پنجمین کنفرانس ملی
اطلاعات و محاسبات کوانتومی

5th National Conference on Quantum Information and Computation

NCQIC2024

۲۰ و ۲۱ شهریور ماه ۱۴۰۳
دانشگاه صنعتی شاهرود

موضوعهای کنفرانس :

محاسبات و الگوریتمهای کوانتومی
اطلاعات و ارتباطات کوانتومی
تصحیح خطای کوانتومی
ترمودینامیک کوانتومی
نظریه منابع
متروولوژی کوانتومی
نظریه در هم تنیدگی
شبیه سازی کوانتومی
سیستمهای کوانتومی باز

سخنرانان مدعو :

سید جواد اختر شناس (دانشگاه فردوسی مشهد)
علی اسدیان (دانشگاه تحصیلات تکمیلی زنجان)
صالح رحیمی کشاری (پژوهشگاه دانش های بنیادی)
اسفندیارفیضی (دانشگاه شهید مدنی آذربایجان)
مریم قیانوری (پژوهشگاه علوم و فنون هسته ای)
وحید کریمی پور (دانشگاه صنعتی شریف)

کمیته علمی :

محمدعلی جعفرپزاده (دانشگاه تبریز)
علی رضاخانی (دانشگاه صنعتی شریف)
محمد حسین زارعی (دانشگاه شیراز)
شهریار سلیمی (دانشگاه کردستان)
مصطفی عنابستانی (دانشگاه صنعتی شاهرود)
لاله معمارزاده (دبیر) (دانشگاه صنعتی شریف)

آخرین مهلت ارسال مقالات : ۲۲ خرداد
آخرین مهلت ثبت نام : ۲۰ مرداد

کمیته اجرایی:

احسان ابراهیمی بسابی - مرتضی رفیعی - مسلم سوهانی - مصطفی عنابستانی (دبیر)

نشانی دبیرخانه :

دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود

راه های ارتباطی :

۲۶۵۱ و ۲۴۷۹ داخلی ۰۲۳۳۲۳۹۲۲۰۴-۹

Email: qic@shahroodut.ac.ir

@NCQIC2024

www.psi.ir/f/qi03

حامیان کنفرانس :

مقاله‌نامه پنجمین کنفرانس ملی اطلاعات و محاسبات کوانتومی

۲۰و ۲۱ شهریور ماه

دانشگاه صنعتی شاهرود

برگزارکنندگان

حامیان کنفرانس

معاونت علمی، فناوری و اقتصاد دانش‌بنیان ریاست جمهوری
ستاد توسعه فناوری های اپتیک و کوانتوم

حد سرعت های کوانتومی برای تحول های یکانی

فرمانیان ، ابوالفضل[1] ؛ کریمی پور، وحید[1]

[1]دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف ، تهران، ایران

چکیده

حد سرعت های کوانتومی، حد هایی هستند که تعیین می کنند یک حالت کوانتومی با چه سرعتی می تواند به حالت دیگر تبدیل شود. در این جا ما به جای تمرکز بر حد سرعت حالت های کوانتومی ، حد سرعت تحول کوانتومی برای عملگرهای یکانی را در ابعاد دلخواه ارائه می کنیم. حد های ارائه شده در این اثر را می توان به عنوان تعمیم حد های Mandestam-Tamm و Morgolus-Levitin برای تحول یکانی در نظر گرفت .

واژه های کلیدی: *حد سرعت های کوانتومی ، تحول یکانی ، حد سرعت تحول یکانی*

Quantum Speed Limits for Unitary Transformations

Farmanian و Abolfazl [1] ;Karimipour, Vahid [1]

[1] Deptartment of Physics, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

Abstract

Quantum speed limits are the boundaries that define how quickly one quantum state can transform into another. Instead of focusing on the transformation between pairs of states, we provide bounds on the speed limit of quantum evolution by unitary operators in arbitrary dimensions. The bounds that we find can be thought of as the generalization of the Mandelstam-Tamm and the Margolus-Levitin bound for state transformations to implementations of unitary operators.

***Keywords**: Quantum speed limits, Unitary Transformations, QLS of Unitary Transformations*

مقدمه

آیا جهان علاوه بر حد سرعت برای حرکت اجسام ، بر روی پردازش اطلاعات هم حد سرعت قرار داده است ؟ پاسخ این پرسش که سابقه ی نسبتا طولانی ای در فیزیک کوانتوم دارد موضوع بررسی حد سرعت های کوانتومی[15] است .پیشینه ی این پرسش به اصل عدم قطعیت هایزنبرگ برای انرژی-زمان بر می گردد . با پیشرفت فناوری های کوانتومی حد سرعت های کوانتومی با توجه بیشتری مواجه شده است چرا که این حد های

[15] Quantum Speed Limits

سرعت برای محاسبه ی مقدار نظری سرعت پردازش اطلاعات کوانتومی نیز حائز اهمیت است . حد سرعت های کوانتومی را می توان از دو دیدگاه مختلف نگاه کرد . در دیدگاه اول پرسش مورد نظر این است که با فرض ثابت بودن انرژی سیستم ، حداقل زمان مورد نیاز برای یک تحول چه مقدار است . در رویکرد دوم به این پرسش از این زاویه نگاه می شود که با فرض ثابت بودن مقدار زمان ، کمینه ی انرژی مورد نیاز برای تحول سیستم چقدر است .

تلاش های اولیه برای کمی سازی حد سرعت های کوانتومی به مقاله ی *Mandelstam-Tamm* [1] و پس از آن مقاله ی *Margolus-Levitin* [2] بر می گردد . در مقاله ی [1] حد سرعت برای یک حالت خالص که به یک حالت تمیز پذیر نسبت به حالت اولیه (عمود) تبدیل می شود ، با توجه به مقدار انحراف معیار انرژی حالت بیان شده است . در [2] نیز حد سرعت برای یک حالت خالص که به یک حالت تمیز پذیر از حالت اولیه تبدیل می شود با توجه به مقدار میانگین انرژی حالت بدست آورده شده است . در سال های اخیر تعمیم این حد های سرعت برای حالت های آمیخته و همچنین سیستم های باز کوانتومی نیز انجام شده است [3-6]. برای اطلاعات بیشتر به مقاله ی مروری [7] مراجعه شود .

در این اثر رویکردی متفاوت به موضوع حد سرعت های کوانتومی در نظر گرفته شده ایم . در محاسبات کوانتومی به جای تمرکز بر تحول حالت ها ، که به طور معمول مورد بررسی حد سرعت های کوانتومی است ، در بیشتر موارد با تحول های یکانی مشخص سر و کار داریم . به بیانی دیگر می توان گفت در اغلب الگوریتم های محاسبات کوانتومی نه تغییر حالت بلکه تغییر پایه های فضا مورد نظر است . در نتیجه ارائه حد سرعت کوانتومی برای تحول های یکانی برای این منظور حائز اهمیت است . پیش از این در مراجع [8-10] تلاش هایی برای ارائه حد سرعت کوانتومی برای تحول های یکانی یا همان تغییر پایه های فضا انجام شده است . هر کدام از این تلاش ها دارای کاستی هایی است که در [11] به طور مفصل شرح داده شده اند. در این جا سعی شده است یک حد سرعت برای تحول یکانی که مشکلات آثار پیشین را نداشته باشد ارائه شود . در ادامه ابتدا نتیجه ی اصلی مقاله را به صورت یک گزاره گزارش کرده و آن را اثبات می کنیم . سپس در ادامه با ارائه مثال هایی به کاربرد این حد ها در محاسبات و اطلاعات کوانتومی می پردازیم .

نماد گذاری

در سراسر مقاله مقدار ثابت کاهیده پلانک ($\hbar$) برابر با یک قرار داد شده است. فضای هیلبرت را با ابعاد محدود با بعد N و هامیلتونی تحول با مقادیر ویژه انرژی گسسته به صورت $\{E_0 \leq \cdots \leq E_i \leq \cdots E_{N-1}\}$ در نظر گرفتیم. مقادیر ویژه انرژی می توانند تبهگن نیز باشند. حالت پایه ی انرژی با $E_0 = E_{min}$ و بیشترین انرژی سیستم با $E_{N-1} = E_{max}$ نشان داده شده است . مقدار متوسط انرژی هامیلتونی با توجه به انرژی حالت پایه به شکل زیر تعریف شده است :

$$E := \frac{\sum_k E_k}{N} - E_0 \quad (1)$$

انحراف از معیار انرژی به قرار زیر در نظر گرفته شده است :

$$(\Delta E)^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(E_k - \overline{E}\right)^2 \quad (2)$$

و عرض طیف انرژی نیز به شکل زیر تعریف شده است :

$$\delta E := E_{max} - E_{min} \quad (3)$$

نتایج

گزاره۱ : برای یک تحول یکانی به شکل $U = e^{-iHT}$ حد سرعت کوانتومی زیر بر قرار است :

$$T \geq Max\left(\frac{\pi}{2E}\left(1 - \frac{|tr(U)|}{N}\sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}}\right), \frac{1}{\Delta E}\sqrt{1-\frac{|tr(U)|^2}{N^2}}\right) \quad (4)$$

گزاره ۲ :همچنین حد زیر نیز بر قرار است :

$$T \geq Max\left(\frac{\pi}{\delta E}\left(1 - \frac{|tr(U)|}{N}\sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}}\right), \frac{2}{\delta E}\sqrt{1-\frac{|tr(U)|^2}{N^2}}\right) \quad (5)$$

اثبات : نا مساوی مثلثاتی زیر را در نظر بگیرید :

$$x \geq \frac{\pi}{2}(1-\cos x) - \sin x, \quad \forall x \geq 0. \quad (6)$$

حال اگر در نا مساوی بالا $x = (E_i - E_0)T$ قرار دهیم و بر روی i جمع بزنیم خواهیم داشت :

$$\sum_i (E_i - E_0)T \geq \frac{N\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sum_i \cos(E_i - E_0)T - \sum_i \sin(E_i - E_0) \quad (7)$$

حال اگر متغیر θ را به شکل زیر تعریف کنیم

$$tr(U) = \sum_k \cos E_k T - i \sum_k \sin E_k T := |tr(U)|(\cos\theta - i\sin\theta) \quad (8)$$

با توجه به معادله ی (8) می توان با کمی ساده سازی معادله ی (7) را به فرم زیر نوشت :

$$N(\overline{E} - E_{min})T \geq N\frac{\pi}{2} - |tr(U)|\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta - E_0T) - \sin(\theta - E_0T)\right). \quad (9)$$

با توجه به این که بخش مثلثاتی معادله همواره کمتر از $\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}$ است با کمی ساده سازی معادله به نتیجه زیر می رسیم :

$$T \geq \frac{\pi}{2E}\left(1 - \frac{|tr(U)|\sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}}}{N}\right). \quad (10)$$

حد (10) را می توان تعمیم حد Margolus-Levitin برای تحول یکانی در نظر گرفت .

حال نا مساوی زیر را که برای تمامی اعداد حقیقی بر قرار است در نظر بگیرید :

$$x^2 \geq 2(1-\cos x) \quad (11)$$

در نا مساوی بالا اگر $x = (E_k - E_l)T$ را قرار دهیم و بر روی تمامی k و l ها جمع بزنیم داریم :

$$\sum_{k,l}(E_k - E_l)^2 T^2 \geq 2\sum_{k,l}\left(1 - \cos\left((E_k - E_l)T\right)\right) \quad (12)$$

برای طرف چپ نامساوی (12) می دانیم که :

$$\sum_{k,l=1}^{N}(E_k - E_l)^2 = 2N^2\Delta E^2 \quad (13)$$

و برای سمت چپ نامساوی (12) می توان نوشت :

$$|tr(U)|^2 = \sum_{k,l}\cos(E_k - E_l)\,T \quad (14)$$

در نتیجه با جایگذاری (13) و (14) در نامساوی (12) و کمی ساده سازی داریم :

$$T \geq \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{|tr(U)|^2}{N^2}\right)}}{\Lambda E} \quad (15)$$

حد (15) را می توان تعمیم حد Mandestam-Tamm برای تحول یکانی در نظر گرفت .

نا مساوی های (10) و (15) گذاره۱ نتیجه می شود .

برای اثبات گزاره ۲ اگر در(6) قرار دهیم $x = (E_{max} - E_k)T$ و روند مشابهی که برای اثبات (10) طی کردیم را انجام دهیم خواهیم داشت :

$$N(E_{max} - \overline{E})T \geq N\frac{\pi}{2} - |tr(U)|\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta - E_0T) - \sin(\theta - E_0T)\right) \quad (16)$$

که با جمع دو نامساوی (9) و (16) و ساده سازی آن داریم :

$$T \geq \frac{\pi}{\delta E}\left(1 - \frac{|tr(U)|}{N}\sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}}\right) \quad (17)$$

با توجه به منبع [12] داریم :

$$۲\Delta E \leq E_{max} - E_{min} = \delta E \quad (18)$$

با استفاده از رابطه ی (18) در نا مساوی (15) خواهیم داشت :

$$T \geq \frac{2\sqrt{\left(1 - \frac{|tr(U)|^2}{N^2}\right)}}{\delta E} \quad (19)$$

از دو نامساوی (17) و (19) گزاره ۲ اثبات می شود .

مثال ها

در این بخش چند مثال از استفاده ی حد های بدست آمده برای تحول هایی که در محاسبات کوانتومی کاربردی هستند می آوریم.

تغیر پایه ی MUB[16] : فرض کنید تحول یکانی U پایه های مختصات $B_0 = \{|0>, |1>, \cdots |N-1>\}$ را به پایه های مختصات جدید $B_1 = \{|e_0>, |e_1>, \cdots |e_{N-1}>\}$ تبدیل کند به گونه ای که داشته باشیم :

$$|< k|e_l > |^2 = \frac{1}{N} \quad \forall\ k, e_l \qquad (20)$$

با توجه به شرط (20) برای $|tr(U)|$ خواهیم داشت :

$$|tr(U)| \le \sqrt{N} \qquad (21)$$

در نتیجه با جایگذاری (21) در گزاره۱ می توان یک حد برای زمان تحول دستگاه مختصات محاسباتی به یک دستگاه مختصات جدید که نسبت به آن **MUB** است بدست آورد . داریم :

$$T \ge Max\left(\frac{\pi}{2E}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}}\right), \frac{\sqrt{1-\frac{1}{N}}}{\Delta E}\right) \qquad (22)$$

برای N ها ی بزرگ حد فوق به حد $T \ge \frac{\pi}{2}$ میل می کند که از حد ارائه شده در منبع [10] بزرگ تر است .

تغیر پایه ی جایگشتی : به عنوان یک مثال دیگر می توان تحول یکانی P را در نظر گرفت که m پایه ی فضای مختصات را ثابت نگه داشته و بقیه پایه های فضای مختصات را با یک جایگشت دلخواه به هم تبدیل می کند . با توجه به این که برای P داریم $|tr(P)| = m$ ، آنگاه با استفاده از (4) داریم :

$$T \ge Max\left(\frac{\pi}{2E}\left(1 - \frac{m}{N}\sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}}\right), \frac{1}{\Delta E}\sqrt{1+\frac{m^2}{N^2}}\right). \qquad (23)$$

تحول یکانی گروور[17] :

تحول یکانی گروور که در الگوریتم گروور بکار می رود به صورت $G = (2|s><s| - I_N)(I_N - 2|\omega><\omega|)$ است که در آن $|\omega>$ حالتی است که الگوریتم جستجو به دنبال آن است و $|s>=\frac{1}{\sqrt{N}}(\sum_{x=1}^{N}|i>)$ است . به سادگی می توان نشان داده که برابر تحول یکانی گروور داریم :

$$|tr(G)| = N - 4 + \frac{4}{N}. \qquad (24)$$

در نتیجه با توجه به گزاره ۱ ، برای N های بزرگ خواهیم داشت :

$$T \ge \frac{\sqrt{1-\left(1-\frac{4}{N}+\frac{4}{N^2}\right)^2}}{\Delta E} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\Delta E\sqrt{N}}, \qquad (25)$$

حد سرعت کوانتومی برای گیت تک کیوبیتی

در این بخش قصد داریم حد سرعت کوانتومی برای یک گیت تک کیوبیتی را به طور مستقیم با استفاده از مقادیر ویژه گیت تک کیوبیتی محاسبه کرده و سپس نتایج آن را با گزاره۱ مقایسه کنیم .

برای یک گیت تک کیوبیتی در حالت کلی داریم :

$$U = e^{i\phi}\begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\theta & e^{i\beta}\sin\theta \\ -e^{-i\beta}\sin\theta & e^{-i\alpha}\cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (26)$$

با کمی ساده سازی ، مقدار ویژه های U به شکل زیر بدست می آید :

$$\lambda_{\pm} = e^{i\phi}\left(\cos\theta\cos\alpha \pm i\sqrt{1-\cos^2\theta\cos^2\alpha}\right) \qquad (27)$$

اگر هامیلتونی مولد این گیت به شکل $U = e^{-iHT}$ باشد آنگاه خواهیم داشت :

$$(E_2 - E_1)T = 2\cos^{-1}(|\cos\theta\cos\alpha|) \qquad (28)$$

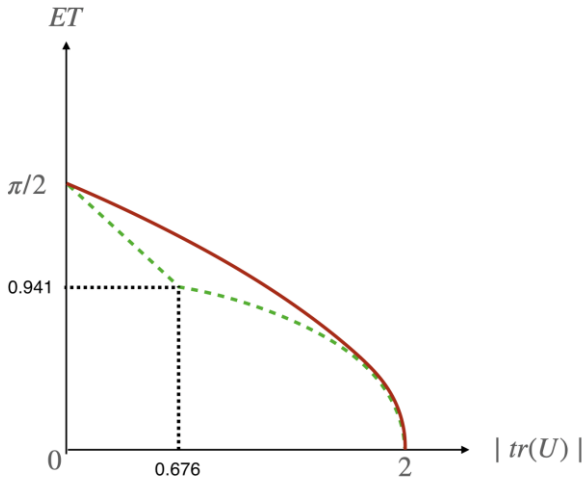
[16] Mutually Unbiased Bases

[17] Grover operator

در نتیجه با توجه به $|tr(U)| = 2|\cos\theta\cos\alpha|$ با کمی ساده سازی داریم :

$$T = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{|tr(U)|}{2}\right)}{E} \qquad (29)$$

در شکل (۱) مقایسه رابطه ی (29) با حدی که گزاره ۱ بدست می دهد آورده شده است . همان گونه که در شکل (۱) قابل مشاهده است ، حد بدست آمده توسط گزاره ی (۱) به حدی که به طور مستقیم برای گیت تک کیوبیتی بدست آوردیم بسیار نزدیک است .



شکل۱ :مقدار ET بر حسب $|tr(U)|$ با توجه به رابطه ی () که به طور مستقیم بدست آمده است (خط ممتد) . مقدار ET بر حسب $|tr(U)|$ با استفاده از گزاره ۱ (خط گسسته) .

نتیجه گیری

در این مقاله حد سرعت های کوانتومی برای تحول های یکانی در بعد دلخواه را بررسی کردیم . این حد سرعت ها به حالت های تحت تحول بستگی نداشته و تنها به ویژگی های تحول یکانی مورد نظر بستگی دارند . در رویکردی که ما استفاده کردیم حد های بدست آمده ابهامات و مشکلاتی که کار های قبلی در این زمینه داشتند را رفع کرده است . حد های پیشنهاد شده را می توان تعمیم حد های *Mandestam-Tamm* و *Morgolus-Levitin* *برای تحول یکانی در نظر گرفت* . همچنین پس از اثبات این حد ها با ارائه مثال هایی از تحول های یکانی معروف در محاسبات کوانتومی ، کاربرد این حد ها را نشان دادیم . در نهایت به طور مستقیم حد سرعت کوانتومی برای یک گیت تک کیوبیتی را بدست آوردیم .

سپاسگزاری

از نظرات سازنده آقایان وحید جان نثاری ، شایان روفه و امیرحسین تنگستانی صمیمانه تشکر می‌کنیم.

مرجع‌ها

[1] L I Mandelstam and Ig Tamm. The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic
quantum mechanics. Springer eBooks, pages 115–123, 01 1991.

[2] Norman Margolus and Lev B. Levitin. The maximum speed of dynamical evolution. Physica D:
Nonlinear Phenomena, 120:188–195, 09 1998.

[3] M M Taddei, B M Escher, Luiz Davidovich, and L de. Quantum speed limit for physical processes.
110, 01 2013.

[4] A. del Campo, I. L. Egusquiza, M. B. Plenio, and S. F. Huelga. Quantum speed limits in open system dynamics. Physical Review Letters, 110, 01 2013.

[5] Sebastian Deffner and Eric Lutz. Energy–time uncertainty relation for driven quantum systems. Journal of Physics A, 46:335302–335302, 07 2013.

[6] Francesco Campaioli, Felix A. Pollock, Felix C. Binder, and Kavan Modi. Tightening quantum speed limits for almost all states. Physical Review Letters, 120, 02 2018.

[7] Sebastian Deffner and Steve Campbell. Quantum speed limits: from heisenberg's uncertainty prin- ciple to optimal quantum control. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 50:453001, 10 2017.

[8] Pablo M. Poggi. Geometric quantum speed limits and short-time accessibility to unitary operations. Physical Review A, 99, 04 2019.

[9] Maxwell Aifer and Sebastian Deffner. From quantum speed limits to energy-efficient quantum gates. New Journal of Physics, 24:055002, 05 2022.

[10] Moein Naseri, Chiara Macchiavello, Dagmar Bruß, Pawel Horodecki, and Alexander Streltsov. Quan- tum speed limits for change of basis. New journal of physics, 02 2024.

[10] Moein Naseri, Chiara Macchiavello, Dagmar Bruß, Pawel Horodecki, and Alexander Streltsov. Quan- tum speed limits for change of basis. New journal of physics, 02 2024.

[11] Abolfazl Farmanian, Vahid Karimipour. Quantum Speed Limits for Implementation of Unitary Transformations. arXiv:2406.03964

[12] Rajendra Bhatia and Chandler Davis. A better bound on the variance. The American mathematical monthly, 107:353–357, 04 2000