پنجمین کنفرانس ملی اطلاعات و محاسبات کوانتومی

5th National Conference on Quantum Information and Computation

NCQIC2024

۲۰ و ۲۱ شهریور ماه ۱۴۰۳

دانشگاه صنعتی شاهرود

سخنرانان مدعو :

سید جواد اختر شناس (دانشگاه فردوسی مشهد)
علی اسدیان (دانشگاه تحصیلات تکمیلی زنجان)
صالح رحیمی کشاری (پژوهشگاه دانش های بنیادی)
اسفندیارفیضی (دانشگاه شهید مدنی آذربایجان)
مریم قپانوری (پژوهشگاه علوم و فنون هسته ای)
وحید کریمی پور (دانشگاه صنعتی شریف)

موضوعهای کنفرانس :

محاسبات و الگوریتمهای کوانتومی
اطلاعات و ارتباطات کوانتومی
تصحیح خطای کوانتومی
ترمودینامیک کوانتومی
نظریه منابع
مترولوژی کوانتومی
نظریه در هم تنیدگی
شبیه سازی کوانتومی
سیستمهای کوانتومی باز

کمیته علمی :

محمدعلی جعفریزاده (دانشگاه تبریز)
علی رضاخانی (دانشگاه صنعتی شریف)
محمد حسین زارعی (دانشگاه شیراز)
شهریار سلیمی (دانشگاه کردستان)
مصطفی عنابستانی (دانشگاه صنعتی شاهرود)
لاله معمارزاده (دبیر) (دانشگاه صنعتی شریف)

آخرین مهلت ارسال مقالات : ۲۲ خرداد
آخرین مهلت ثبت نام : ۲۰ مرداد

کمیته اجرایی:

احسان ابراهیمی بسابی - مرتضی رفیعی - مسلم سوهانی - مصطفی عنابستانی (دبیر)

حامیان کنفرانس :

نشانی دبیرخانه :

دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود

راه های ارتباطی :

۰۲۳۳۲۳۹۲۲۰۴-۹ داخلی ۲۴۷۹ و ۲۶۵۱
Email: qic@shahroodut.ac.ir
@NCQIC2024

www.psi.ir/f/qi03

مقاله‌نامه پنجمین کنفرانس ملی اطلاعات و محاسبات کوانتومی

۲۰و ۲۱ شهریور ماه

دانشگاه صنعتی شاهرود

برگزارکنندگان

حامیان کنفرانس

معاونت علمی، فناوری و اقتصاد دانش بنیان ریاست جمهوری
ستاد توسعه فناوری های اپتیک و کوانتوم

سنجه ناسازگاری زوج اندازه‌گیری‌های کوانتومی

صابریان، نیره ؛ اخترشناس، سید جواد

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

در مکانیک کوانتومی اندازه‌گیری فرایندی تهاجمی است که عموما سیستم را مختل می‌کند و نتیجه جالب، وجود اندازه‌گیری‌هایی است که ناسازگار هستند، یعنی نمی‌توانند به‌صورت همزمان با دقت دلخواه روی یک کپی از سیستم، اندازه‌گیری شوند. بنابراین پرسشی که مطرح می‌شود؛ چگونگی سنجش میزان ناسازگاری کوانتومی یک زوج اندازه‌گیری کوانتومی است. جهت پاسخ به این پرسش در این مقاله سنجه‌ای را برای کمی کردن میزان ناسازگاری یک زوج اندازه‌گیری برافکنشی نسبت به یک پایه مرجع براساس میزان هم‌پوشانی پایه‌های اندازه‌گیری معرفی و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم. خواهیم دید برای حالت‌های کیوبیتی و دسته خاصی از کیوتریت‌ها شکل بسته، ساده و قابل محاسبه‌ای برای آن داریم.

واژه های کلیدی: اندازه‌گیری‌های کوانتومی، ناسازگاری کوانتومی، سنجه ناسازگاری.

Incompatibility Measure for Pair of Quantum Measurements

Saberian, Nayere; Akhtarshenas, Seyed Javad

Department of Physics, Faculty of Science, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

Abstract

In quantum mechanics, measurements generally disturbs the system and the interesting point is the existence of incompatible measurements; i.e., the ones that cannot be measured simultaneously with the desired accuracy on a copy of system. Then a question arises as how can we quantify the quantum incompatibility for a pair of quantum measurement? To answer this question, we introduced an incompatibility measure to quantify the amount of incompatibility for a pair of projective measurement relative to a reference basis, based on their overlap and investigate the measure features. Also, we see a closed, simple and easily computable form of the incompatibility measure for qubit systems and special cases of qutrit ones.

***Keywords**: Quantum Measurements, Quantum Incompatibility, Measure of Incompatibility.*

PACS No.

مقدمه

مفهوم اندازه‌گیری در فیزیک کوانتومی شهود روزانه ما را به چالش می‌کشد. در نظریه کلاسیک، بدون وابستگی به اندازه‌گیری، اشیاء ویژگی‌هایی را دارند و اندازه‌گیری به سادگی مقادیر موجود آن‌ها را کشف می‌کند. در مکانیک کوانتومی اندازه‌گیری فرایندی تهاجمی است که عموما سیستم را مختل می‌کند و نتیجه جالب، وجود اندازه‌گیری‌هایی است که ناسازگار هستند، یعنی نمی‌توانند به‌صورت همزمان روی یک کپی از سیستم، اندازه‌گیری شوند. مشهورترین مثال شامل مکان و تکانه ذره‌ای کوانتوم مکانیکی است که نمی‌توانند به طور همزمان با دقت دلخواه اندازه گیری شوند. بنابراین طبیعتا سوالی که مطرح می‌شود این است که

"چگونه می‌توان میزان ناسازگاری[۷] اندازه‌گیری‌های کوانتومی متفاوت را کمی کرد؟" برای پاسخ به این پرسش، سنجه‌هایی پیشنهاد شده‌اند که میزان ناسازگاری مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌ها را کمی کنند [۲،۱] . در ادامه پس از تعریف دقیق‌تر ناسازگاری، درباره یکی از این سنجه‌ها اشاره مختصری خواهد شد.

در حقیقت ناسازگاری را می‌توان نبود قابلیت اندازه‌گیری مشترک[۸] در نظر گرفت. قابلیت اندازه‌گیری مشترک به معنای شبیه‌سازی احتمالات خروجی یک مجموعه اندازه‌گیری با استفاده از یک دستگاه اندازه‌گیری است.

تعریف ۱: دو اندازه‌گیری $M=\{M_i\}_{i=0}^{n_M}$ و $M'=\{M'_i\}_{i=0}^{n_{M'}}$ را قابل اندازه‌گیری مشترک یا سازگار گویند اگر یک POVM $M^P=\{M_{ij}^P\}_{i=0,j=0}^{n_M,n_{M'}}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر i رابطه $\sum_{j=1}^{n_{M'}} M_{ij}^P = M_i$ و به‌ازای هر j رابطه $\sum_{i=1}^{n_M} M_{ij}^P = M'_j$ برقرار باشد. به این POVM اندازه‌گیری والد M و M' گویند [۱، ۳] . اگر این والد وجود نداشته باشد اندازه‌گیری‌ها ناسازگار خواهند بود.

با این تعریف می‌توان سازگار بودن یا نبودن اندازه‌گیری‌ها را تعیین کرد، اما برای دانستن میزان ناسازگاری اندازه‌گیری‌ها نیازمند سنجه ناسازگاری هستیم.

تعریف دیگری که در مقاله [۱] بیان شده است و برای بیان سنجه مورد نیاز است در ادامه می‌آوریم.

تعریف۲: گوییم $B_1 \succ^{B_0} B_2$، به این معنا که B_1 نسبت به B_0 سازگارتر است از B_2 نسبت به B_0، اگر و تنها اگر ماتریس دوتصادفی[۹] Y وجود داشته باشد به‌طوری‌که $X(B_2,B_0)=YX(B_1,B_0)$.

در این تعریف، ماتریس دوتصادفی $X(B,B_0)$ با عناصر $[X(B,B_0)]_{ij} := Tr(\Pi_i\Pi_j^{(0)})$ تعریف می‌شود که در آن $\Pi_i = |f_i\rangle\langle f_i|$ عملگرهای برافکنشی روی پایه $B=\{|f_i\rangle\}_{i=0}^{N-1}$ و $\Pi_j^{(0)} = |e_j\rangle\langle e_j|$ نیز به‌صورت مشابه روی پایه مرجع $B_0=\{|e_j\rangle\}_{j=0}^{N-1}$ تعریف می‌شود.

منظور از ماتریس دوتصادفی در بالا ماتریسی مربعی با درایه‌های نامنفی است که مجموع عناصر هر سطر و هم‌چنین هر ستون آن ۱ باشد.

سنجه ناسازگاری

سنجه‌ای که در مقاله [۲] معرفی شده است به کمی کردن ناسازگاری اندازه‌گیری برافکنشی روی یک پایه دلخواه B نسبت به اندازه‌گیری در یک پایه مرجع B_0 می‌پردازد. سنجه‌ای که در این منبع معرفی می‌شود با الهام از مفهوم مه‌تر بودن[۱۰] به‌طور صورت میانگین همدوسی[۱۱] به‌صورت زیر است: (۱)

$$C_{B_0}(B)=\int d\mu(\rho_0)c_B(\rho_0),$$

که در آن ρ_0 حالت قطری در پایه B_0 و $c_B(\rho)$ سنجه آنتروپی نسبی همدوسی و یا ۲-همدوسی نسبت به B و $d\mu$ سنجه هار[۱۲] مربوط به فضای حالت‌ها است و میانگین‌گیری روی توزیع یکنواخت فضای حالت انجام می‌شود. باتوجه به وجود میانگین‌گیری در این سنجه، محاسبه آن معمولا دشوار است.

براساس آن‌چه در این مقاله آمده است انتظار داریم سنجه ناسازگاری $f_{B_0}(B)$ دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱) مقدار آن برای اندازه‌گیری‌های سازگار صفر باشد.
۲) به‌ازای اندازه‌گیری در پایه MUB بیشترین مقدار را داشته باشد.

---

۷ Incompatibility
۸ Joint Measurability
۹ Bistochastic

۱۰ Majorization
۱۱ Coherence
۱۲ Haar Measure

۳) با انتخاب پایه نسبت به پایه مرجع B_0 مقعر باشد یعنی اگر $B_1 \succ^{B_0} B_2$ آن‌گاه $f_{B_0}(B_1) \le f_{B_0}(B_2)$.

منظور از MUB در بالا پایه‌های متقابلا متوازن[۱۳] است.

سنجه‌ای که در این مقاله معرفی می‌کنیم براساس میزان هم‌پوشانی بردارهای متناظر در پایه‌های مربوط به اندازه‌گیری، به‌صورت زیر است:

$$I_{B_0}(B) = \min_P [1 - \frac{1}{N} Tr(PX(B, B_0))]$$
$$= \min_P \frac{1}{N} \sum_i \sum_{j \ne i} \left| \langle f_i | P | e_j \rangle \right|^2, \quad (۲)$$

در حقیقت هرچه میزان هم‌پوشانی پایه‌های اندازه‌گیری بیشتر باشد، دو اندازه‌گیری سازگارتر هستند. در این رابطه منظور از P هر عملگر جایگشت N بعدی است.

در ادامه به بررسی ویژگی‌های این سنجه می‌پردازیم.

۱) برای اندازه‌گیری در دو پایه یکسان، به‌سادگی مقدار صفر حاصل می‌شود:

$$I_{B_0}(B) = 0 \Leftrightarrow B = B_0.$$

شایان ذکر است که این سنجه وفادار[۱۴] است یعنی تنها به‌ازای اندازه‌گیری سازگار صفر می‌شود.

۲) اگر پایه‌ها MUB باشند – $B = B_0^{MUB}$ – آن‌گاه $I_{B_0}(B) = \frac{N-1}{N}$.

توضیح زیر نحوه حصول این نتیجه را بیان می‌کند.
باتوجه به این‌که هم‌پوشانی پایه‌های MUB به ازای هر i و j به‌صورت $|\langle e_i^{MUB} | e_j \rangle|^2 = \frac{1}{N}$ است، بنابراین عملگر جایگشت در این محاسبه نقشی ندارد و باتوجه به این‌که N بعد فضا را نشان می‌دهد در محاسبه سنجه خواهیم داشت $\frac{1}{N} \sum_i \sum_{j \ne i} \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$.

۳) همچنین باید نشان دهیم که این پایه نسبت به پایه مرجع مقعر است به این معنا که سنجه‌ای یکنوا داریم، یعنی اگر $B_1 \succ^{B_0} B_2$ آن‌گاه $I_{B_0}(B_1) \le I_{B_0}(B_2)$.

بررسی یکنوایی سنجه هم‌ارز بررسی شورمقعر بودن سنجه است. تابع متقارن $f(x_1, x_2, ...)$ شورمقعر است اگر و تنها اگر به ازای هر i و j داشته باشیم [٤]:

$$(x_i - x_j)(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_j}) \le 0. \quad (۳)$$

سامانه‌های کیوبیتی

ابتدا برای اندازه‌گیری‌های کیوبیتی یکنوایی این سنجه را به‌صورت زیر می‌توان دید.
فرض کنید پایه مرجع $B_0 = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ و پایه B به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\begin{cases} |f_1\rangle = \sqrt{p_0}|0\rangle + e^{i\varphi}\sqrt{p_1}|1\rangle, \\ |f_2\rangle = \sqrt{p_1}|0\rangle - e^{i\varphi}\sqrt{p_0}|1\rangle, \end{cases} \quad (۴)$$

به‌طوری‌که $p_0 + p_1 = 1$. بدین‌ترتیب محاسبه سنجه ناسازگاری زیر منجر می‌شود:

$$I_{B_0}(B) = \min\{p_0, p_1\}. \quad (۵)$$

حال با محاسبه شرط شورمقعر بودن برای این حالت به صورت زیر، یکنوایی سنجه برای حالت کیوبیتی اثبات می‌شود:

$$(p_i - p_j)(\frac{\partial I}{\partial p_i} - \frac{\partial I}{\partial p_j}) = (p_i - p_j)(1-0) \le 0, \quad (۶)$$

با این فرض که مقدار سنجه ناسازگاری p_i باشد.

در ادامه جهت داشتن شهود برای این‌که سنجه معرفی شده در حالت کیوبیتی ترتیب ناسازگاری را حفظ می‌کند فرض می‌کنیم $B_1 \succ^{B_0} B_2$ و بنابراین براساس تعریف ۲، ماتریس دوتصادفی Y وجود دارد به‌طوری‌که $X(B_2, B_0) = YX(B_1, B_0)$، باید نشان دهیم $I_{B_0}(B_2) - I_{B_0}(B_1) \ge 0$. از تعریف ماتریس دوتصادفی

[۱۳] Mutually Unbiased Basis
[۱۴] Faithful

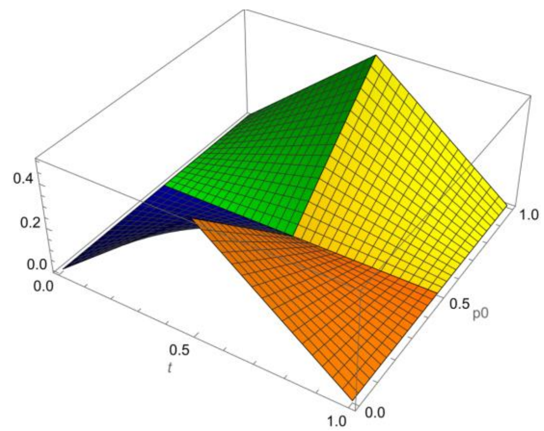
نتیجه می‌شود که یک ماتریس دوتصادفی دلخواه در فضای دو بعدی توسط یک پارامتر $0 \le t \le 1$ به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$Y = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}. \quad (۷)$$

با فرض $\frac{1}{2} \le p_0 \le 1$ و $0 \le t \le \frac{1}{2}$ نتایج زیر را خواهیم داشت:

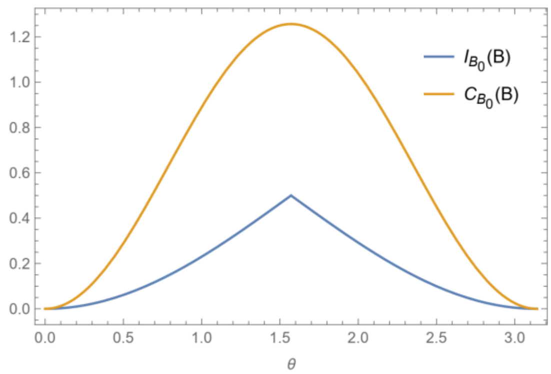
$$\begin{aligned} I_{B_0}(B_1) &= p_1 \\ I_{B_0}(B_2) &= tp_1 + (1-t)p_0 \end{aligned} \quad (۸)$$

توجه داشته باشید که بهینه‌سازی موجود در سنجه به‌ازای چهار بازه مختلف p_0 و t متفاوت خواهد شد، حال با رسم $I_{B_0}(B_2) - I_{B_0}(B_1)$ برحسب p_0 و t می‌توان یکنوایی سنجه یعنی مقدار مثبت این تفاضل را در شکل ۱ مشاهده کرد:



شکل۱: این نمودار، تفاضل ناسازگاری مربوط به پایه B_1 نسبت به B_0 و پایه B_2 نسبت به B_0 به‌ازای بهینه سازی در بازه‌های مختلف p0 و t را نشان می‌دهد. محدوده آبی رنگ مربوط به $0 \le t, p_0 \le 1/2$ ، محدوده سبز برای بازه $0 \le t \le 1/2, 1/2 \le p_0 \le 1$ ، رسم شده است، بازه $1/2 \le t \le 1, 0 \le p_0 \le 1/2$ نشان‌دهنده محدوده نارنجی و $1/2 \le t, p_0 \le 1$ قسمت زرد را مشخص می‌کند.

جهت مقایسه سنجه معرفی شده با سنجه موجود در مقاله [۲] درنظر می‌گیریم $p_0 = \cos^2(\theta/2)$ و بنابراین رفتاری مشابه را مطابق شکل ۲ مشاهده می‌کنیم:



شکل۲: در این شکل، سنجه ناسازگاری معرفی شده در این مقاله (نمودار آبی) و سنجه‌ای که براساس همدوسی در مقاله [۲] معرفی شده است (نمودار نارنجی) برای اندازه‌گیری دوتایی رسم شده است.

سامانه‌های کیوتریت

اکنون برای فضای هیلبرت سه بعدی با در نظر گرفتن پایه مرجع $B_0 = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$، از پایه‌های زیر که در مقاله [۵] بیان شده‌اند در ادامه استفاده می‌کنیم:

$$B = \begin{cases} |f_0\rangle = \sqrt{p_0}\,|0\rangle + \sqrt{p_1}\,|1\rangle + \sqrt{p_2}\,|2\rangle, \\ |f_1\rangle = \sqrt{p_1}\,|0\rangle + \sqrt{p_2}\,e^{i\theta_1}\,|1\rangle + \sqrt{p_0}\,e^{i\theta_2}\,|2\rangle, \\ |f_2\rangle = \sqrt{p_2}\,|0\rangle + \sqrt{p_0}\,e^{i\varphi_1}\,|1\rangle + \sqrt{p_1}\,e^{i\varphi_2}\,|2\rangle, \end{cases} \quad (۹)$$

به‌طوری‌که $p_0 + p_1 + p_2 = 1$. بنابراین میزان ناسازگاری اندازه‌گیری در پایه B نسبت به اندازه‌گیری در B_0 به‌صورت زیر است:

$$I_{B_0}(B) = \min\{2/3, (p_0 + p_1), (p_1 + p_2), (p_0 + p_2)\}. \quad (۱۰)$$

با فرض $p_0 \ge p_1 \ge p_2$ سنجه ناسازگاری به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$I_{B_0}(B) = (p_1 + p_2) \quad (۱۱)$$

حال شورمقعر بودن آن با توجه به روابط زیر اثبات می‌شود:

$$(p_0 - p_1)(\frac{\partial I}{\partial p_0} - \frac{\partial I}{\partial p_1}) = (p_0 - p_1)(0-1) \le 0,$$
$$(p_0 - p_2)(\frac{\partial I}{\partial p_0} - \frac{\partial I}{\partial p_2}) = (p_0 - p_2)(0-1) \le 0, \qquad (۱۲)$$
$$(p_1 - p_2)(\frac{\partial I}{\partial p_1} - \frac{\partial I}{\partial p_2}) = (p_1 - p_2)(1-1) = 0.$$

شورمقعر بودن با درنظر گرفتن ترتیب‌های دیگر برای احتمالات p_i به‌طور مشابه، تکمیل می‌شود.

نتیجه گیری

در این مقاله به معرفی سنجه‌ای با قابلیت محاسبه ساده برای سنجش ناسازگاری زوج اندازه‌گیری‌های کوانتومی پرداختیم. نشان دادیم که این سنجه دو تا از ویژگی‌های اساسی سنجه‌های ناسازگاری را دارد و ویژگی سوم نیز برای حالت کیوبیتی و بخشی از حالت‌های کیوتریت اثبات شد. در حالت کیوبیتی نیز تطابق رفتاری سنجه را با سنجه معرفی شده در مقالات قبلی براساس میانگین همدوسی بررسی کردیم. شکل بسته‌ای برای حالت‌های کیوبیتی و دسته خاصی از حالت‌های کیوتریت به‌دست آمد. به نظر می‌رسد این شکل بسته قابل تعمیم به دسته خاصی از حالت‌های N-بعدی نیز می‌باشد. بنابراین در کارهای آتی علاوه بر بررسی بیشتر این سنجه برای حالت‌های عمومی کیوتریت و همچنین N-بعدی، به اثبات کامل ویژگی سوم نیز پرداخته می‌شود. تعمیم این سنجه به اندازه‌گیری‌های غیربرافکنشی و همین‌طور بررسی نحوه مستقل کردن این سنجه از پایه مرجع نیز سوالاتی قابل بررسی هستند.

مرجع‌ها

[۱] S. Designolle, M. Farkas, and J. Kaniewski; "*Incompatibility Robustness of Quantum Measurements: A Unified Framework*"; *New J. Phys.* **۲۱**, ۱۱۳۰۵۳ (۲۰۱۹).

[۲] G. Styliaris, and P. Zanardi; "*Quantifying the Incompatibility of Quantum Measurements Relative to a Basis*"; *Phys. Rev. Lett.* **۱۲۳**, ۰۷۰٤۰۱ (۲۰۱۹).

[۳] O. Guhne, et. al.; "*Incompatible Measurements In Quantum Information Science*"; *Rev. Mod. Phys.* **۹۵**, ۰۱۱۰۰۳ (۲۰۲۳).

[٤] I. Bengtsson and K. ˙Zyczkowski; "*Geometry of Quantum States:An Introduction to Quantum Entanglement*"; *Cambridge University Press* (۲۰۰٦).

[٥] I. Bengtsson, ˚A. Ericsson, M. Ku´s, W. Tadej, and K. ˙Zyczkowski; "*Birkhoff's polytope and unistochastic matrices, N=۳ and N=٤*"; *Commun. Math. Phys.* **۲٥۹**, ۳۰۷ (۲۰۰٥).