملگرهای استلزام هستند که عدم قطعیت و تصادفی بودن را در نظر می‌گیرند. این عملگرها در زمینه‌های گوناگونی که در بخش ۸ بیان شد، کاربرد دارند و همچنین نسبت به عملگرهای استلزام کلاسیک دارای ویژگی‌های بیشتری هستند، مانند توانایی مدیریت اطلاعات ناقص و توانایی ارائه پیش‌بینی‌های دقیق‌تر. در این مقاله روش‌های ساخت چهار خانواده از استلزام‌های احتمالاتی مفصل مبنا مطالعه شد. علاوه بر این، قوانین استنتاج عکس نقیض، قانون تفکیک دو مقدم و T -شرطی برای دو خانواده از این عملگرها بررسی شد.

مراجع

- [۱] اسعد سجادی، ن.، محبوب، ح.، برزویی، ش. و فرهادیان، م. (۱۳۹۸) مدل طبقه‌بندی مبتنی بر سیستم استنتاج فازی ممدانی برای تشخیص اختلال تیروئید. کومش، شماره ۲۲(۱)، صص. ۱۰۷ تا ۱۱۳.
- [۲] حسینی موغاری، س.م. و ابراهیمی، ک. (۱۳۹۴) توسعه شاخص فازی پایش کیفی منابع آب (FWQI) (مطالعه موردی دشت ساوه). آب و خاک دانشگاه فردوسی مشهد، شماره ۲۹(۵)، صص. ۱۱۱۷ تا ۱۱۳۰.
- [۳] طاهری، س.م. (۱۳۸۱) آمار فازی؛ مروری بر گذشته و چشم اندازهای آینده. اندیشه آماری، شماره ۷(۲)، صص. ۵۸ تا ۷۲.



شکل ۱: روش‌های ساخت استلزام‌ها

- [۴] طاهری، س.م. (۱۴۰۰) عملگرهای استلزام. نشریه ریاضی و جامعه، ۶(۱)، صص. ۳۹ تا ۷۷.
- [۵] قدیری معصوم م.، نصیری ح.، رفیعی ی. (۱۳۹۱) پیاده سازی مدل آمایشی کشاورزی با استفاده از سیستم استنتاج فازی و سیستم اطلاعات جغرافیایی مطالعه موردی؛ شهرستان مرودشت. نشریه تحقیقات کاربردی علوم جغرافیایی، شماره ۱۲(۲۵)، صص. ۱۹۵ تا ۲۱۸.
- [۶] معدنی خوش‌بخت، ا. (۱۴۰۲) استلزام‌های احتمالی مفصل مبنا: ویژگی‌ها و کاربردها. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۷] مینائی، م. (۱۳۸۸) پیاده سازی مدل آمایشی کشاورزی با استفاده از منطق فازی و سیستم اطلاعات جغرافیایی (GIS) (منطقه مورد مطالعه فریدون شهر)، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده جغرافیا، دانشگاه تهران. .
- [8] Baczyński, M., Beliakov, G., Bustince, H. and Pradera, A. (Eds.) (2013) Advances in Fuzzy Implication Functions. Studies in Fuzziness and Soft Computing, 300, Springer, Berlin Heidelberg.
- [9] Baczyński, M. and Drewniak, J. (2019) Conjugacy Classes of Fuzzy Implications. Lecture Notes in Computer Science, 625, 287–298.
- [10] Baczyński, M. , Grzegorzewski, P. , Helbin, P. and Niemyska, W. (2016) Properties of the probabilistic implications and S-implications. Information Sciences, 331, 2-14.
- [11] Baczyński, M. and Jayaram, B. (2008) Fuzzy Implications. Studies in Fuzziness and Soft Computing, 231, Springer, Heidelberg.
- [12] Dolati, A., Sánchez, J.F., Úbeda-Flores, M. (2013) Acopula-based family of fuzzy implication operators. Fuzzy Sets and Systems, 211, 55–61.
- [13] Grammatikopoulos, D. S., and Papadopoulos, B. K. (2020) A method of generating fuzzy implications with specific properties. Symmetry, 12(1), 155.
- [14] Grzegorzewski, P. (2011) Probabilistic implications. Proceedings of the 7th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT-11) Atlantis Press, 254-259.
- [15] Grzegorzewski, P. (2013) Probabilistic implications. Fuzzy Sets and Systems, 226, 53-66.
- [16] Helbin, P., Baczyński, M., Grzegorzewski, P. and Niemyska, W. (2019) Some properties of fuzzy implications based on copulas. Information Sciences, 502, 1–17.
- [17] Jayaram, B. (2008) On the law of importation $(x \wedge y) \rightarrow z \equiv (x \rightarrow (y \rightarrow z))$ in fuzzy logic. IEEE Transactions on Fuzzy Systems , 16(1), 130-144.
- [18] Klement, E.P., Mesiar, R. and Pap, E. (2000) Triangular Norms. Trends in Logic, 8, Springer Dordrecht.
- [19] Li, D. and Guo, Q. (2024) Approximate hierarchical fuzzy reasoning based on the law of importation. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 133, 108468.
- [20] Massanet, S., Fernandez-Peralta, R., Baczyński, M. and Jayaram, B. (2024) On valuable and troubling practices in the research on classes of fuzzy implication functions. Fuzzy Sets and Systems, 476, Elsevier North-Holland.

- [21] Massanet, S., Mir, A., Riera, J. V. and Ruiz-Aguilera, D. (2022) Fuzzy implication functions with a specific expression: The polynomial case. *Fuzzy Sets and Systems*, 451, 176-195.
- [22] Massanet, S., Riera, J. V. and Ruiz-Aguilera, D. (2014) On fuzzy polynomial implications. in: Laurent, A., et al. (Eds), *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, in: *Communications in Computer and Information Science*, 442, Springer International Publishing, 138-147.
- [23] Massanet, S. and Torrens, J. (2013) An Overview of Construction Methods of Fuzzy Implications. In *Advances in Fuzzy Implication Functions*, Springer, 300, 1–30.
- [24] Mesiar, R., Kolesárová, A. (2020) Copulas and fuzzy implications. *International Journal of Approximate Reasoning*, 117, 52–59.
- [25] Mesiar, R., and Kolesárová, A. (2020) Quasi-copulas, copulas and fuzzy implicators. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 13(1), 681-689.
- [26] Nelsen, R. B. (2007) *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.
- [27] Peng, Z. (2020) The study on semicopula based implications. *Kybernetika*, 56(4), 662-694.
- [28] Souliotis, G., Rassias, M. T. and Papadopoulos, B. (2023) Fuzzy implications based on quasi-copula and fuzzy negations. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications (JNSA)*, 16(2).
- [29] Su, Y., Xie, A., and Liu, H. W. (2015) Generating implications from one-variable functions. *International Journal of Uncertainty. Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 23(06), 927-947.
- [30] Yager, R. (2004) On some new classes of implication operators and their role in approximate reasoning. *Information Sciences*, 167(1), 193–216.
- [31] Zhao, B. and Wang, H. (2022) Two types of ordinal sums of fuzzy implications on bounded lattices. *Information Sciences*, 611, 385-407.
- [32] Zhou, H. (2021) Characterizations of Fuzzy Implications Generated by Continuous Multiplicative Generators of T-Norms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 29(10), 2988-3002.
- [33] Zhou, H. (2020) Two general construction ways toward unified framework of ordinal sums of fuzzy implications. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 29(4), 846-860.