.
Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2024
Vol. 18, No. 1, pp 213-233
DOI: 10.52547/jss.18.1.12

Fuzzy Order Statistics Based on α–Value and Some of its Aapplications in Reliability

Mozafari, M.[۱], Khanjari Sadegh, M.[۱] Akbari, M. G.[۱], Hesamian, G.[۲]
[1]Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.
[2]Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Corresponding author: M. Khanjari Sadegh, mkhanjari@birjand.ac.ir

Received: 21/6/2023 **Revised:** 17/3/2024 **Accepted and Published Online:** 18/3/2024.

Introduction

Order statistics are widely used in various sciences, especially systems reliability theory and survival analysis. Therefore, due to the uncertainty in the problem, using fuzzy order statistics to formulate imprecise concepts is more appropriate than classical order statistics and leads to more accurate results and correct analysis of the system under investigation. In this context, fuzzy-ordered statistics based on α-cut were first introduced by Akbari and Rezaei (۲۰۰۹). Zarei et al. (۲۰۱۲), based on a new method, presented normal stochastic orderings, hazard rate, and average remaining life of the fuzzy random variables, and using the proposed approach, they applied the stochastic orderings of the fuzzy order statistics.

In this paper, fuzzy order statistics have been proposed using a new definition based on the α-value of fuzzy random variables. Calculating fuzzy order statistics and reliability functions using real values of α-values is more straightforward and more practical than using α-cuts, which are in the form of intervals. Among other advantages of using α-values than the α-cuts is less ambiguity in constructing fuzzy functions. To review this issue, refer to Hesamian et al. (۲۰۱۸). Also, in cases where the distribution is known using a new approach based on fuzzy scale random variables and in the cases where the distribution of observation is unknown using the empirical distribution function of fuzzy data, some reliability concepts are expressed based on ordered statistics, and for further exploration of the results, some examples are described.

Material and Methods

In this paper, based on the concept of α-value, the fuzzy order statistics are expressed, and some of its applications in reliability have been investigated. For this purpose, if the lifetime distribution of the system components is known, some reliability criteria of the ith order statistic have been analyzed using the scaled fuzzy random variable. On the other hand, for the case where the lifetime distribution of the components is unknown, by using α-value of a fuzzy random variable and non-parametric methods, and based on order statistics, the reliability function is estimated. Finally, to illustrate the results, some examples are provided.

Results and Discussion

In most of the literature on fuzzy reliability, order statistics have not been investigated based on the α-value of a scaled fuzzy random variable. Also because reliability functions according to fuzzy order statistics are fuzzy numbers, these concepts for each α-value must have the same corresponding properties in the classical method.

Conclusion

In this paper, using the concept of α-value, a new definition for order statistics of fuzzy random variables has been proposed, and if the lifetime distribution of the components is known by using fuzzy scale random variables, some concepts of reliability and their properties have been investigated. Also, if the component lifetime distribution is unknown using the empirical distribution function of fuzzy data, some concepts of reliability are expressed based on ordered statistics. Finally, to illustrate the results, some examples are provided.

Keywords: α-value, Fuzzy order statistics, Lifetime distribution, Reliability, Scale fuzzy random variable.

Mathematics Subject Classification (2010): 91A30, 91B16.

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۳
جلد ۱۸، شماره ۱، ص ۲۱۳ -- ۲۳۳
DOI: 10.52547/jss.18.1.12
مقاله پژوهشی

آماره‌های مرتب فازی بر اساس αـشک و کاربردهای آن در قابلیت اعتماد

مهدیه مظفری[۱]، محمد خنجری صادق[۱]، محمدقاسم اکبری[۱]، غلام‌رضا حسامیان[۲]
[۱]گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند
[۲]گروه آمار، دانشگاه پیام‌نور تهران

نویسنده مسئول : محمد خنجری صادق، mkhanjari@birjand.ac.ir
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۳/۳۱ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۱۲/۲۷ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۲۸

چکیده: در این مقاله، آماره‌های مرتب فازی را بر پایه مفهوم αـشک بیان کرده و به بررسی برخی از کاربردهای آن در قابلیت اعتماد پرداخته شده است. برای این منظور، در صورت معلوم بودن توزیع طول عمر مؤلفه‌های سیستم، برخی از معیارهای قابلیت اعتماد iامین آماره مرتب با استفاده از تعریف متغیر تصادفی فازی مقیاس مبتنی بر αـشک مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، در صورت نامعلوم بودن توزیع طول عمر مؤلفه‌ها یا در دسترس بودن فقط مشاهدات فازی طول عمر مؤلفه‌ها، از تابع توزیع تجربی داده‌های فازی برای تخمین قابلیت اعتماد بر اساس آماره‌های مرتب استفاده گردیده و برای شرح بیشتر نتایج، مثال‌هایی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: آماره مرتب فازی، توزیع طول عمر، αـشک، قابلیت اعتماد، متغیر تصادفی فازی مقیاس.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 91G70. ، 91B16.

۱ مقدمه

نظریه مجموعه‌های فازی برای اولین بار توسط زاده (۱۹۶۵) معرفی شد و از زمان ارائه آن تاکنون، گسترش زیادی یافته است. این نظریه در واقع برای اقدام در شرایط عدم اطمینان بوده، بسیاری از مفاهیم نادقیق و یا فازی را صورت‌بندی ریاضی بخشیده و زمینه را برای استدلال و پیش‌بینی فراهم می‌کند.

تاکنون در زمینه قابلیت اعتماد با رویکرد فازی، مطالعات زیادی توسط محققین صورت گرفته است. جیانگ و چن (۲۰۰۳)، ابتدا یک پیشامد فازی را با استفاده از یک تابع عضویت تعریف نموده و سپس آن را برای تابع بقا به‌کار برده‌اند. سعیدی و همکاران (۲۰۱۴) با استفاده از تابع چگالی مبتنی بر پارامتر فازی، برخی مفاهیم قابلیت اعتماد را بیان کرده‌اند. حسامیان و همکاران (۲۰۱۹) با استفاده از تعریف α–شک و متغیر فازی مکان–مقیاس برخی مفاهیم استنباط آماری و توابع قابلیت اعتماد سیستم k از n را مورد تحقیق قرار داده‌اند. زنده‌دل و همکاران (۲۰۲۲) بر اساس یک تعریف جدید برای تابع چگالی متغیرهای تصادفی فازی، توابع نرخ خطر و میانگین باقیمانده عمر را برای متغیر تصادفی فازی نمایی مورد بررسی قرار داده‌اند. مظفری و همکاران (۱۴۰۱) برخی مفاهیم قابلیت اعتماد را برای متغیر تصادفی فازی مقیاس بر اساس α–شک مطرح کرده‌اند.

رتبه‌بندی اعداد فازی، مورد بحث بسیاری از نویسندگان قرار گرفته است، که هر روش نسبت به روش‌های قبلی دسته وسیع‌تری از اعداد فازی را رتبه‌بندی می‌کند. از جمله تحقیقات مهم و کلیدی در این زمینه می‌توان به یائو و وو (۲۰۰۰) و برونلی و مزیی (۲۰۱۳) اشاره کرد. با وجود مطالعات بسیار زیاد در رابطه با ترتیب اعداد فازی، موضوع ترتیب تصادفی متغیرهای تصادفی فازی تنها توسط برخی از محققان مطالعه شده است. پیریاکومار و رنگاناتهان (۲۰۰۱) برای نخستین بار موضوع ترتیب تصادفی متغیرهای تصادفی فازی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. از دیگر رویکردهای موجود در این زمینه می‌توان به روش ارائه شده توسط آیشه و دوبوا (۲۰۱۰) اشاره کرد. همچنین، زارعی و همکاران (۲۰۱۵) با استفاده از تعریف مفهوم متغیرهای تصادفی c–فازی ترتیب‌های تصادفی نرخ خطر و میانگین عمر باقیمانده را مورد بررسی قرار داده‌اند. آماره‌های مرتب در علوم مختلف، به‌ویژه در نظریه قابلیت اعتماد سیستم‌ها و تحلیل بقا کاربرد فراوان دارند. بنابراین به سبب عدم اطمینان موجود در مسئله، استفاده از آماره‌های مرتب فازی برای صورت‌بندی مفاهیم نادقیق مناسب‌تر از آماره‌های مرتب کلاسیک بوده و منجر به نتایج دقیق‌تر و تجزیه و تحلیل صحیح‌تری در رابطه با سیستم تحت بررسی می‌شوند. در این زمینه، آماره‌های مرتب فازی بر اساس α–برش نخستین بار توسط اکبری و رضائی (۲۰۰۹) معرفی شده‌اند. آنها با استفاده از تعریف آماره‌های مرتب در حالت غیرفازی و همچنین نمونه تصادفی فازی، تعریف جدیدی از آماره‌های مرتب فازی را ارائه نموده‌اند و توزیع‌های احتمالی مربوط به این آماره‌ها را به دو روش مختلف مورد بررسی و مطالعه قرار داده‌اند. زارعی و همکاران (۲۰۱۲) بر اساس یک روش جدید، ترتیب‌های تصادفی معمولی، نرخ خطر و میانگین عمر باقیمانده متغیرهای تصادفی فازی را ارائه کرده و با استفاده از رویکرد پیشنهادی خود، ترتیب تصادفی آماره‌های مرتب فازی را مورد مطالعه قرار داده‌اند.

در این مقاله، با استفاده از تعریف جدیدی بر پایه α–شک متغیرهای تصادفی فازی، آماره‌های مرتب فازی مطرح گردیده است. زیرا، محاسبه آماره‌های مرتب فازی و توابع قابلیت اعتماد با استفاده از مقادیر حقیقی α–شک‌ها، در مقایسه با α–برش‌ها که به‌صورت بازه بوده و توسط اکبری و رضائی (۲۰۰۹)، برای متغیرهای تصادفی فازی القاء شده $\tilde{T}_i$ و $i = 1, \ldots, n$ تعریف شده‌اند، ساده‌تر و در عین حال کاربردی‌تر است. از جمله محاسن دیگر استفاده از α–شک‌ها، می‌توان به ابهام کمتر آن در ساخت توابع فازی نسبت به α–برش‌ها نام برد. برای بررسی این موضوع می‌توان به حسامیان و همکاران (۲۰۱۸) مراجعه کرد. همچنین، در دو حالت پارامتری با یک رویکرد جدید بر اساس

متغیرهای تصادفی فازی مقیاس و ناپارامتری با استفاده از تابع توزیع تجربی داده‌های فازی، برخی مفاهیم قابلیت اعتماد بر اساس آماره‌های مرتب بیان گردیده و برای کنکاش بیشتر نتایج، مثال‌هایی عددی بیان گردیده است.

۲ مفاهیم مقدماتی فازی

مجموعه مرجع $\mathbb{X}$ را در نظر بگیرید. مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $\mathbb{X}$ به‌صورت $\{(x, \tilde{A}(x)); x \in \mathbb{X}\}$نمایش داده می‌شود. نگاشت $\tilde{A}(x) : \mathbb{X} \longrightarrow [۰, ۱]$ که به هر $x \in \mathbb{X}$ یک مقدار از بازه $[۰, ۱]$ نسبت می‌دهد، تابع عضویت $\tilde{A}$ گویند و با $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نیز نشان داده می‌شود. برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$، زیرمجموعه $\{x \in X \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$، αـ‌برش $\tilde{A}$ نامیده شده و به‌صورت $\tilde{A}[\alpha] = \left[\tilde{A}^L_\alpha, \tilde{A}^U_\alpha\right]$ نمایش داده می‌شود، که در آن $\tilde{A}^L_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{X} \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$ و $\tilde{A}^U_\alpha = \sup\{x \in \mathbb{X} \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$. همچنین، مجموعه $\tilde{A}[۰]$ به‌صورت $\{x \in \mathbb{X} \mid \tilde{A}(x) > ۰\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $\mathbb{R}$ را عدد فازی گویند، هرگاه تک‌نمایی و αـ‌برش‌های آن به ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ بسته و کراندار باشند.

تعریف ۲. فرض کنید $\tilde{A}$ یک عدد فازی روی $\mathbb{R}$ باشد. $\tilde{A}$ را عدد فازی LR گویند، اگر تابع عضویت آن به‌صورت

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} L(\frac{a-x}{l_a}) & x \leq a, \\ R(\frac{x-a}{r_a}) & x > a, \end{cases}$$

باشد، که L و R توابعی غیرصعودی از $\mathbb{R}^+$ به $[۰, ۱]$ می‌باشند و $L(۰) = R(۰) = ۱$. عدد حقیقی a، مقدار نما یا میانه و اعداد مثبت l_a و r_a به‌ترتیب پهنای چپ و پهنای راست $\tilde{A}$ نامیده می‌شوند. عدد فازی LR با نماد $(a; l_a, r_a)_{LR}$ نمایش داده می‌شود. همچنین، $\tilde{A}$ یک عدد فازی مثلثی نامیده شده، هرگاه به ازای هر $x \in [۰, ۱]$، $L(x) = R(x) = ۱ - x$ و با نماد $(a; l_a, r_a)_T$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳. فرض کنید $\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$، که $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ مجموعه تمام اعداد فازی روی $\mathbb{R}$ است. $\tilde{A}_\alpha$ را αـ‌شک $\tilde{A}$ نامیده و به‌صورت

$$\tilde{A}_\alpha = \begin{cases} \tilde{A}^L_{۲\alpha} & ۰ \leq \alpha \leq ۰/۵, \\ \tilde{A}^U_{۲(۱-\alpha)} & ۰/۵ < \alpha \leq ۱, \end{cases}$$

بیان می‌شود، که $\tilde{A}^L_\alpha$ و $\tilde{A}^U_\alpha$ کران‌های پایین و بالای αـ‌برش عدد فازی $\tilde{A}$ هستند. دقت کنید که، رابطه αـ‌شک با αـ‌برش به ازای $\alpha \in [۰, ۱]$، به‌صورت $\tilde{A}[\alpha] = \left[\tilde{A}_{\frac{\alpha}{۲}}, \tilde{A}_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\right]$ است.

تذکر ۱. (طاهری و همکاران ، ۱۴۰۲) به ازای هر $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$، $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in [0, 1]$،

$$(\tilde{A} \oplus \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha + \tilde{B}_\alpha, \qquad (\lambda \otimes \tilde{A})_\alpha = \begin{cases} \lambda \tilde{A}_\alpha & \lambda > 0, \\ 0 & \lambda = 0, \\ \lambda \tilde{A}_{1-\alpha} & \lambda < 0, \end{cases}$$

که در آن $\oplus$ و $\otimes$ به‌ترتیب نماد جمع و ضرب اسکالر فازی هستند.

در دهه‌های اخیر تعریف متغیر تصادفی در محیط فازی توسط محققین زیادی مد نظر قرار گرفته است. واکرناک (۱۹۷۸، ۱۹۷۹) با استفاده از α-برش، تعریفی برای متغیر تصادفی فازی بیان کرد.

تعریف ۴. (پوری و رالسکو ، ۱۹۸۶) در فضای احتمال (Ω, A, P)، $\tilde{X} : \Omega \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ یک متغیر تصادفی فازی است، اگر به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$، $\tilde{X}^L_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\tilde{X}^U_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ متغیرهای تصادفی کلاسیک باشند.

تعریف ۵. (حسامیان و چاچی ، ۲۰۱۵) در فضای احتمال (Ω, A, P)، $\tilde{X} : \Omega \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ یک متغیر تصادفی فازی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\alpha \in [0, 1]$، $\tilde{X}_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی کلاسیک باشد.

روابط بین تعاریف ۴ و ۵ به‌صورت

$$\tilde{X}_\alpha = \begin{cases} \tilde{X}^L_{2\alpha} & 0 \leq \alpha \leq 0/5, \\ \tilde{X}^U_{2(1-\alpha)} & 0/5 < \alpha \leq 1, \end{cases} \qquad \tilde{X}[\alpha] = \left[\tilde{X}_{\frac{\alpha}{2}}\, , \, \tilde{X}_{1-\frac{\alpha}{2}}\right], \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

قابل بیان است. دو متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ مستقل و هم‌توزیع هستند، هرگاه $\tilde{X}_\alpha$ و $\tilde{Y}_\alpha$ به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ مستقل و هم‌توزیع باشند. همچنین $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n$ یک نمونه تصادفی فازی هستند، اگر $\tilde{X}_i$ها متغیرهای تصادفی فازی مستقل و هم‌توزیع باشند.

تعریف ۶. فرض کنید g یک تابع چگالی احتمال و X یک متغیر تصادفی مقیاس با تابع چگالی

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} g(x/\sigma), \qquad x \in S_X \subseteq \mathbb{R}, \sigma > 0,$$

باشد، که در آن S_X، تکیه‌گاه X هست. در این صورت $\tilde{X} = X \otimes (1; U_1, U_2)_T$ متغیر تصادفی فازی مقیاس (**SFRV**[1]) نامیده می‌شود، اگر

الف- $P(X \in (0, \infty)) = 1$.

[1] Scale Fuzzy Random Variable

ب- $U_۱$ و $U_۲$ مستقل از X، $U_۱ \sim U(a_۱, b_۱)$ و $U_۲ \sim U(a_۲, b_۲)$ باشند، به‌طوری‌که $۰ \leq a_۱ < b_۱ \leq ۱$ و $۰ \leq a_۲ < b_۲$.

بر اساس تعاریف **SFRV** و α-شک یک متغیر تصادفی فازی، برخی مفاهیم قابلیت اعتماد را که برگرفته از مظفری و همکاران (۱۴۰۱) است، می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد.

لم ۱. فرض کنید $\tilde{T}$ یک **SFRV** باشد، آن‌گاه

$$\left(\tilde{R}_{\tilde{T}}(z)\right)_\alpha = \begin{cases} R_T\left(\frac{z}{۱+(۲\alpha-۱)a_۱}\right) - \int_{z/(۱+(۲\alpha-۱)a_۱)}^{z/(۱+(۲\alpha-۱)b_۱)} \frac{z/t-۱-(۲\alpha-۱)b_۱}{(۱-۲\alpha)(b_۱-a_۱)} f_T(t)dt & ۰ \leq \alpha < ۰/۵, \\ R_T(z) & \alpha = ۰/۵, \\ R_T\left(\frac{z}{۱+(۲\alpha-۱)b_۲}\right) - \int_{z/(۱+(۲\alpha-۱)b_۲)}^{z/(۱+(۲\alpha-۱)a_۲)} \frac{z/t-۱-(۲\alpha-۱)a_۲}{(۲\alpha-۱)(b_۲-a_۲)} f_T(t)dt & ۰/۵ < \alpha \leq ۱, \end{cases}$$

که $\left(\tilde{R}_{\tilde{T}}(z)\right)_\alpha$، α-شک تابع بقا هست.

تعریف ۷. فرض کنید $\tilde{T}$ طول عمر مؤلفه باشد. α-شک تابع نرخ خطر $\tilde{T}$ را می‌توان به‌صورت

$$\left(\tilde{r}_{\tilde{T}}(z)\right)_\alpha = \begin{cases} \inf\limits_{\beta \in I_{۲\alpha}} \frac{f_{\tilde{T}_\beta}(z)}{R_{\tilde{T}_\beta}(z)} & ۰ \leq \alpha \leq ۰/۵, \\ \sup\limits_{\beta \in I_{۲(۱-\alpha)}} \frac{f_{\tilde{T}_\beta}(z)}{R_{\tilde{T}_\beta}(z)} & ۰/۵ < \alpha \leq ۱, \end{cases} \quad (۱)$$

تعریف کرد، که در آن $I_\alpha = [\frac{\alpha}{۲}, ۱ - \frac{\alpha}{۲}]$ است.

اگر توزیع طول عمر $\tilde{T}$ مشخص نباشد، یا اگر فقط مشاهدات فازی طول عمر مؤلفه‌ها در دسترس باشند، می‌توان با استفاده از توزیع تجربی آنها برای تخمین توابع بقا و نرخ خطر استفاده کرد.

تعریف ۸. فرض کنید $\tilde{t} = \left(\tilde{t}_۱, \ldots, \tilde{t}_n\right)$ یک نمونه تصادفی فازی از مشاهدات $\tilde{T}$ باشد. $\hat{\tilde{F}}_n(t)$ را تابع توزیع تجربی فازی $\tilde{T}$ گویند، هرگاه α-شک آن به‌صورت

$$(\hat{\tilde{F}}_n(t))_\alpha = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} I((\tilde{t}_i)_{۱-\alpha} \leq t), \quad (۲)$$

بیان شود. دقت کنید که، این تابع توزیع تجربی خاصیت سازگاری و همگرایی قوی به سمت $\left(\tilde{F}_{\tilde{T}}(t)\right)_\alpha$ را برای هر

$\alpha \in [۰\,,\,۱]$ دارد. همچنین، αـشک تابع بقای تجربی $\tilde{T}$ به‌صورت

$$\big(\tilde{\hat{R}}_n(t)\big)_\alpha = (\tilde{\hat{\bar{F}}}_n(t))_\alpha = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} I\big((\widetilde{t}_i)_\alpha \geq t\big), \qquad (۳)$$

تعریف می‌شود. دقت کنید که، این تابع نسبت به α همواره صعودی بوده و αـبرش‌های آن $\tilde{\hat{R}}_n(t)[\alpha] = \big[\tilde{\hat{R}}_{n,\frac{\alpha}{۲}}(t), \tilde{\hat{R}}_{n,۱-\frac{\alpha}{۲}}(t)\big]$ هستند. $\big(\tilde{\hat{R}}_n(t)\big)_\alpha = \hat{R}_{n,\alpha}(t)$ خواص سازگاری و همگرایی قوی به سمت $\big(\tilde{R}_{\tilde{T}}(t)\big)_\alpha = R_{\tilde{T}_\alpha}(t)$ را دارد.

در آمار ناپارامتری، برآورد تابع چگالی را می‌توان بر اساس تابع کرنل بهدست آورد. با توجه به تابع کرنل $K(u)$، برآورد $f_{\tilde{T}_\alpha}(t)$ را می‌توان به‌صورت

$$\hat{f}_{n,\alpha}(t) = \frac{۱}{nh}\sum_{i=۱}^{n} K\Big(\frac{t-\widetilde{t}_{i,\alpha}}{h}\Big), \qquad \alpha \in [۰, ۱], \qquad (۴)$$

نشان داد، که علی‌رغم اریب بودن دارای خاصیت همگرایی قوی به سمت $f_{\tilde{T}_\alpha}(t)$ بوده و h، پارامتر هموارسازی است.

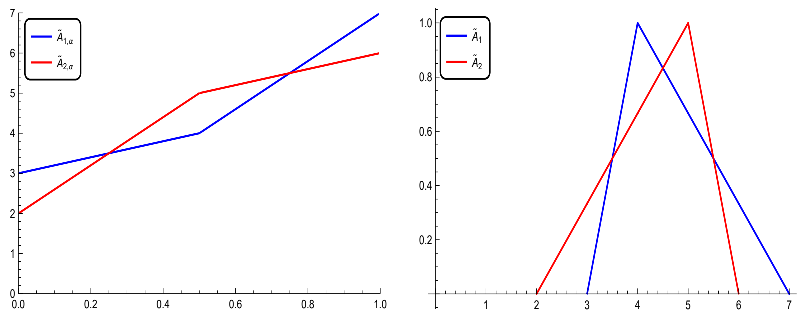
تعریف ۹. فرض کنید $\tilde{t} = (\tilde{t}_۱, \ldots, \tilde{t}_n)$ یک نمونه تصادفی فازی از مشاهدات $\tilde{T}$ باشد. $\tilde{\hat{r}}_n(t)$ را تابع نرخ خطر تجربی فازی $\tilde{T}$ گویند، هرگاه αـشک آن به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\big(\tilde{\hat{r}}_n(t)\big)_\alpha = \begin{cases} \inf\limits_{\beta\in I_{۲\alpha}} \frac{\hat{f}_{n,\beta}(t)}{\hat{R}_{n,\beta}(t)} & ۰ \leq \alpha \leq ۰/۵, \\ \sup\limits_{\beta\in I_{۲(۱-\alpha)}} \frac{\hat{f}_{n,\beta}(t)}{\hat{R}_{n,\beta}(t)} & ۰/۵ < \alpha \leq ۱, \end{cases}$$

۳ آماره‌های مرتب متغیرهای تصادفی فازی

مثال ۱. دو عدد فازی $\tilde{A}_۱ = (۴; ۱, ۳)_T$ و $\tilde{A}_۲ = (۵; ۳, ۱)_T$ را در نظر بگیرید. در شکل ۱، توابع عضویت و αـشک آنها نمایش داده شده است.

بنابر شکل ۱ ملاحظه می‌کنید، برای بعضی αها، $\tilde{A}_{۱,\alpha} \geq \tilde{A}_{۲,\alpha}$ و برای بعضی αهای دیگر، $\tilde{A}_{۱,\alpha} \leq$



(ب) (الف)

شکل ۱. نمودار الف– تابع عضویت $\tilde{A}_1$ و $\tilde{A}_2$ ، ب– α–شک $\tilde{A}_1$ و $\tilde{A}_2$

$\tilde{A}_{2,\alpha}$است. یعنی،

$$(\tilde{\max}(\tilde{A}_1\,,\,\tilde{A}_2))_\alpha = \begin{cases} \tilde{A}_{1,\alpha} & 0 \le \alpha \le 0.25, \\ \tilde{A}_{2,\alpha} & 0.25 < \alpha \le 0.75, \\ \tilde{A}_{1,\alpha} & 0.75 < \alpha \le 1. \end{cases}$$

بنابراین، تعریف یک رابطه بزرگ‌تر و کوچک‌تری بر اساس α–شک‌ها برای اعداد فازی منطقی به نظر می‌رسد.

تعریف ۱۰. (حسامیان، ۲۰۲۲) برای دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$، α–شک ماکسیمم و مینیمم به‌صورت $(\tilde{\max}(\tilde{A}\,,\,\tilde{B}))_\alpha = \max(\tilde{A}_\alpha\,,\,\tilde{B}_\alpha)$ و $(\tilde{\min}(\tilde{A}\,,\,\tilde{B}))_\alpha = \min(\tilde{A}_\alpha\,,\,\tilde{B}_\alpha)$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱. فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی باشند. آنگاه ماکسیمم (مینیمم) α–برش‌های آنها خاصیت تو در تو بودن را دارند.

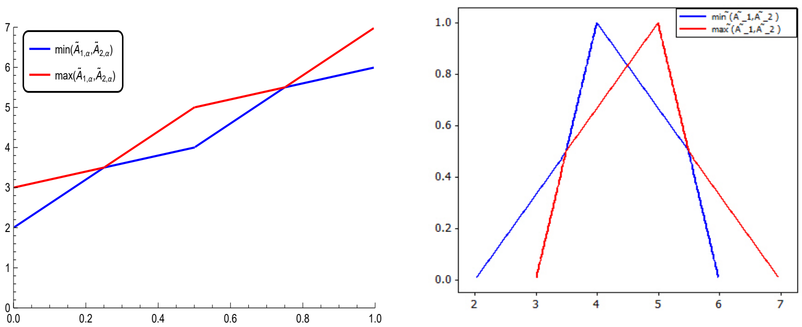
برهان: بنابر رابطه α–برش و α–شک، برای $\alpha \in [0,1]$ داریم

$$(\tilde{\max}(\tilde{A}\,,\,\tilde{B}))[\alpha] = \left[\max\left(\tilde{A}_{\frac{\alpha}{2}}, \tilde{B}_{\frac{\alpha}{2}}\right), \max\left(\tilde{A}_{1-\frac{\alpha}{2}}, \tilde{B}_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right],$$

اگر $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 \le 1$، آنگاه $\max\left(\tilde{A}_{\frac{\alpha_1}{2}}, \tilde{B}_{\frac{\alpha_1}{2}}\right) \le \max\left(\tilde{A}_{\frac{\alpha_2}{2}}, \tilde{B}_{\frac{\alpha_2}{2}}\right)$ و $\tilde{A}_{1-\frac{\alpha_2}{2}} \le \tilde{A}_{1-\frac{\alpha_1}{2}}$ و $\tilde{B}_{1-\frac{\alpha_2}{2}} \le \tilde{B}_{1-\frac{\alpha_1}{2}}$، بنابراین $\max\left(\tilde{A}_{1-\frac{\alpha_2}{2}}, \tilde{B}_{1-\frac{\alpha_2}{2}}\right) \le \max\left(\tilde{A}_{1-\frac{\alpha_1}{2}}, \tilde{B}_{1-\frac{\alpha_1}{2}}\right)$. پس، می‌توان نتیجه گرفت $(\tilde{\max}(\tilde{A}\,,\,\tilde{B}))[\alpha_2] \subseteq (\tilde{\max}(\tilde{A}\,,\,\tilde{B}))[\alpha_1]$. به‌طور مشابه، این نتیجه برای $\tilde{\min}(\tilde{A}\,,\,\tilde{B})$ نیز برقرار است، بنابراین ماکسیمم (مینیمم) α–برش دو عدد فازی تو در تو هستند.

قضیه ۲. (حسامیان ، ۲۰۲۲) ماکسیمم و مینیمم دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$، که در تعریف ۱۰ معرفی گردیده‌اند، عدد فازی هستند.

مثال ۲. در ادامه مثال ۱، منحنی تابع عضویت و αـ‌شک ماکسیمم و مینیمم $\tilde{A}_1$ و $\tilde{A}_2$ در شکل ۲، بیانگر آن است که به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$، $\left(\tilde{\min}(\tilde{A}_1 , \tilde{A}_2)\right)_\alpha \leq \left(\tilde{\max}(\tilde{A}_1 , \tilde{A}_2)\right)_\alpha$.



(ب) (الف)

شکل ۲. نمودار الف- تابع عضویت $\tilde{\max}(\tilde{A}_1 , \tilde{A}_2)$ و $\tilde{\min}(\tilde{A}_1 , \tilde{A}_2)$ ب- αـ‌شک ماکسیمم و مینیمم $\tilde{A}_1$ و $\tilde{A}_2$

بررسی طول عمر یک سیستم در محیط فازی مستلزم تعریف آماره‌های مرتب فازی است. بنابراین، αـ‌شک آماره‌های مرتب متغیرهای تصادفی فازی را تعریف کرده، سپس توابع توزیع، بقا، نرخ خطر و برخی خواص آنها در دو حالتی‌که توزیع طول عمر سیستم معلوم و نامعلوم باشد، مطرح گردیده است.

تعریف ۱۱. فرض کنید $\tilde{T}_1, \ldots, \tilde{T}_n$ متغیرهای تصادفی فازی باشند. $\tilde{T}_{1:n} \leq \ldots \leq \tilde{T}_{n:n}$ آماره‌های مرتب فازی هستند، هرگاه به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$، $\tilde{T}_{1:n,\alpha} \leq \ldots \leq \tilde{T}_{n:n,\alpha}$ آماره‌های مرتب کلاسیک باشند.

تعریف ۱۲. αـ‌شک ماکسیمم و مینیمم متغیرهای تصادفی فازی $\tilde{T}_1, \ldots, \tilde{T}_n$ به‌صورت

$$\left(\tilde{\max}\{\tilde{T}_1, ..., \tilde{T}_n\}\right)_\alpha = \max\left\{\tilde{T}_{1,\alpha}, \ldots, \tilde{T}_{n,\alpha}\right\} = \tilde{T}_{n:n,\alpha} = (\tilde{T}_{n:n})_\alpha,$$
$$\left(\tilde{\min}\{\tilde{T}_1, ..., \tilde{T}_n\}\right)_\alpha = \min\left\{\tilde{T}_{1,\alpha}, \ldots, \tilde{T}_{n,\alpha}\right\} = \tilde{T}_{1:n,\alpha} = (\tilde{T}_{1:n})_\alpha,$$

تعریف می‌شوند. به‌علاوه، برای $i = 2, \ldots, n-1$، $\left(\tilde{T}_{i:n}\right)_\alpha = \tilde{T}_{i:n,\alpha}$ که $\tilde{T}_{i:n,\alpha}$، iامین کوچک‌ترین آماره مرتب فازی در بین آماره‌های $\tilde{T}_{1:n,\alpha}$، ...و $\tilde{T}_{n:n,\alpha}$ است.

مثال ۳. (سدرا و اسمیت ، ۲۰۰۴) یک دستگاه تقویت کننده سیگنال سه مرحله‌ای را در نظر بگیرید. در این مدار به منظور تقویت سیگنال ورودی، از سه ترانزیستور Q_1، Q_2 و Q_3 نوع NPN[1] به شکل سری استفاده شده است.

[1]Negative Posetive Negative

داده‌های جدول ۱، طول عمر فازی (در ۱۰۰۰ ساعت) ترانزیستور نوع دوم NPN هستند. با استفاده از ماکرویی

جدول ۱. مشاهدات فازی مثلثی $(t_i; l_{t_i}, r_{t_i})_T$ طول عمر مؤلفه Q_2

t_i	l_{t_i}	r_{t_i}	t_i	l_{t_i}	r_{t_i}	t_i	l_{t_i}	r_{t_i}
۱/۱۷	۰/۲۲	۰/۲۲	۲۲/۸۰	۴/۴۳	۳/۹۳	۳۹/۷۹	۷/۵۲	۷/۰۵
۲۳/۰۱	۳/۹۱	۴/۲۷	۳۹/۵۱	۶/۵۴	۶/۷۹	۴۱/۰۴	۶/۱۷	۶/۸۴
۰/۲۱	۰/۰۳	۰/۰۳	۷۶/۸۸	۱۱/۶۲	۱۲/۷۴	۴/۱۶	۰/۷۲	۰/۶۵
۴۴/۲۸	۸/۳۸	۸/۰۷	۰/۰۸	۰/۰۱	۰/۰۱	۱۰۹/۶۹	۱۸/۵۵	۲۱/۱۹
۵۵/۲۲	۸/۳۹	۱۰/۶۳	۲۵/۹۲	۴/۴۹	۴/۹۵	۱۵۱/۵۳	۲۶/۷۱	۲۳/۷۷
۳۷/۱۴	۷/۰۹	۵/۸۵	۱۶/۱۸	۲/۹۰	۲/۶۰	۳۸/۵۰	۶/۰۱	۶/۰۷
۳۶/۹۳	۵/۸۹	۶/۸۳	۳۹/۲۲	۶/۶۹	۷/۵۴	۲۳/۵۸	۳/۵۴	۴/۱۸
۲۳/۷۹	۴/۰۰	۳/۹۳	۲/۶۰	۰/۳۹	۰/۵۱	۴۲/۱۵	۷/۳۷	۷/۳۵
۶/۱۴	۱/۰۵	۱/۰۹	۲/۱۳	۰/۳۲	۰/۴۱	۱۴/۶۵	۲/۷۷	۴۲/۹۱
۱۸/۱۵	۳/۵۰	۳/۱۱	۱۰/۸۲	۱/۹۱	۱/۷۴	۴۸/۳۴	۷/۹۸	۹/۳۸
۲۰/۶۰	۳/۹۵	۳/۷۷	۱۴/۲۰	۲/۸۲	۲/۵۶	۷۱/۰۵	۱۱/۳۸	۱۳/۰۹
۳۷/۲۰	۶/۰۳	۷/۰۶	۴۱/۷۷	۸/۲۰	۶/۸۰	۴۱/۶۹	۷/۱۰	۶/۶۸
۱۳/۹۶	۲/۵۳	۲/۲۰	۲/۱۸	۰/۳۴	۰/۳۹	۹/۷۶	۱/۸۲	۱/۶۹
۴/۳۳	۰/۶۹	۰/۷۰	۲۸/۸۵	۰/۷۴	۴/۴۸	۱۳/۷۰	۲/ ۴۱	۲/۶۲
۱/۱۷	۰/۲۲	۰/۲۰	۴/۶۵	۰/۸۸	۰/۷۷	۴۸/۲۹	۷/۸۸	۸/۷۳
۰/۴۴	۰/۰۶	۰/۰۶	۲۱/۵۳	۳/۶۷	۳/۲۵	۳۸/۸۹	۶/ ۳۷	۷/۳۶
۶۵/۹۴	۱۱/۶۵	۱۲/۲۹	۱۹/۰۷	۳/۲۲	۳/ ۴۰			
۱۰/۵۸	۱/۶۸	۱/۹۹	۱۵/۷۸	۳/۰۴	۳/۰۲			

در Minitab۱۶ تابع عضویت $\tilde{t}_{i:52,\alpha}$ برای $i = 10, 20, 30, 40$ در شکل ۳ بیانگر آن است که مقادیر این آماره‌ها فازی بوده و به‌ترتیب حدوداً ۴، ۱۶، ۲۶ و ۴۱ هستند.

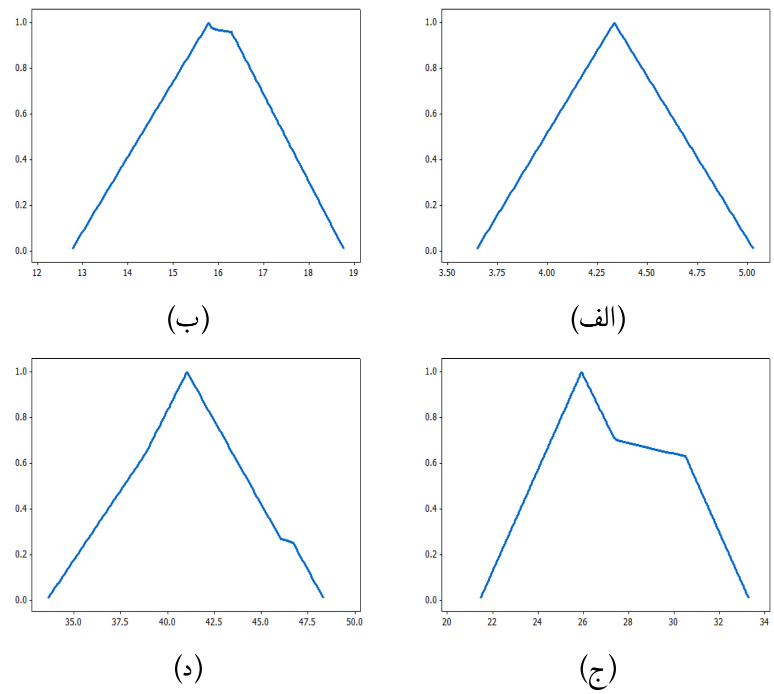
لم ۲. فرض کنید $\tilde{T}_1, \ldots, \tilde{T}_n$ یک نمونه تصادفی از متغیرهای تصادفی فازی باشند. آن‌گاه

$$\left(\tilde{F}_{\tilde{T}_{i:n}}(t)\right)_\alpha = F_{\tilde{T}_{i:n,(1-\alpha)}}(t) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F^{k}_{\tilde{T}_{1-\alpha}}(t) \bar{F}^{n-k}_{\tilde{T}_{1-\alpha}}(t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

برهان: بنابر تعریف α-شک می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\left(\tilde{F}_{\tilde{T}_{in}}(t)\right)_\alpha &= \begin{cases} F^{L}_{\tilde{T}_{2\alpha}}(t) & 0 \leq \alpha \leq 0.5, \\ F^{U}_{\tilde{T}_{2(1-\alpha)}}(t) & 0.5 < \alpha \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \inf\limits_{\beta \in I_{2\alpha}} F_{\tilde{T}_{i:n,\beta}}(t) & 0 \leq \alpha \leq 0.5, \\ \sup\limits_{\beta \in I_{2(1-\alpha)}} F_{\tilde{T}_{i:n,\beta}}(t) & 0.5 < \alpha \leq 1, \end{cases}\end{aligned}$$

از آنجاکه، $F_{\tilde{T}_\beta}(t)$ بر حسب β، تابعی نزولی بوده، بنابراین $F_{\tilde{T}_{i:n,\beta}}(t)$ نیز بر حسب β تابعی نزولی است. از



شکل ۳. نمودار تابع عضویت $\tilde{t}_{i:52,\alpha}$ برای الف- $i=10$، ب- $i=20$، ج- $i=30$، د- $i=40$

این‌رو،

$$\left(\tilde{F}_{\tilde{T}_{i:n}}(t)\right)_\alpha = \begin{cases} F_{\tilde{T}_{i:n,(1-\alpha)}}(t) & 0 \le \alpha \le 0.5, \\ F_{\tilde{T}_{i:n,(1-\alpha)}}(t) & 0.5 < \alpha \le 1, \end{cases}$$
$$= F_{\tilde{T}_{i:n,(1-\alpha)}}(t) \qquad 0 \le \alpha \le 1,$$

همچنین، بنابر تعریف تابع توزیع iامین آماره مرتب در حالت کلاسیک می‌توان نوشت

$$\left(\tilde{F}_{\tilde{T}_{i:n}}(t)\right)_\alpha = F_{\tilde{T}_{i:n,(1-\alpha)}}(t) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F^{k}_{\tilde{T}_{1-\alpha}}(t) \bar{F}^{n-k}_{\tilde{T}_{1-\alpha}}(t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

فرع ۱. فرض کنید $\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_n$ یک نمونه تصادفی از متغیرهای تصادفی فازی باشند. از این‌رو

$$\left(\tilde{F}_{\tilde{T}_{n:n}}(t)\right)_\alpha = F_{\tilde{T}_{n:n,(1-\alpha)}}(t) = (F_{\tilde{T}_{1-\alpha}}(t))^n,$$
$$\left(\tilde{F}_{\tilde{T}_{1:n}}(t)\right)_\alpha = 1 - \bar{F}_{\tilde{T}_{1:n,(1-\alpha)}}(t) = 1 - (\bar{F}_{\tilde{T}_{1-\alpha}}(t))^n.$$

فرع ۲. فرض کنید$\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_n$ یک نمونه تصادفی از متغیرهای تصادفی فازی باشند. آن‌گاه

$$f_{\tilde{T}_{i:n,\alpha}}(t) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F^{i-1}_{\tilde{T}_\alpha}(t)\bar{F}^{n-i}_{\tilde{T}_\alpha}(t) f_{\tilde{T}_\alpha}(t), \quad i = 1,\dots,n.$$

فرع ۳. فرض کنید $\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_n$ یک نمونه تصادفی از متغیرهای تصادفی فازی باشند. آن‌گاه α-شک تابع بقای iامین آماره مرتب فازی عبارت است از

$$\begin{aligned}\left(\tilde{R}_{\tilde{T}_{i:n}}(t)\right)_\alpha &= \left(\bar{\tilde{F}}_{\tilde{T}_{i:n}}(t)\right)_\alpha \\ &= \bar{F}_{\tilde{T}_{i:n,\alpha}}(t) \\ &= 1 - \left(\tilde{F}_{\tilde{T}_{i:n}}(t)\right)_{1-\alpha} \\ &= 1 - \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F^k_{\tilde{T}_\alpha}(t)\bar{F}^{n-k}_{\tilde{T}_\alpha}(t), \quad i = 1,\dots,n,\end{aligned}$$

تعریف ۱۳. فرض کنید $\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_n$ یک نمونه تصادفی از متغیرهای تصادفی فازی باشند. α-شک تابع نرخ خطر iامین آماره مرتب فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\left(\tilde{r}_{\tilde{T}_{i:n}}(z)\right)_\alpha = \begin{cases} \inf\limits_{\beta\in I_{2\alpha}} \frac{f_{\tilde{T}_{i:n,\alpha}}(z)}{R_{\tilde{T}_{i:n,\alpha}}(z)} & 0 \le \alpha \le 0.5, \\ \sup\limits_{\beta\in I_{2(1-\alpha)}} \frac{f_{\tilde{T}_{i:n,\alpha}}(z)}{R_{\tilde{T}_{i:n,\alpha}}(z)} & 0.5 < \alpha \le 1. \end{cases}$$

لم ۳. فرض کنید $\tilde{T}$ یک **SFRV** باشد. آن‌گاه

$$\left(\tilde{F}_{\tilde{T}_{i:n}}(z)\right)_\alpha = \begin{cases} F_{T_{i:n}}\left(\frac{z}{1+(1-2\alpha)b_2}\right) + \int_{z/1+(1-2\alpha)b_2}^{z/1+(1-2\alpha)a_2} \frac{z/t - 1 - (1-2\alpha)a_2}{(1-2\alpha)(b_2-a_2)} f_{T_{i:n}}(t)dt & 0 \le \alpha < 0.5, \\ F_{T_{i:n}}(z) & \alpha = 0.5, \\ F_{T_{i:n}}\left(\frac{z}{1+(1-2\alpha)a_1}\right) + \int_{z/1+(1-2\alpha)a_1}^{z/1+(1-2\alpha)b_1} \frac{z/t - 1 - (1-2\alpha)b_1}{(2\alpha-1)(b_1-a_1)} f_{T_{i:n}}(t)dt & 0.5 < \alpha \le 1. \end{cases}$$

برهان: با استفاده از تعاریف α-شک و **SFRV** می‌توان نوشت

$$\tilde{T}_{i:n\alpha}=\begin{cases} T_{i:n}Y_{۱}^{\alpha} & ۰\leq\alpha\leq ۰٫۵, \\ T_{i:n}Y_{۲}^{\alpha} & ۰٫۵<\alpha\leq ۱, \end{cases}$$

که در آن

$$\begin{aligned} Y_{۱}^{\alpha} &\sim U\big(۱-(۱-۲\alpha)b_{۱}, ۱-(۱-۲\alpha)a_{۱}\big), \\ Y_{۲}^{\alpha} &\sim U\big(۱-(۱-۲\alpha)a_{۲}, ۱-(۱-۲\alpha)b_{۲}\big). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} P\big(\tilde{T}_{i:n,(۱-\alpha)}\leq z\big) &= \begin{cases} P\big(T_{i:n}Y_{۲}^{۱-\alpha}\leq z\big) & ۰\leq\alpha\leq ۰٫۵, \\ P\big(T_{i:n}Y_{۱}^{۱-\alpha}\leq z\big) & ۰٫۵<\alpha\leq ۱, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_{۰}^{\infty} F_{Y_{۲}}^{۱-\alpha}(z/t) f_{T_{i:n}}(t)dt & ۰\leq\alpha\leq ۰٫۵, \\ \int_{۰}^{\infty} F_{Y_{۱}}^{۱-\alpha}(z/t) f_{T_{i:n}}(t)dt & ۰٫۵<\alpha\leq ۱, \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_{T_{i:n}}\big(\frac{z}{۱+(۱-۲\alpha)b_{۲}}\big)+\int_{z/۱+(۱-۲\alpha)b_{۲}}^{z/۱+(۱-۲\alpha)a_{۲}} \frac{z/t-۱-(۱-۲\alpha)a_{۲}}{(۱-۲\alpha)(b_{۲}-a_{۲})} f_{T_{i:n}}(t)dt & ۰\leq\alpha<۰٫۵, \\ F_{T_{i:n}}(z) & \alpha=۰٫۵, \\ F_{T_{i:n}}\big(\frac{z}{۱+(۱-۲\alpha)a_{۱}}\big)+\int_{z/۱+(۱-۲\alpha)a_{۱}}^{z/۱+(۱-۲\alpha)b_{۱}} \frac{z/t-۱-(۱-۲\alpha)b_{۱}}{(۲\alpha-۱)(b_{۱}-a_{۱})} f_{T_{i:n}}(t)dt & ۰٫۵<\alpha\leq ۱. \end{cases} \end{aligned}$$

لم ۴. فرض کنید $\tilde{T}$ یک **SFRV** باشد. آن‌گاه

$$\big(\tilde{R}_{\tilde{T}_{i:n}}(z)\big)_{\alpha}=\begin{cases} \bar{F}_{T_{i:n}}\big(\frac{z}{۱+(۲\alpha-۱)a_{۱}}\big)-\int_{z/۱+(۲\alpha-۱)a_{۱}}^{z/۱+(۲\alpha-۱)b_{۱}} \frac{z/t-۱-(۲\alpha-۱)b_{۱}}{(۱-۲\alpha)(b_{۱}-a_{۱})} f_{T_{i:n}}(t)dt & ۰\leq\alpha<۰٫۵, \\ \bar{F}_{T_{i:n}}(z) & \alpha=۰٫۵, \\ \bar{F}_{T_{i:n}}\big(\frac{z}{۱+(۲\alpha-۱)b_{۲}}\big)-\int_{z/۱+(۲\alpha-۱)b_{۲}}^{z/۱+(۲\alpha-۱)a_{۲}} \frac{z/t-۱-(۲\alpha-۱)a_{۲}}{(۲\alpha-۱)(b_{۲}-a_{۲})} f_{T_{i:n}}(t)dt & ۰٫۵<\alpha\leq ۱. \end{cases}$$

برهان: بنابر لم ۱ و فرع ۳ به‌راحتی قابل اثبات است.

مثال ۴. فرض کنید $\tilde{T}_{۱},\ldots,\tilde{T}_{n}$ یک نمونه تصادفی از **SFRV**ها باشند، که در آنها $T_i\sim E(\theta)$، $U_{۱}\sim U(۰,۱)$

و $U_۲ \sim U(۰,۱)$ هستند. فرض کنید $\tilde{T} = \tilde{\min}\{\tilde{T}_۱, \ldots, \tilde{T}_n\}$، αـ‌شک تابع بقای $\tilde{T}$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\big(\tilde{R}_{\tilde{T}}(z)\big)_\alpha = (P(\tilde{T} > z))_\alpha = P\big(\tilde{T}_{۱:n,\alpha} > z\big) = \prod_{i=۱}^{n} R_{\tilde{T}_{i\alpha}}(z) = \prod_{i=۱}^{n} (R_{\tilde{T}_i}(z))_\alpha$$
$$= \begin{cases} \prod_{i=۱}^{n} \Big(e^{-\theta z} - \int_{z}^{z/۲\alpha} \dfrac{z/t_i - ۲\alpha}{(۱-۲\alpha)} \theta e^{-\theta t_i} dt_i\Big) & ۰ \leq \alpha < ۰/۵, \\ e^{-n\theta z} & \alpha = ۰/۵, \\ \prod_{i=۱}^{n} \Big(e^{-\dfrac{\theta z}{۲\alpha}} - \int_{z/۲\alpha}^{z} \dfrac{z/t_i - ۱}{(۲\alpha - ۱)} \theta e^{-\theta t_i} dt_i\Big) & ۰/۵ < \alpha \leq ۱ \end{cases}$$

لم ۵. فرض کنید $\tilde{T}_۱, \ldots, \tilde{T}_n$ یک نمونه تصادفی از **SFRV**ها باشند، اگر $\tilde{T}_{i:n}$ آماره مرتب فازی مقیاس iام باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{E}}\big(\tilde{T}_{i:n}\big) &= \mathrm{E}(T_{i:n}) \otimes \big(۱; \frac{a_۱ + b_۱}{۲}, \frac{a_۲ + b_۲}{۲}\big)_T, \\ \mathrm{Var}\big(\tilde{T}_{i:n}\big) &= \mathrm{Var}(T_{i:n})\big(۱ + \frac{(a_۱ + b_۱)^۲ + (a_۲ + b_۲)^۲}{۲۴} + \frac{(a_۲ + b_۲) - (a_۱ + b_۱)}{۴}\big) \\ &\quad + \mathrm{E}(T^۲_{i:n})\big(\frac{(a_۱ - b_۱)^۲ + (a_۲ - b_۲)^۲}{۷۲}\big). \end{aligned}$$

برهان: با استفاده از مفهوم αـ‌شک و بنابر تعریف **SFRV** می‌توان نوشت

$$\tilde{T}_\alpha = \begin{cases} \tilde{T}^L_{۲\alpha} & ۰ \leq \alpha \leq ۰/۵, \\ \tilde{T}^U_{۲(۱-\alpha)} & ۰/۵ < \alpha \leq ۱, \end{cases} = \begin{cases} TY^\alpha_۱ & ۰ \leq \alpha \leq ۰/۵, \\ TY^\alpha_۲ & ۰/۵ < \alpha \leq ۱, \end{cases}$$

که برای $۰ \leq \alpha \leq ۰/۵$، $Y^\alpha_۱ \sim U\big(۱ - (۱ - ۲\alpha)b_۱, ۱ - (۱ - ۲\alpha)a_۱\big)$ و برای $۰/۵ < \alpha \leq ۱$، $Y^\alpha_۲ \sim U\big(۱ - (۱ - ۲\alpha)a_۲, ۱ - (۱ - ۲\alpha)b_۲\big)$ هستند. بنابراین،

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\big(\tilde{T}_{k:n,\alpha}\big) &= \begin{cases} \mathrm{E}\big(T_{i:n}Y^\alpha_۱\big) & ۰ \leq \alpha \leq ۰/۵, \\ \mathrm{E}\big(T_{i:n}Y^\alpha_۲\big) & ۰/۵ < \alpha \leq ۱, \end{cases} \\ &= \mathrm{E}(T_{i:n}) \times \begin{cases} ۱ - \frac{(۱-۲\alpha)(a_۱+b_۱)}{۲} & ۰ \leq \alpha \leq ۰/۵, \\ ۱ - \frac{(۱-۲\alpha)(a_۲+b_۲)}{۲} & ۰/۵ < \alpha \leq ۱, \end{cases} \end{aligned}$$

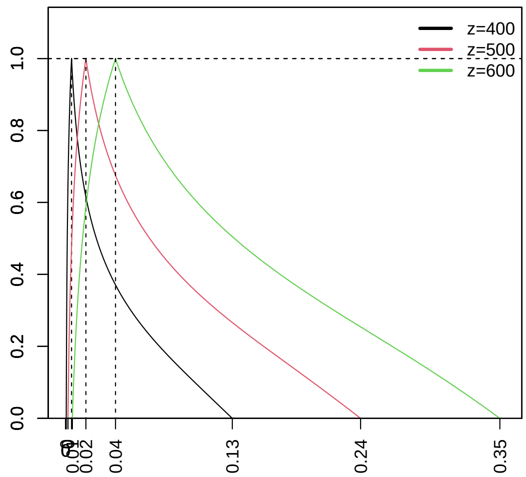
در نتیجه، $\tilde{\mathrm{E}}\big(\tilde{T}_{i:n}\big) = E(T_{i:n}) \otimes \big(۱; \frac{a_۱+b_۱}{۲}, \frac{a_۲+b_۲}{۲}\big)_T$. به‌علاوه

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\big(\tilde{T}_{i:n}\big) &= \int_{\circ}^{۱} \mathrm{Var}(\tilde{T}_{i:n,\alpha})d\alpha \\
&= \int_{\circ}^{۱} \Big[\mathrm{Var}\big(\mathrm{E}\big(\tilde{T}_{i:n,\alpha} \mid T\big)\big) + \mathrm{E}\big(\mathrm{Var}\big(\tilde{T}_{i:n,\alpha} \mid T\big)\big)\Big]d\alpha \\
&= \int_{\circ}^{\circ/۵} \Big[\mathrm{Var}\big(E\big(T_{i:n}Y_۱^{\alpha} \mid T\big)\big) + E\big(\mathrm{Var}\big(T_{i:n}Y_۱^{\alpha} \mid T\big)\big)\Big]d\alpha \\
&+ \int_{\circ/۵}^{۱} \Big[\mathrm{Var}\big(E\big(\big(T_{i:n}Y_۲^{\alpha} \mid T\big)\big) + E\big(\mathrm{Var}\big(T_{i:n}Y_۲^{\alpha} \mid T\big)\big)\Big]d\alpha \\
&= \int_{\circ}^{\circ/۵} \Big[E^۲\big(Y_۱^{\alpha}\big)\mathrm{Var}(T_{i:n}) + E\big(T_{i:n}^۲\big)\mathrm{Var}\big(Y_۱^{\alpha}\big)\Big]d\alpha \\
&+ \int_{\circ/۵}^{۱} \Big[\mathrm{E}^۲\big(Y_۲^{\alpha}\big)\mathrm{Var}(T_{i:n}) + \mathrm{E}\big(T_{i:n}^۲\big)\mathrm{Var}\big(Y_۲^{\alpha}\big)\Big]d\alpha \\
&= \mathrm{Var}(T_{i:n})\Big[\int_{\circ}^{\circ/۵} \mathrm{E}^۲\big(Y_۱^{\alpha}\big)d\alpha + \int_{\circ/۵}^{۱} \mathrm{E}^۲\big(Y_۲^{\alpha}\big)d\alpha\Big] \\
&+ \mathrm{E}\big(T_{i:n}^۲\big)\Big[\int_{\circ/۵}^{۱} \mathrm{Var}\big(Y_۱^{\alpha}\big)d\alpha + \int_{\circ/۵}^{۱} \mathrm{Var}\big(Y_۲^{\alpha}\big)d\alpha\Big] \\
&= \mathrm{Var}(T_{i:n})\Big(۱ + \frac{(a_۱+b_۱)^۲ + (a_۲+b_۲)^۲}{۲۴} + \frac{(a_۲+b_۲) - (a_۱+b_۱)}{۴}\Big) \\
&+ \mathrm{E}\big(T_{i:n}^۲\big)\Big(\frac{(a_۱-b_۱)^۲ + (a_۲-b_۲)^۲}{۷۲}\Big).
\end{aligned}
$$

مثال ۵. فرض کنید $\tilde{T}$ یک **SFRV** باشد که در آن $T \sim E(\circ/\circ\circ۲)$، $U_۱ \sim U(\circ, ۱)$ و $U_۲ \sim U(\circ۱)$ هستند. αـ‌شک تابع توزیع بزرگ‌ترین آماره مرتب، بنابر لم ۳ و فرع ۱ به‌صورت

$$
\big(\tilde{F}_{\tilde{T}_{n:n}}(z)\big)_{\alpha} = \begin{cases} \prod_{i=۱}^{n} \Big(۱ - e^{-\frac{\theta z}{۲(۱-\alpha)}} + \int_{z/۲(۱-\alpha)}^{z} \frac{z/t_i - ۱}{۱ - ۲\alpha}\theta e^{-\theta t_i}dt_i\Big) & \circ \leq \alpha < \circ/۵, \\ (۱ - e^{-\theta z})^n & \alpha = \circ/۵, \\ \prod_{i=۱}^{n} \Big(۱ - e^{-\frac{\theta z}{۲\alpha}} + \int_{z}^{z/۲(۱-\alpha)} \frac{z/t_i - ۲(۱-\alpha)}{۲\alpha - ۱}\theta e^{-\theta t_i}dt_i\Big) & \circ/۵ < \alpha \leq ۱, \end{cases}
$$

نوشته می‌شود. نمودار $\tilde{F}_{\tilde{T}_{n:n,\alpha}}$، برای $n = ۳$ در سه نقطه ۴۰۰، ۵۰۰ و ۶۰۰ در شکل ۴ نمایش داده شده، که در نقاط مختلف یک عدد فازی است. همچنین، $\tilde{E}\big(\tilde{T_{۳:۳}}\big) = (۱۲۵; ۶۲/۵, ۶۲/۵)_T$ و $\mathrm{Var}\big(\tilde{T_{۳:۳}}\big) = ۹۹۸۲/۶۳$.



شکل ۴. نمودار $\tilde{F}_{\tilde{T}_{n:n,\alpha}}(z)$ برای $z = ۴۰۰, ۵۰۰, ۶۰۰$

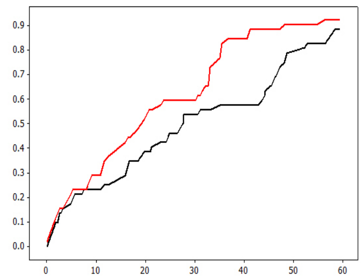
اگر فقط مشاهدات فازی طول عمر مؤلفه‌ها در دسترس باشند و توزیع طول عمر $\tilde{T}$ مشخص نباشد، برای محاسبه توابع توزیع، بقا و نرخ خطر iامین آماره مرتب فازی، از توزیع تجربی آنها استفاده می‌شود.

تذکر ۲. با جایگزین کردن روابط ۲، ۳، ۴ و ۹ در لم ۲، فرع ۳، فرع ۲ و تعریف ۱۳ توابع توزیع، بقا، چگالی و نرخ خطر iامین آماره مرتب فازی که به‌ترتیب با $\hat{\tilde{F}}_{i:n}(t)$، $\hat{\tilde{R}}_{i:n}(t)$، $\hat{\tilde{f}}_{i:n}(t)$ و $\hat{\tilde{r}}_{i:n}(t)$ نشان داده می‌شوند، به‌دست می‌آیند.

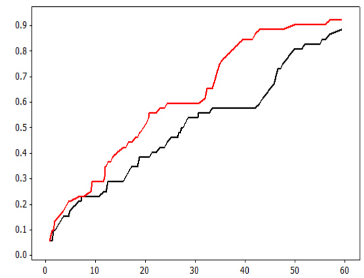
مثال ۶. برای مشاهدات مثال ۳، با ماکروهایی که در نرم افزار $MiniTab$۱۶ نوشته شده، کران‌های پایین و بالای $\hat{\tilde{F}}_{۲۰:۵۲,\alpha}(t)$ برای $h = ۱۰$ و α های مختلف در شکل ۵ نمایش داده شده است. همچنین، نمودار $\left(\hat{\tilde{r}}_{i:۵۲}(t)\right)_\alpha$ برای $h = ۱۰$ و i و tهای مختلف در شکل ۶ نمایش داده شده، که برای منحنی‌های (الف)، (ب)، (ج) و (د) مقادیر فازی به‌دست آمده و به‌ترتیب حدوداً ۰/۰۳، ۰/۰۲۸، ۰/۰۲۲۵ و ۰/۰۰۰۲۵ هستند.

بحث و نتیجه‌گیری

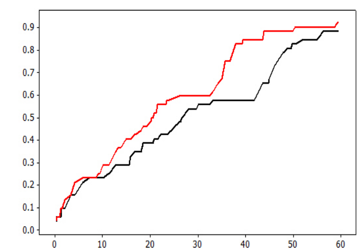
در دنیای واقعی، دلایلی مانند خطاهای ماشینی، آزمایش‌ها و قضاوت‌های شخصی منجر به عدم قطعیت و عدم دقت داده‌ها می‌شوند. تجزیه و تحلیل قابلیت اعتماد این سیستم‌ها، با استفاده از روش‌های کلاسیک برای مدل‌سازی



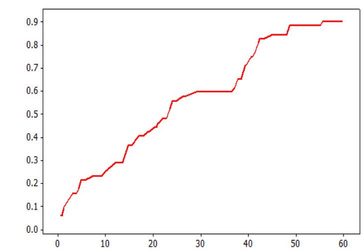
(الف)



(ب)



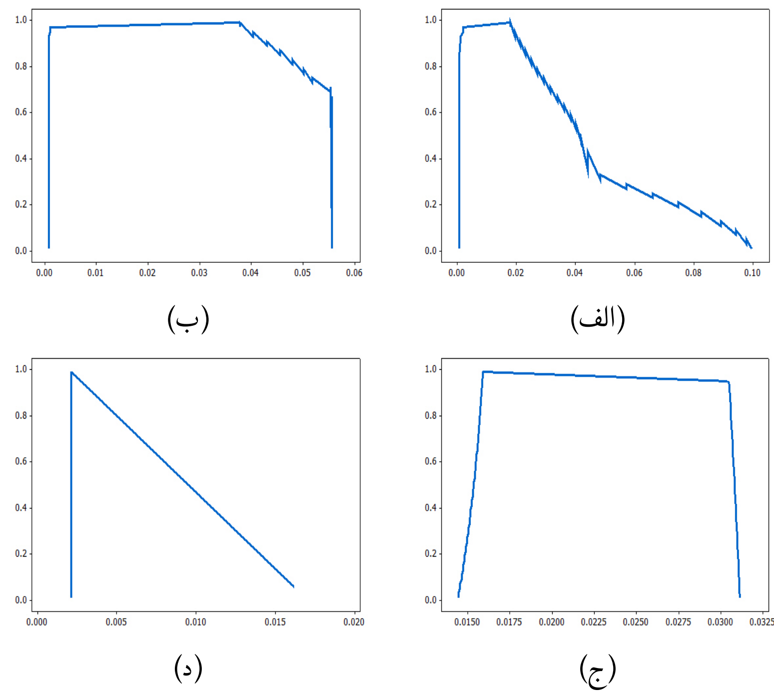
(ج)



(د)

شکل ۵. نمودار کران‌های بالا و پایین $\tilde{\tilde{F}}_{۲۰:۵۲,\alpha}$ برای الف- $\alpha =$ ۰٫۲، ب- $\alpha =$ ۰٫۵، ج- $\alpha =$ ۰٫۸، د- $\alpha =$ ۱

و کنترل عدم قطعیت داده‌های طول عمر ناکافی است. در چنین شرایطی نیازمند توسیع روش‌های کلاسیک در جهت صورت‌بندی مفاهیم دقیق خواهیم بود، که نظریه مجموعه‌های فازی، یکی از ابزارهای مناسب برای غلبه بر این مشکل است. از طرفی، بررسی طول عمر یک سیستم در محیط فازی مستلزم تعریف آماره‌های مرتب فازی است. بنابراین، در این مقاله با استفاده از مفهوم α-شک، یک تعریف جدید برای آماره‌های مرتب متغیرهای تصادفی فازی مطرح گردیده و در صورت معلوم بودن توزیع طول عمر مؤلفه‌ها با استفاده از متغیرهای تصادفی فازی مقیاس، برخی مفاهیم قابلیت اعتماد و خواص آنها مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، در صورت نامعلوم بودن توزیع طول عمر مؤلفه‌ها یا در دسترس بودن فقط مشاهدات فازی طول عمر مؤلفه‌ها با استفاده از تابع توزیع تجربی داده‌های فازی، برخی مفاهیم قابلیت اعتماد بر اساس آماره‌های مرتب بیان گردیده، برای شرح بیشتر نتایج، مثال‌هایی ارائه شده و نشان‌دهنده این است، که مشخصه‌های به‌دست آمده، اعداد فازی هستند. برای مطالعه در آینده، بر اساس این مفهوم پیشنهادی برای متغیر تصادفی فازی بر مبنای α-شک، می‌توان به برآورد پارامترهای توزیع‌های طول عمر بر اساس برآوردهای گشتاوری، درستنمائی ماکسیمم و بیزی پرداخت. به‌علاوه، می‌توان آنتروپی مفاهیم قابلیت اعتماد را بر اساس متغیرهای تصادفی فازی مقیاس مطرح کرد.



شکل ۶. نمودار تابع عضویت $\left(\tilde{\tilde{r}}_{i:52}(t)\right)_\alpha$ برای الف– $i = 20, t = 50$، ب– $i = 20, t = 80$، ج– $i = 40, t = 50$، د– $i = 40, t = 80$

تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات و پیشنهادات داوران محترم، رهنمودهای ارزنده و ویرایش ادبی سردبیر محترم و هیئت تحریریه مجله که باعث ارتقا کیفی مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

طاهری، س.، اکبری، م. ق. و حسامیان، غ. (۱۴۰۲)، مدل سازی میانگین متحرک بر اساس α–شک متغیرهای تصادفی فازی، مجله علوم آماری، پذیرش برای چاپ.

مظفری، م.، خنجری صادق، م.، اکبری، م. ق. و حسامیان، غ. (۱۴۰۱)، مفاهیمی از قابلیت اعتماد در محیط فازی، مجله علوم آماری، ۱۷، ۱۵۷–۱۷۵.

Aiche, F. and Dubois, D. (2010), An Extension of Stochastic Dominance to Fuzzy

Random Variables, *Computational Intelligence for Knowledge-Based Systems Design: Lecture Notes in Computer Science*, **6178**, 159–168.

Akbari, M. G. and Rezaei, A. H. (2009), Order Statistics using Fuzzy Random Variables, *Statistics and Probability Letters*, **79**, 1031-1037.

Brunelli, M. and Mezei, J. (2013), How Different are Ranking Methods for Fuzzy Numbers? A Numerical Study, *International Journal of Approximate Reasoning*, **54**, 627-639.

Hesamian, G. R. and Chachi, J. (2015), Two-Sample Kolmogorov–Smirnov Fuzzy Test for Fuzzy Random Variables, *Statistical Papers*, **56**, 61–82.

Hesamian, G., Akbari, M. G. and Yaghoobpoor, R. (2018), Quality Control Process Based on Fuzzy Random Variables, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **27**, 671-685.

Hesamian, G., Akbari, M. G. and Zendehdel, J. (2019), Location and Scale Fuzzy Random Variables, *International Journal of Systems Science*, 229-241.

Hesamian, G. (2022), Fuzzy Statistical Inferences Based on Fuzzy Random Variables, *Taylor & Francis Group*, DOI: 10.1201/9781003248644.

Jiang, C. and Chen, C. (2003), A Numerical Algorithm of Fuzzy Reliability, *Reliability Engineering and System Safety*, **80**, 299-307.

Kwakernaak, H. (1978), Fuzzy Random Variables-I. Definition and Theorem, *Information Sciences*, **15**, 1-29.

Kwakernaak, H. (1979), Fuzzy Random Variables-II. Algorithms and Examples for the Discrete Case, *Information Sciences*, **17**, 253-278.

Piriyakumar, E.L. and Renganathan, N. (2001), Stochastic Ordering of Fuzzy Random Variables, *Information and Management Sciences*, **12**, 29–40.

Puri, M. L. and Ralescu, D. A. (1986), Fuzzy Random Variables, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **114**, 409-422.

Saeidi, A. R., Akbari, M. G. and Doostparast, M. (2014), Hypotheses Testing with the Two Parameter Pareto Distribution on the Basis of Records in Fuzzy Environment, *Kybernetika*, **50**, 744-757.

Sedra, A. and Smith, K. (2004), Microelectronic Circuits, *United Kingdom: Oxford University Press.*

Yao, J.S. and Wu, K. (2000), Ranking Fuzzy Numbers Based on Decomposition Principle and Signed Distance, *Fuzzy Sets and Systems*, **116**, 275-288.

Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy Sets, *Information Control*, **8**, 338-356.

Zarei, R., Amini, M., Rezaei Roknabadi, A. H. and Akbari, M. G. (2012), Some Fuzzy Stochastic Orderings for Fuzzy Random Variables, *Fuzzy Optim Decis Making*, **110**, 209-225.

Zarei, R., Amini, M. and Rezaei Roknabadi, A. H. (2015), Fuzzy Stochastic Ordering for C-Fuzzy Random Variables and its Applications, *Soft Computing*, **19**, 179-188.

Zendehdel, J., Zarei, R. and Akbari, M. G. (2022), A Novel Approach for Modeling System Reliability Characteristics in an Imprecise Environment, *Journal of Mathematical Modeling*, **10**, 449-465.