Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2023
Vol. 17, No. 1, pp 157-175
DOI: 10.52547/jss.17.1.9

On Some Reliability Concepts in Fuzzy Environment

Mozafari, M.[1], Khanjari Sadegh, M.[1] Akbari, M. G.[1],
Hesamian, G.[2]
[1]Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.
[2]Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Corresponding author: M. Khanjari Sadegh, mkhanjari@birjand.ac.ir

Received: 19/6/2022 **Revised:** 19/11/2022 **Accepted and Published Online:** 6/12/2022.

Introduction

Many studies have been done in the field of reliability with the fuzzy approach. By using the definition of α-pessimistic and location-scale fuzzy variable, some concepts of statistical inference and reliability function of k out of n systems are investigated by Hesamian et al. (2019). Akbari and Hesamian (2020) have studied the survival function of an intuitive fuzzy random variable based on α-lower and uppercuts of their membership functions. Marco et al. (2021), based on the fuzzy parameter (with triangular membership function) of the exponential distribution, have investigated the α-cuts of the survival function and its relationship with entropy. Zendehdel et al. (2022) based on a new definition for the density function of fuzzy random variables have studied the hazard rate and mean residual life functions of an exponential fuzzy random variable.

In this paper, based on the definition of a-pessimistic of a fuzzy random variable some reliability concepts are considered when the lifetimes distributions of components are known. Also, when the lifetime distributions are unknown, based on the fuzzy observations of components' lifetimes, the empirical cumulative distribution, empirical survival, and empirical hazard rate functions are presented.

Material and Methods

In this paper, some reliability concepts are considered when the lifetimes' distributions of components are known and based on the definition of the α-pessimistic of a fuzzy random variable. For this purpose, we introduced

the density function of a fuzzy random variable with all properties of a classical density function. Also, by using α-pessimistic of the survival function of a scaled fuzzy random variable, α-cuts of the hazard rate function of a fuzzy random variable are investigated. On the other hand, the survival and hazard rate functions are presented when the lifetime distribution of the components is unknown by using α-pessimistic of a fuzzy random variable and non-parametric methods. Finally, to illustrate the results, some examples are provided.

Results and Discussion

Most of the literature on fuzzy reliability, the component's survival and hazard rate functions have not been investigated based on the α-pessimistic of a scaled fuzzy random variable. Also, because these functions are fuzzy numbers, these concepts for each α-pessimistic must have the same corresponding properties in classical mode.

Conclusion

In this paper, some reliability concepts are examined based on the definition of α-pessimistic of a fuzzy random variable when the lifetimes' distributions of components are known. Also, when the lifetime distributions are unknown, based on the fuzzy observations of components' lifetimes, the empirical cumulative distribution, empirical survival and empirical hazard rate functions are presented. Finally, to illustrate the results, some examples are provided.

Keywords: α-pessimistic, Hazard rate, Fuzzy random variable, Scale fuzzy random variable, Survival function.

Mathematics Subject Classification (2010): 91A30, 91B16.

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۲
جلد ۱۷، شماره ۱، ص ۱۵۷ – ۱۷۵
DOI: 10.52547/jss.17.1.9
مقاله پژوهشی

مفاهیمی از قابلیت اعتماد در محیط فازی

مهدیه مظفری[۱]، محمد خنجری صادق[۱]، محمدقاسم اکبری[۱]، غلامرضا حسامیان[۲]
[۱] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند،
[۲] گروه آمار، دانشگاه پیام‌نور تهران.

نویسنده مسئول : محمد خنجری صادق، mkhanjari@birjand.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۳/۲۹ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۸/۲۸ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۱/۹/۱۵

چکیده: در این مقاله، بر پایه مفهوم α–شک و رابطه آن با α–برش یک عدد فازی، به بررسی برخی از مفاهیم قابلیت اعتماد پرداخته شده است. برای این منظور، در صورت معلوم بودن توزیع طول عمر مؤلفه‌های سیستم با استفاده از تعریف متغیر تصادفی فازی مقیاس مبتنی بر α–شک برخی از معیارهای قابلیت اعتماد مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، در صورت نامعلوم بودن توزیع طول عمر مؤلفه‌ها یا در دسترس بودن فقط مشاهدات فازی طول عمر مؤلفه‌ها، از تابع توزیع تجربی داده‌های فازی برای تخمین قابلیت اعتماد استفاده گردیده و برای شرح بیشتر نتایج، مثال‌هایی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: α–شک، تابع توزیع تجربی، قابلیت اعتماد، متغیر تصادفی فازی مقیاس، نرخ خطر.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 91G70، 91B16.

۱ مقدمه

در بسیاری از رویدادهای واقعی زندگی مجموعه مشاهدات نادقیق هستند، به ویژه وقتی مجموعه‌ها توسط صفاتی از قبیل طول عمر کم، طول عمر مناسب، طول عمر حدوداً ۵ ساعت و مانند آن توصیف شده باشند. نظریه مجموعه‌های فازی برای اولین بار توسط زاده (۱۹۶۵) معرفی شده است. به علاوه، کاربردهای گوناگونی در علوم مختلف از جمله ریاضیات، مهندسی و اقتصاد پیدا کرده است. این نظریه در واقع برای اقدام در شرایط عدم اطمینان بوده، بسیاری از مفاهیم نادقیق یا فازی را صورت‌بندی ریاضی بخشیده و زمینه را برای استدلال و پیش‌بینی فراهم می‌کند.

متغیر تصادفی در محیط فازی توسط محققین زیادی مورد بررسی قرار گرفته است. اولین تلاش‌ها برای تعریف متغیر تصادفی فازی توسط واکرناک (۱۹۷۸، ۱۹۷۹) صورت گرفته است. بعدها در راستای تعریف واکرناک، پوری و رالسکو (۱۹۸۶) و کروز و میبر (۱۹۸۷) با تکیه بر مفهوم α-برش‌ها، تعریف دیگری از متغیر تصادفی فازی بیان کرده‌اند. کراتشمر (۲۰۰۱)، گیل و همکاران (۲۰۰۶) و شاپیرو (۲۰۰۹) نیز تفسیرهای مختلفی از تعاریف مختلف متغیر تصادفی فازی را بررسی نموده‌اند.

تاکنون در زمینه قابلیت اعتماد با رویکرد فازی مطالعات زیادی صورت گرفته است. هوانگ (۱۹۹۵) با تعمیم پیشامد معمولی به پیشامد فازی، مفاهیم قابلیت اعتماد فازی را معرفی کرده است. جیانگ و چن (۲۰۰۳)، ابتدا یک پیشامد فازی را با استفاده از یک تابع عضویت تعریف نموده و سپس آن را برای تابع بقا به کار برده‌اند. سعیدی و همکاران (۲۰۱۴) با استفاده از تابع چگالی مبتنی بر پارامتر فازی، برخی مفاهیم قابلیت اعتماد را بیان کرده‌اند. حسامیان و همکاران (۲۰۱۹) با استفاده از تعریف α-شک و متغیر فازی مکان-مقیاس برخی مفاهیم استنباط آماری و توابع قابلیت اعتماد سیستم k از n را مورد تحقیق قرار داده‌اند. اکبری و حسامیان (۲۰۲۰) تابع بقای یک متغیر تصادفی فازی شهودی را بر اساس α-برش‌های پایینی و بالایی توابع عضویت آنها مورد مطالعه قرار داده‌اند. مارکو و همکاران (۲۰۲۱) بر اساس پارامتر فازی (با تابع عضویت مثلثی) توزیع نمایی به بررسی α-برش‌های تابع بقا و ارتباط آن با آنتروپی پرداخته‌اند. زنده‌دل و همکاران (۲۰۲۲) بر اساس یک تعریف جدید برای تابع چگالی متغیرهای تصادفی فازی، توابع نرخ خطر و میانگین باقیمانده عمر را برای متغیر تصادفی فازی نمایی مورد بررسی قرار داده‌اند. آنچه که در تحقیقات فوق مسلم است، هیچ کدام از محققین، توابع بقا و نرخ خطر یک مؤلفه سیستم را بر اساس α-شک یک متغیر تصادفی فازی مقیاس بررسی نکرده‌اند. علاوه بر اینکه، توابع بقا و نرخ خطر باید به صورت یک عدد فازی باشند، همچنین این مفاهیم به ازای هر α-شک باید خواص توابع بقا و نرخ خطر در حالت کلاسیک را داشته باشند، این خواص به صورت لم‌هایی در این مقاله مطرح گردیده است.

در این مقاله، ابتدا مفاهیم مقدماتی فازی مطرح گردیده است. سپس بر اساس تعریف α-شک متغیر تصادفی فازی مقیاس، در صورتی که توزیع طول عمر مؤلفه‌ها معلوم باشد، برخی مفاهیم قابلیت اعتماد مورد بررسی قرار گرفته و همچنین در صورت نامعلوم بودن توزیع طول عمر مؤلفه‌ها یا در دسترس بودن فقط مشاهدات فازی طول عمر مؤلفه‌ها، توابع توزیع تجمعی تجربی، بقای تجربی و نرخ خطر تجربی ارائه شده است. به علاوه، با مثال‌های عددی به بررسی و کنکاش بیشتر نتایج پرداخته شده است.

۲ مفاهیم مقدماتی فازی

مجموعه مرجع $\mathbb{X}$ را در نظر بگیرید. مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $\mathbb{X}$ به صورت $\{(x, \tilde{A}(x)); x \in \mathbb{X}\}$ نمایش داده می‌شود. نگاشت $\tilde{A}(x) : \mathbb{X} \longrightarrow [0, 1]$ را که به هر $x \in \mathbb{X}$ یک مقدار از بازه $[0, 1]$ نسبت می‌دهد، تابع عضویت $\tilde{A}$ گویند و با $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نیز نشان داده می‌شود. برای هر $\alpha \in (0, 1]$، زیرمجموعه $\{x \in X \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$، α-برش $\tilde{A}$ نامیده شده و به صورت $\tilde{A}[\alpha] = [\tilde{A}^L_\alpha, \tilde{A}^U_\alpha]$ نمایش داده می‌شود، که در آن $\tilde{A}^L_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{X} \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$

و $\tilde{A}^U_\alpha = \sup\{x \in \mathbb{X} \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$.

تعریف ۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $\mathbb{R}$ را عدد فازی گویند، هرگاه تک‌نمایی، محدب و نیم‌پیوسته بالایی (یعنی به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$، مجموعه $\{x \in \mathbb{R} : \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$ بسته است) باشد.

تعریف ۲. فرض کنید $\tilde{A}$ یک عدد فازی روی $\mathbb{R}$ باشد. $\tilde{A}$ را عدد فازی LR گویند، اگر تابع عضویت آن به صورت

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} L(\dfrac{a-x}{\ell_a}) & x \leq a, \\ R(\dfrac{x-a}{r_a}) & x > a, \end{cases}$$

باشد، که در آن L و R توابعی غیرصعودی از $\mathbb{R}^+$ به $[0, 1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$. عدد حقیقی a، مقدار نما یا میانه و اعداد مثبت ℓ_a و r_a به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست $\tilde{A}$ نامیده می‌شوند. عدد فازی LR با نماد $(a; \ell_a, r_a)_{LR}$ نمایش داده می‌شود.

همچنین $\tilde{A}$ یک عدد فازی مثلثی است، هرگاه به ازای هر $x \in [0, 1]$، $L(x) = R(x) = 1 - x$ و با نماد $(a; \ell_a, r_a)_T$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳. (لیو ، ۲۰۱۳) برای مقایسه اعداد فازی و حقیقی معیاری با عنوان درجه اعتبار میزان کوچکی عدد فازی $\tilde{A}$ نسبت به x معرفی کرده و به صورت $C\{\tilde{A} \leqslant x\} = \frac{1}{2}\big(\sup\limits_{y \leqslant x} \tilde{A}(y) - \sup\limits_{y > x} \tilde{A}(y) + 1\big)$ تعریف می‌شود، که $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$، $x \in \mathbb{R}$، $C : F(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ و $F(\mathbb{R})$ مجموعه تمام اعداد فازی روی $\mathbb{R}$ هستند. α–شک $\tilde{A}$ که نشانگر میزان کوچکی عدد فازی $\tilde{A}$ نسبت به x است، با $\tilde{A}_\alpha$ نمایش داده و به صورت $\tilde{A}_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R} | C\{\tilde{A} \leqslant x\} \geq \alpha\}$ بیان می‌شود. همان طور که ملاحظه می‌شود، α–شک $\tilde{A}$ بزرگ‌ترین کران پایین مجموعه تمام مقادیری از $\mathbb{R}$ است که درجه اعتبار کوچک‌تری $\tilde{A}$ نسبت به آنها، حداقل به بزرگی α است.

تذکر ۱. فرض کنید $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$ و $x \in \mathbb{R}$ باشند. آنگاه

۱. $C\{\tilde{A} \leqslant x\} = 1$ اگر فقط و اگر $\tilde{A}^U_0 \leq 1$ ($\tilde{A}^U_0$ کران بالای α- برش $\tilde{A}$ به ازای $\alpha = 0$).

۲. $C\{\tilde{A} \leqslant x\} = 1 - C\{\tilde{A} > x\}$.

۳. به ازای هر $\tilde{A}$ ثابت، $f(x) = C\{\tilde{A} \leqslant x\}$ یک تابع غیرنزولی نسبت به x هست.

۴. $\tilde{A}_\alpha$ نسبت به $\alpha \in (0, 1]$ یک تابع غیرنزولی هست.

تذکر ۲. فرض کنید $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$. $\tilde{A}_\alpha$ را می‌توان به صورت

$$\tilde{A}_\alpha = \begin{cases} \tilde{A}^L_{2\alpha} & 0 \leq \alpha \leq 0.5, \\ \tilde{A}^U_{2(1-\alpha)} & 0.5 < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

بیان کرد، که $\tilde{A}^L_\alpha$ و $\tilde{A}^U_\alpha$ مقادیر پایین و بالای α-برش عدد فازی $\tilde{A}$ هستند. دقت کنید که، رابطه α-شک با α-برش به ازای $\alpha \in [0, 1]$ به صورت $\tilde{A}[\alpha] = [\tilde{A}_{\frac{\alpha}{2}} \, , \, \tilde{A}_{1-\frac{\alpha}{2}}]$ است.

تذکر ۳. به ازای هر $\tilde{A}, \tilde{B} \in F(\mathbb{R})$، $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in [0, 1]$،

$$(\tilde{A} \oplus \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha + \tilde{B}_\alpha, \qquad (\lambda \otimes \tilde{A})_\alpha = \begin{cases} \lambda \tilde{A}_\alpha & \lambda > 0, \\ 0 & \lambda = 0, \\ \lambda \tilde{A}_{1-\alpha} & \lambda < 0. \end{cases}$$

متغیر تصادفی در محیط فازی توسط محققین زیادی تعریف شده است. واکرناک (۱۹۷۸، ۱۹۷۹) با استفاده از α-برش، متغیر تصادفی فازی را برای $\alpha \in (0, 1]$ به صورت $\{(\omega, x) : \tilde{X}(\omega)[\alpha] \subseteq B\} \in F \times \mathbb{B}$ بیان کرده است، که در آن B مجموعه بورل، $\mathbb{B}$ سیگما-جبر متشکل از زیرمجموعه‌های بورل $\mathbb{R}$، $B \in \mathbb{B}$، F سیگما-جبر متشکل از ωها و $\tilde{X}(\omega)[\alpha]$ تابعی مجموعه‌ای مقدار با تعریف $\tilde{X}(\omega)[\alpha] = \{x : \mu_{\tilde{X}(\omega)}(x) \geq \alpha\}$ است. بعدها، پوری و رالسکو (۱۹۸۶) متغیر تصادفی فازی را به صورت زیر تعریف کرده‌اند.

تعریف ۴. در فضای احتمال (Ω, A, P)، $\tilde{X} : \Omega \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک متغیر تصادفی فازی است اگر به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$، $\tilde{X}^L_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\tilde{X}^U_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ متغیرهای تصادفی کلاسیک باشند. به طور هم‌ارز، $\tilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی است، هرگاه اندازه‌پذیر F باشد. به عبارت دیگر، برای هر $\alpha \in (0, 1]$، $\{\omega : \tilde{X}^L_\alpha(\omega) \in B\} \in F$ و $\{\omega : \tilde{X}^U_\alpha(\omega) \in B\} \in F$.

تعریف متغیر تصادفی فازی توسط کروز و میير (۱۹۸۷) ، نیز معادل با تعریف ۴ هست. بنا بر مفهوم α-شک و رابطه آن با α-برش، بیان دیگری از تعریف واکرناک توسط حسامیان و چاچی (۲۰۱۵) به صورت زیر ارائه شده است.

تعریف ۵. در فضای احتمال (Ω, A, P)، $\tilde{X} : \Omega \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک متغیر تصادفی فازی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\alpha \in (0, 1]$، $\tilde{X}_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی کلاسیک باشد. به‌طور هم‌ارز، $\tilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی است، هرگاه اندازه‌پذیر F باشد. یعنی برای هر $\alpha \in (0, 1]$، $\{\omega : \tilde{X}_\alpha(\omega) \in B\} \in F$.

روابط بین تعاریف ۴ و ۵ به صورت

$$\tilde{X}_\alpha = \begin{cases} \tilde{X}^L_{2\alpha} & 0 \leq \alpha \leq 0/5, \\ \tilde{X}^U_{2(1-\alpha)} & 0/5 < \alpha \leq 1, \end{cases} \qquad \tilde{X}[\alpha] = [\tilde{X}_{\frac{\alpha}{2}} \, , \, \tilde{X}_{1-\frac{\alpha}{2}}], \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

است. دو متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ مستقل و هم‌توزیع هستند، هرگاه $\tilde{X}_\alpha$ و $\tilde{Y}_\alpha$ به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ مستقل و هم‌توزیع باشند. همچنین $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n$ یک نمونه تصادفی فازی هستند، اگر $\tilde{X}_i$ها متغیرهای تصادفی فازی مستقل و هم‌توزیع باشند.

تعریف ۶. $\tilde{F}_{\tilde{X}}(x)$ تابع توزیع تجمعی فازی $\tilde{X}$ نامیده و α-شک آن به صورت

$$\begin{aligned}\left(\tilde{F}_{\tilde{X}}(x)\right)_{\alpha} &= \begin{cases} \inf\limits_{\beta \in I_{2\alpha}} F_{\tilde{X}_{\beta}}(x) & 0 \leq \alpha \leq 0.5, \\ \sup\limits_{\beta \in I_{2(1-\alpha)}} F_{\tilde{X}_{\beta}}(x) & 0.5 < \alpha \leq 1, \end{cases} \\ &= F_{\tilde{X}_{1-\alpha}}(x), \end{aligned} \qquad (1)$$

بیان می‌شود و $I_{\alpha} = [\alpha/2, 1-\alpha/2]$.

تذکر ۴. $\bar{\tilde{F}}_{\tilde{X}}(x)$ را در نقطه x در نظر بگیرید. α-شک آن به صورت $(\bar{\tilde{F}}_{\tilde{X}}(x))_{\alpha} = \bar{F}_{\tilde{X}_{\alpha}}(x)$ است.

تعریف ۷. فرض کنید g یک تابع چگالی احتمال و X یک متغیر تصادفی مقیاس با تابع چگالی

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} g(x/\sigma), \qquad x \in S_X \subseteq \mathbb{R}, \sigma > 0,$$

باشد، که S_X، تکیه‌گاه X هست. بنابراین $\tilde{X} = X \otimes (1; U_1, U_2)_T$ متغیر تصادفی فازی مقیاس (**SFRV**) نامیده می‌شود، اگر

۱. $P(S_X \subseteq (0, \infty)) = 1$،

۲. U_1 و U_2 مستقل از X، $U_1 \sim U(a_1, b_1)$ و $U_2 \sim U(a_2, b_2)$ باشند، به طوری که $0 \leq a_1 < b_1$ و $0 \leq a_2 < b_2$.

لم ۱. (حسامیان و همکاران ، ۲۰۱۹) فرض کنید $\tilde{X}$ متغیر تصادفی فازی مقیاس باشد، آنگاه

$$(\tilde{F}_{\tilde{X}}(z))_{\alpha} = \begin{cases} F_X\left(\frac{z}{1+(1-2\alpha)b_2}\right) + \int_{z/(1+(1-2\alpha)b_2)}^{z/(1+(1-2\alpha)a_2)} \frac{z/x - 1 - (1-2\alpha)a_2}{(1-2\alpha)(b_2-a_2)} f_X(x)dx & 0 \leq \alpha < 0.5, \\ F_X(z) & \alpha = 0.5, \\ F_X\left(\frac{z}{1+(1-2\alpha)a_1}\right) + \int_{z/(1+(1-2\alpha)a_1)}^{z/(1+(1-2\alpha)b_1)} \frac{z/x - 1 - (1-2\alpha)b_1}{(2\alpha-1)(b_1-a_1)} f_X(x)dx & 0.5 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

که در آن $(\tilde{F}_{\tilde{X}}(z))_{\alpha}$، α-شک تابع توزیع تجمعی است.

تذکر ۵. فرض کنید $\tilde{X}$ یک **SFRV** باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\tilde{X}_{\alpha}}(z) &= 1 - P(\tilde{X}_{\alpha} \leq z) = 1 - (\tilde{F}_{\tilde{X}}(z))_{1-\alpha}, \\ \bar{F}_{\tilde{X}_{1-\alpha}}(z) &= 1 - P(\tilde{X}_{1-\alpha} \leq z) = 1 - (\tilde{F}_{\tilde{X}}(z))_{\alpha}. \end{aligned} \qquad (2)$$

تذکر ۶. فرض کنید متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ یک **SFRV** باشد، بر اساس تذکر ۵،

$$f_{\tilde{X}_\alpha}(z) = -\frac{d}{dz}\bar{F}_{\tilde{X}_\alpha}(z) = \frac{d}{dz}(F_{\tilde{X}}(z))_{۱-\alpha}. \tag{۳}$$

دقت شود که $f_{\tilde{X}_\alpha}(z)$ به ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ خواص تابع چگالی احتمال را دارد.

۳ برخی مفاهیم قابلیت اعتماد فازی

در تحلیل قابلیت اعتماد کلاسیک، معمولاً داده‌های جمع‌آوری شده، پارامترهای مدل و احتمال‌های مربوطه کمیت‌هایی دقیق در نظر گرفته می‌شوند. اما، در عمل وضعیت‌هایی رخ می‌دهد که در آنها به دلیل شرایط حاکم بر آزمایش، مفروضات فوق برقرار نیستند. در چنین شرایطی نیازمند توسیع روش‌های کلاسیک در جهت صورت‌بندی مفاهیم دقیق خواهیم بود. نظریه مجموعه‌های فازی، یکی از ابزارهای مناسب برای غلبه بر این مشکل است.

در این بخش، در صورت معلوم بودن توزیع طول عمر مؤلفه‌ها با استفاده از تعریف متغیر تصادفی فازی مقیاس مبتنی بر α-شک و همچنین در صورت نامعلوم بودن توزیع طول عمر مؤلفه‌ها از تابع توزیع تجربی داده‌های فازی برای تخمین قابلیت اعتماد استفاده گردیده است.

۳.۱ قابلیت اعتماد با توزیع معلوم طول عمر مؤلفه‌های سیستم

اگر توزیع طول عمر مؤلفه‌های سیستم معلوم و از خانواده مقیاسی باشد، α-شک توابع بقا و نرخ خطر که به ترتیب با نمادهای $(\tilde{R}_{\tilde{T}}(z))_\alpha$ و $(\tilde{r}_{\tilde{T}}(z))_\alpha$ نشان داده می‌شوند، به صورت زیر قابل محاسبه هستند.

لم ۲. فرض کنید $\tilde{T}$ یک **SFRV** باشد، آنگاه

$$(\tilde{R}_{\tilde{T}}(z))_\alpha = \begin{cases} R_T(\frac{z}{۱+(۲\alpha-۱)a_۱}) - \int_{z/(۱+(۲\alpha-۱)a_۱)}^{z/(۱+(۲\alpha-۱)b_۱)} \frac{z/t-۱-(۲\alpha-۱)b_۱}{(۱-۲\alpha)(b_۱-a_۱)} f_T(t)dt & ۰ \leq \alpha < ۰/۵, \\ R_T(z) & \alpha = ۰/۵ \\ R_T(\frac{z}{۱+(۲\alpha-۱)b_۲}) - \int_{z/(۱+(۲\alpha-۱)b_۲)}^{z/(۱+(۲\alpha-۱)a_۲)} \frac{z/t-۱-(۲\alpha-۱)a_۲}{(۲\alpha-۱)(b_۲-a_۲)} f_T(t)dt & ۰/۵ < \alpha \leq ۱. \end{cases}$$

برهان: بنا بر لم ۱ و روابط (۲) می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
(\tilde{R}_{\tilde{T}}(z))_\alpha &= R_{\tilde{T}_\alpha}(z) = 1 - (\tilde{F}_{\tilde{T}}(z))_{1-\alpha} \\
&= \begin{cases}
R_T\left(\dfrac{z}{1+(2\alpha-1)a_1}\right) - \displaystyle\int_{z/(1+(2\alpha-1)a_1)}^{z/(1+(2\alpha-1)b_1)} \dfrac{z/t-1-(2\alpha-1)b_1}{(1-2\alpha)(b_1-a_1)} f_T(t)dt & 0 \le \alpha < 0.5, \\
R_T(z) & \alpha = 0.5, \\
R_T\left(\dfrac{z}{1+(2\alpha-1)b_2}\right) - \displaystyle\int_{z/(1+(2\alpha-1)b_2)}^{z/1+(2\alpha-1)a_2} \dfrac{z/t-1-(2\alpha-1)a_2}{(2\alpha-1)(b_2-a_2)} f_T(t)dt & 0.5 < \alpha \le 1.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

تعریف ۸. فرض کنید $\tilde{T}$ طول عمر مؤلفه باشد. α-شک تابع نرخ خطر $\tilde{T}$ را می‌توان به صورت

$$
(\tilde{r}_{\tilde{T}}(z))_\alpha = \begin{cases}
\inf\limits_{\beta \in I_{2\alpha}} \dfrac{f_{\tilde{T}_\beta}(z)}{R_{\tilde{T}_\beta}(z)} & 0 \le \alpha \le 0.5, \\
\sup\limits_{\beta \in I_{2(1-\alpha)}} \dfrac{f_{\tilde{T}_\beta}(z)}{R_{\tilde{T}_\beta}(z)} & 0.5 < \alpha \le 1,
\end{cases} \tag{4}
$$

نوشت. با توجه به رابطه (۴)، کران‌های پایین و بالای $\tilde{r}_{\tilde{T}}(z)$ به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
(\tilde{r}_{\tilde{T}}(z))_\alpha^L &= \inf_{\beta \in [\alpha/2, 1-\alpha/2]} \frac{f_{\tilde{T}_\beta}(z)}{R_{\tilde{T}_\beta}(z)}, \\
(\tilde{r}_{\tilde{T}}(z))_\alpha^U &= \sup_{\beta \in [\alpha/2, 1-\alpha/2]} \frac{f_{\tilde{T}_\beta}(z)}{R_{\tilde{T}_\beta}(z)}.
\end{aligned}
$$

توابع بقا و نرخ خطر برای خانواده مقیاس در حالتی که توزیع متغیر تصادفی فازی طول عمر $\tilde{T}$ معلوم باشد، قابل محاسبه هستند. اما یک سؤال اساسی مطرح می‌شود، چگونه می‌توان توزیع فازی $\tilde{T}$ را بر اساس مشاهدات فازی که از آن پیروی می‌کنند، تشخیص داد؟ زنده‌دل و همکاران (۲۰۱۷)، پاسخ این سؤال را بر اساس آزمون‌های کولموگروف و شاپیرو-ویلکس که برای مشاهدات فازی برگرفته شده از خانواده مقیاس فازی ساخته شده است، مورد بررسی قرار داده‌اند. لذا در صورت تشخیص توزیع مقیاس فازی مؤلفه‌های سیستم، می‌توان توابع بقا و نرخ خطر فازی آن را محاسبه کرد.

۳.۲ قابلیت اعتماد با توزیع نامعلوم طول عمر مؤلفه‌های سیستم

اگر توزیع طول عمر $\tilde{T}$ مشخص نباشد، یا اگر فقط مشاهدات فازی طول عمر مؤلفه‌ها در دسترس باشد، می‌توان با استفاده از توزیع تجربی آنها برای تخمین توابع بقا و نرخ خطر استفاده کرد. فرض کنید $\tilde{t} = (\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_n)$ یک نمونه تصادفی فازی از مشاهدات $\tilde{T}$ باشد، بنابراین با استفاده از تعریف تابع توزیع تجربی برای این مشاهدات نادقیق، توابع بقا و نرخ خطر تعریف می‌شوند.

تعریف ۹. $\tilde{\hat{F}}_n(t)$، تابع توزیع تجربی فازی $\tilde{T}$ گفته می‌شود، هرگاه

$$(\tilde{\hat{F}}_n(t))_\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I((\tilde{t}_i)_{1-\alpha} \leq t).$$

دقت کنید که، این تابع توزیع تجربی برای هر $\alpha \in [0\ ,\ 1]$، خاصیت سازگاری و همگرایی قوی به سمت $(\tilde{F}_{\tilde{T}}(t))_\alpha$ را دارد. همچنین، α-شک تابع بقای تجربی $\tilde{T}$ به صورت

$$(\tilde{\hat{R}}_n(t))_\alpha = (\tilde{\hat{\bar{F}}}_n(t))_\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I((\tilde{t}_i)_\alpha \geq t),$$

تعریف می‌شود. تابع $(\tilde{\hat{R}}_n(t))_\alpha = \hat{R}_{n,\alpha}(t)$ نسبت به α همواره صعودی بوده و خواص سازگاری و همگرایی قوی به سمت $(\tilde{R}_{\tilde{T}}(t))_\alpha = R_{\tilde{T}_\alpha}(t)$ را دارد. به علاوه دارای α-برش‌های $\tilde{\hat{R}}_n(t)[\alpha] = [\tilde{\hat{R}}_{n,\alpha/2}(t), \tilde{\hat{R}}_{n,1-\alpha/2}(t)]$ هستند.

برای اطلاع از همگرایی و سازگاری، به شائو (۲۰۰۴) و لهمن و رمانو (۲۰۰۵) مراجعه شود.

تعریف ۱۰. (ژرکوفسکی ، ۱۹۹۸) دنباله متغیرهای تصادفی فازی $\{\tilde{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ در احتمال همگرا به عدد فازی $\tilde{Z}$ است ($\tilde{T}_n \xrightarrow{P} \tilde{Z}$)، اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$،

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} P\Big(\omega\in\Omega : \big|(\tilde{T}_n(\omega))^L_\alpha - \tilde{Z}^L_\alpha\big| \vee \big|(\tilde{T}_n(\omega))^U_\alpha - \tilde{Z}^U_\alpha\big| > \varepsilon\Big) \overset{n\to\infty}{\rightarrow} 0,$$

که در آن "$\vee$" نمایانگر عملگر ماکسیمم است.

قضیه ۱. فرض کنید $\tilde{t} = (\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_n)$ یک نمونه تصادفی فازی از $\tilde{T}$ باشد. آنگاه $\tilde{\hat{F}}_n(t) \xrightarrow{P} \tilde{F}_{\tilde{T}}(t)$.

برهان: به ازای هر t ثابت، تابع نشانگر $I(\tilde{T}_{i\beta} \leq t)$ یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر $F_{\tilde{T}_\beta}(t)$ است. بنابراین $n\hat{F}_{n,\beta}(t) \sim Bin(n, F_{\tilde{T}_\beta}(t))$، یعنی دارای توزیع دوجمله‌ای است.

بنا بر قضیه گلیونکو-کانتلی (قضیه بنیادی آمار) $\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\hat{F}_{n,\beta}(t)-F_{\tilde{T}_\beta}(t)\right| \xrightarrow{a.s.} ۰$ و این نتیجه برای هر $\beta\in I_\alpha=[\alpha/۲,۱-\alpha/۲]$ و $\alpha\in(۰,۱]$ برقرار است. بنابراین برای هر $\alpha\in(۰,۱]$، $\inf_{\beta\in I_\alpha}\hat{F}_{\tilde{T}_\beta}(t)\xrightarrow{a.s.}\inf_{\beta\in I_\alpha}F_{\tilde{T}_\beta}(t)$ و $\sup_{\beta\in I_\alpha}\hat{F}_{\tilde{T}_\beta}(t)\xrightarrow{a.s.}\sup_{\beta\in I_\alpha}F_{\tilde{T}_\beta}(t)$. از آنجا که همگرایی قوی $(a.s.)$، همگرایی در احتمال را نتیجه می‌دهد، بنابراین همگرایی‌های اخیر در احتمال نیز برقرار هستند. در نتیجه با استفاده از تعریف ۱۰ اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۲. فرض کنید $\tilde{t}=(\tilde{t}_۱,\dots,\tilde{t}_n)$ یک نمونه تصادفی فازی از $\tilde{T}$ باشد. آنگاه $\tilde{\hat{R}}_n(t)\xrightarrow{P}\tilde{R}_{\tilde{T}}(t)$.

برهان: مشابه قضیه ۱ ثابت می‌شود.

در آمار ناپارامتری، برآورد تابع چگالی را می‌توان بر اساس تابع کرنل به دست آورد. تابع کرنل (هسته)، تابعی متقارن و تک‌مدی حول صفر بوده که اولین بار برای تخمین تابع چگالی احتمال استفاده شده و آن را با $K(u)$ نمایش داده و شرایط زیر برای آن برقرار هستند.

$$۱)\int K(u)du=۱,\qquad ۲)\int uK(u)du=۰,\qquad ۳)\int u^۲K(u)du=\sigma^۲>۰,$$

با توجه به تابع کرنل $K(u)$، برآورد $f_{\tilde{T}_\beta}(t)$ را می‌توان به صورت

$$\hat{f}_{n,\beta}(t)=\frac{۱}{nh}\sum_{i=۱}^{n}K\Big(\frac{t-\tilde{t}_{i\beta}}{h}\Big),\quad \beta\in[۰,۱],$$

نشان داد. $\hat{f}_{n,\beta}(t)$ علیرغم اریب بودن، دارای خاصیت همگرایی قوی به سمت $f_{\tilde{T}_\beta}(t)$ بوده و h پارامتر همواری است.

قضیه ۳. فرض کنید $\tilde{t}=(\tilde{t}_۱,\dots,\tilde{t}_n)$ یک نمونه تصادفی فازی از $\tilde{T}$ باشد و شرایط

۱. تابع کرنل K، یک تابع از راست پیوسته است.
۲. K تابعی با تغییرات کراندار است.
۳. $\lim_{|t|\to ۰}K(t)=۰$.
۴. $\sup_{\beta\in[۰,۱]}f_{\tilde{T}_\beta}(t)$ یک تابع چگالی به طور یکنواخت پیوسته است.
۵. به ازای هر $\gamma>۰$، $\sum_{n=۱}^{\infty}\exp(-\gamma n h_n{}^۲)<\infty$.

نیز برقرار باشند. آنگاه $\tilde{\hat{f}}_n(t)\xrightarrow{P}\tilde{f}_{\tilde{T}}(t)$.

برهان: تحت فرض‌های قضیه و بنا بر قضیه‌ای در ویت و وایسبخ (۲۰۱۲)،

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\tilde{\hat{f}}_{n,\beta}(t) - f_{\tilde{T}_\beta}(t)\right| \overset{a.s.}{\to} ۰,$$

این نتیجه برای هر $\beta \in I_\alpha = [\alpha/۲, ۱-\alpha/۲]$ برقرار است، که $\alpha \in (۰,۱]$. بنابراین به ازای هر $\alpha \in (۰,۱]$،

$$(\tilde{\hat{f}}(t))^L_\alpha = \inf_{\beta\in I_\alpha} \frac{۱}{nh}\sum_{i=۱}^{n} K(\tfrac{t-\tilde{t}_{i\beta}}{h}) \overset{a.s.}{\to} \inf_{\beta\in I_\alpha} f_{\tilde{T}_\beta}(t) = (\tilde{f}_{\tilde{T}}(t))^L_\alpha,$$

$$(\tilde{\hat{f}}(t))^U_\alpha = \sup_{\beta\in I_\alpha} \frac{۱}{nh}\sum_{i=۱}^{n} K(\tfrac{t-\tilde{t}_{i\beta}}{h}) \overset{a.s.}{\to} \sup_{\beta\in I_\alpha} f_{\tilde{T}_\beta}(t) = (\tilde{f}_{\tilde{T}}(t))^U_\alpha.$$

همگرایی‌های اخیر در احتمال نیز برقرار هستند. در نتیجه با استفاده از تعریف ۱۰ اثبات کامل می‌شود.

تعریف ۱۱. $\tilde{\hat{r}}_n(t)$ تابع نرخ خطر تجربی فازی $\tilde{T}$ گفته می‌شود، هرگاه α-شک آن به صورت

$$(\tilde{\hat{r}}_n(t))_\alpha = \begin{cases} \inf\limits_{\beta\in I_{۲\alpha}} \frac{\hat{f}_{n,\beta}(t)}{\hat{R}_{n,\beta}(t)} & ۰ \le \alpha \le ۰/۵, \\ \sup\limits_{\beta\in I_{۲(۱-\alpha)}} \frac{\hat{f}_{n,\beta}(t)}{\hat{R}_{n,\beta}(t)} & ۰/۵ < \alpha \le ۱, \end{cases}$$

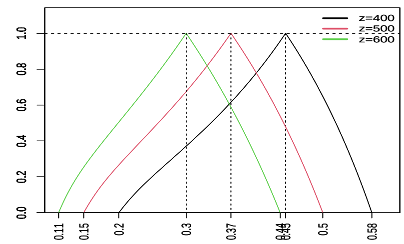
بیان شود و $I_\alpha = [\alpha/۲, ۱-\alpha/۲]$. به علاوه، کران‌های پایین و بالای $\tilde{\hat{r}}_n(t)$ عبارتند از

$$(\tilde{\hat{r}}_n(t))^L_\alpha = \inf_{\beta\in[\frac{\alpha}{۲}, ۱-\frac{\alpha}{۲}]} \frac{\hat{f}_{n,\beta}(t)}{\hat{R}_{n,\beta}(t)},$$
$$(\tilde{\hat{r}}_n(t))^U_\alpha = \sup_{\beta\in[\frac{\alpha}{۲}, ۱-\frac{\alpha}{۲}]} \frac{\hat{f}_{n,\beta}(t)}{\hat{R}_{n,\beta}(t)}. \tag{۵}$$

مثال ۱. فرض کنید متغیر تصادفی فازی $\tilde{T}$ یک **SFRV** باشد، به طوری که $T \sim \mathrm{Exp}(۰/۰۰۲)$، $U_۱ \sim U(۰,۱)$ و $U_۲ \sim U(۰,۱)$ باشند. بنا بر لم ۲،

$$(\tilde{R}_{\tilde{T}}(z))_\alpha = \begin{cases} R_T(z) - \displaystyle\int_z^{z/۲\alpha} \frac{z/t - ۲\alpha}{(۱-۲\alpha)} f_T(t)dt & ۰ \le \alpha < ۰/۵, \\ R_T(z) & \alpha = ۰/۵, \\ R_T(\frac{z}{۲\alpha}) - \displaystyle\int_{z/۲\alpha}^{z} \frac{z/t - ۱}{(۲\alpha - ۱)} f_T(t)dt & ۰/۵ < \alpha \le ۱. \end{cases}$$

که نمودار $\tilde{R}_{\tilde{T}}(z)$ برای نقاط ۴۰۰، ۵۰۰ و ۶۰۰ در شکل ۱ نمایش داده شده و در نقاط مختلف عدد فازی است.



شکل ۱. نمودار $\tilde{R}_{\tilde{T}}(z)$ برای نقاط ۴۰۰، ۵۰۰ و ۶۰۰

برای محاسبه $\tilde{r}_{\tilde{T}}(z)$، بنا بر (۳) و لم ۲،

$$f_{\tilde{T}_\beta}(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_z^{z/2\beta}\frac{1}{t(1-2\beta)}f_T(t)dt & 0\leq\beta<0/5,\\ f_T(z) & \beta=0/5,\\ \displaystyle\int_{z/2\beta}^{z}\frac{1}{t(2\beta-1)}f_T(t)dt & 0/5<\beta\leq 1.\end{cases}$$

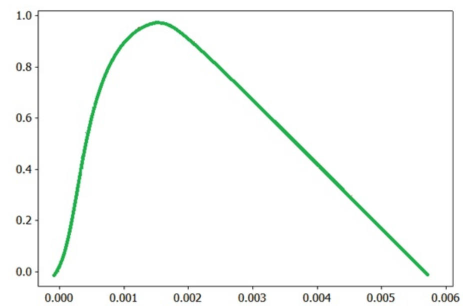
$$R_{\tilde{T}_\beta}(z)=\begin{cases}\displaystyle R_T(z)-\int_z^{z/2\beta}\frac{z/t-2\beta}{(1-2\beta)}f_T(t)dt & 0\leq\beta<0/5,\\ R_T(z) & \beta=0/5,\\ \displaystyle R_T(\frac{z}{2\beta})-\int_{z/2\beta}^{z}\frac{z/t-1}{(2\beta-1)}f_T(t)dt & 0/5<\beta\leq 1.\end{cases}$$

که با جایگذاری $f_{\tilde{T}_\beta}(z)$ و $R_{\tilde{T}_\beta}(z)$ در (۵)،

$$(\tilde{r}_{\tilde{T}}(z))_\alpha^L=\begin{cases}\displaystyle\inf_{\beta\in[\alpha/2,0/5]}\frac{\displaystyle\int_z^{z/2\beta}\frac{1}{t(1-2\beta)}f_T(t)dt}{\displaystyle R_T(z)-\int_z^{z/2\beta}\frac{z/t-2\beta}{(1-2\beta)}f_T(t)dt} & 0\leq\alpha<0/5,\\ r_T(z) & \alpha=0/5,\\ \displaystyle\inf_{\beta\in[0/5,1-\alpha/2]}\frac{\displaystyle\int_{z/2\beta}^{z}\frac{1}{t(2\beta-1)}f_T(t)dt}{\displaystyle R_T(\frac{z}{2\beta})-\int_{z/2\beta}^{z}\frac{z/t-1}{(2\beta-1)}f_T(t)dt} & 0/5<\alpha\leq 1\end{cases}$$

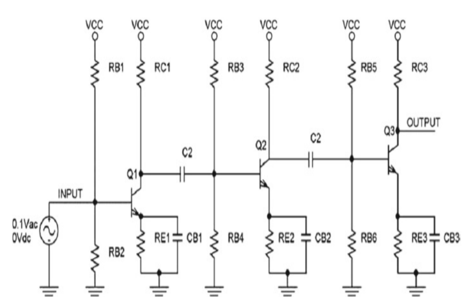
$$(\tilde{r}_{\tilde{T}}(z))^U_\alpha = \begin{cases} \sup\limits_{\beta\in[\alpha/۲,۰/۵]} \dfrac{\displaystyle\int_z^{z/۲\beta} \frac{۱}{t(۱-۲\beta)} f_T(t)dt}{R_T(z) - \displaystyle\int_z^{z/۲\beta} \frac{z/t-۲\beta}{(۱-۲\beta)} f_T(t)dt} & ۰ \le \alpha < ۰/۵, \\ r_T(z) & \alpha = ۰/۵, \\ \sup\limits_{\beta\in[۰/۵,۱-\alpha/۲]} \dfrac{\displaystyle\int_{z/۲\beta}^{z} \frac{۱}{t(۲\beta-۱)} f_T(t)dt}{R_T(\frac{z}{۲\beta}) - \displaystyle\int_{z/۲\beta}^{z} \frac{z/t-۱}{(۲\beta-۱)} f_T(t)dt} & ۰/۵ < \alpha \le ۱. \end{cases}$$

حال با در نظر گرفتن $z = ۵۰۰$ نمودار $\tilde{r}_{\tilde{T}}(z)$ در شکل ۲ نمایش داده شده و حدوداً ۰/۰۰۲ است.



شکل ۲. نمودار $\tilde{r}_{\tilde{T}}(z)$ برای نقطه ۵۰۰

مثال ۲. (سدرا و اسمیت ، ۲۰۰۴) یک دستگاه تقویت کننده سیگنال سه مرحله‌ای، که نمودار آن در شکل ۳ نمایش داده شده است را در نظر بگیرید. در این مدار به منظور تقویت سیگنال ورودی، از سه ترانزیستور $Q_۱$، $Q_۲$ و $Q_۳$ نوع NPN به شکل سری استفاده شده است.



شکل ۳. نمودار تقویت‌کننده سه مرحله‌ای

داده‌های موجود در جدول ۱، طول عمر فازی (در ۱۰۰۰ ساعت) ترانزیستور نوع دوم NPN هستند.

جدول ۱. مشاهدات فازی مثلثی $(t_i; l_{t_i}, r_{t_i})_T$ طول عمر مؤلفه $Q_۲$

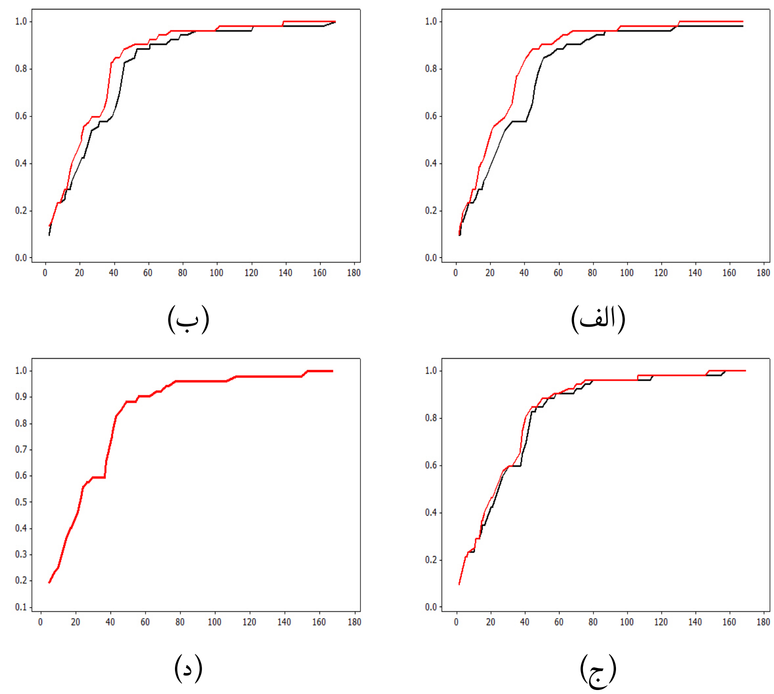
t_i	l_{t_i}	r_{t_i}	t_i	l_{t_i}	r_{t_i}	t_i	l_{t_i}	r_{t_i}
۱/۱۷	۰/۲۲	۰/۲۲	۲۲/۸۰	۴/۴۳	۳/۹۳	۳۹/۷۹	۷/۵۲	۷/۰۵
۲۳/۰۱	۳/۹۱	۴/۲۷	۳۹/۵۱	۶/۵۴	۶/۷۹	۴۱/۰۴	۶/۱۷	۶/۸۴
۰/۲۱	۰/۰۳	۰/۰۳	۷۶/۸۸	۱۱/۶۲	۱۲/۷۴	۴/۱۶	۰/۷۲	۰/۶۵
۴۴/۲۸	۸/۳۸	۸/۰۷	۰/۰۸	۰/۰۱	۰/۰۱	۱۰۹/۶۹	۱۸/۵۵	۲۱/۱۹
۵۵/۲۲	۸/۳۹	۱۰/۶۳	۲۵/۹۲	۴/۴۹	۴/۹۵	۱۵۱/۵۳	۲۶/۷۱	۲۳/۷۷
۳۷/۱۴	۷/۰۹	۵/۸۵	۱۶/۱۸	۲/۹۰	۲/۶۰	۳۸/۵۰	۶/۰۱	۶/۰۷
۳۶/۹۳	۵/۸۹	۶/۸۳	۳۹/۲۲	۶/۶۹	۷/۵۴	۲۳/۵۸	۳/۵۴	۴/۱۸
۲۳/۷۹	۴/۰۰	۳/۹۳	۲/۶۰	۰/۳۹	۰/۵۱	۴۲/۱۵	۷/۳۷	۷/۳۵
۶/۱۴	۱/۰۵	۱/۰۹	۲/۱۳	۰/۳۲	۰/۴۱	۱۴/۶۵	۲/۷۷	۴۲/۹۱
۱۸/۱۵	۳/۵۰	۳/۱۱	۱۰/۸۲	۱/۹۱	۱/۷۴	۴۸/۳۴	۷/۹۸	۹/۳۸
۲۰/۶۰	۳/۹۵	۳/۷۷	۱۴/۲۰	۲/۸۲	۲/۵۶	۷۱/۰۵	۱۱/۳۸	۱۳/۰۹
۳۷/۲۰	۶/۰۳	۷/۰۶	۴۱/۷۷	۸/۲۰	۶/۸۰	۴۱/۶۹	۷/۱۰	۶/۶۸
۱۳/۹۶	۲/۵۳	۲/۲۰	۲/۱۸	۰/۳۴	۰/۳۹	۹/۷۶	۱/۸۲	۱/۶۹
۴/۳۳	۰/۶۹	۰/۷۰	۲۸/۸۵	۰/۷۴	۴/۴۸	۱۳/۷۰	۲/ ۴۱	۲/۶۲
۱/۱۷	۰/۲۲	۰/۲۰	۴/۶۵	۰/۸۸	۰/۷۷	۴۸/۲۹	۷/۸۸	۸/۷۳
۰/۴۴	۰/۰۶	۰/۰۶	۲۱/۵۳	۳/۶۷	۳/۲۵	۳۸/۸۹	۶/ ۳۷	۷/۳۶
۶۵/۹۴	۱۱/۶۵	۱۲/۲۹	۱۹/۰۷	۳/۲۲	۳/ ۴۰			
۱۰/۵۸	۱/۶۸	۱/۹۹	۱۵/۷۸	۳/۰۴	۳/۰۲			

با ماکروهایی که در نرم افزار $MiniTab۱۶$ نوشته شده، کران‌های پایین و بالای $\tilde{\hat{F}}_n(t)$ و $\tilde{\hat{R}}_n(t)$ برای $h = ۱۰$ و α های مختلف در شکل‌های ۴ و ۵ نمایش داده شده‌اند.

همچنین، نمودار توابع $\tilde{\hat{f}}_n(t)$ و $\tilde{\hat{r}}_n(t)$ با استفاده از نرم‌افزار $MiniTab۱۶$ در شکل‌های ۶ و ۷ نمایش داده شده‌اند. با در نظر گرفتن $h = ۱۰$ و تابع کرنل نرمال (گوسی) $K(u) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}u^۲}$، $\tilde{\hat{f}}_n(t)$ در نقاط $t = ۲۰, ۶۰$ به ترتیب حدوداً ۰/۰۱۵۵ و ۰/۰۰۴ و $\tilde{\hat{r}}_n(t)$ در نقاط $t = ۷۰, ۸۰$ به ترتیب حدوداً ۰/۰۲۰۵ و ۰/۰۳۵ هستند.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، در صورت معلوم بودن توزیع طول عمر مؤلفه‌های سیستم با استفاده از تعریف α-شک متغیر تصادفی فازی مقیاس، برخی از مفاهیم قابلیت اعتماد نظیر توابع بقا و نرخ خطر و همچنین در صورت نامعلوم بودن توزیع طول عمر مؤلفه‌ها بر اساس توزیع تجربی، توابع بقا و نرخ خطر مورد بررسی قرارگرفته‌اند. به علاوه، مثال‌هایی عددی نیز برای نشان دادن محاسبه عملگرها بیان گردیده است. برای مطالعه در آینده بر اساس این مفهوم پیشنهادی متغیر تصادفی فازی، می‌توان تابع متوسط باقیمانده عمر را تعریف کرده و رابطه آن با توابع بقا و نرخ خطر را مورد بررسی قرار داد. همچنین می‌توان بر مبنای α-شک متغیر تصادفی فازی، آماره‌های مرتب فازی را تعریف کرده و از آن برای محاسبه تابع قابلیت اعتماد یک سیستم با مؤلفه‌های موازی و سری استفاده کرد.



شکل ۴. نمودار کران‌های پایین و بالای $\tilde{\hat{F}}_n(t)$ برای الف- $\alpha = ۰/۲$، ب- $\alpha = ۰/۵$ ، ج- $\alpha = ۰/۸$، د- $\alpha = ۱$

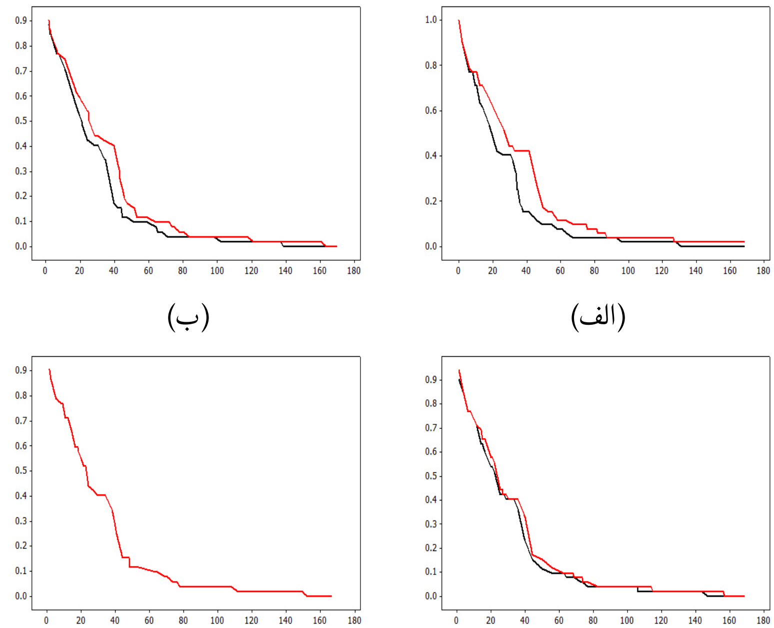
تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات و پیشنهادات داوران محترم، رهنمودهای ارزنده و ویرایش ادبی سردبیر محترم و هیئت تحریریه مجله که باعث ارتقا کیفی مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

Akbari, M. G. and Hesamian, G. (2020), Time-Dependent Intuitionistic Fuzzy System Reliability Analysis, *Soft Computing*, **24**, 14441-14448.

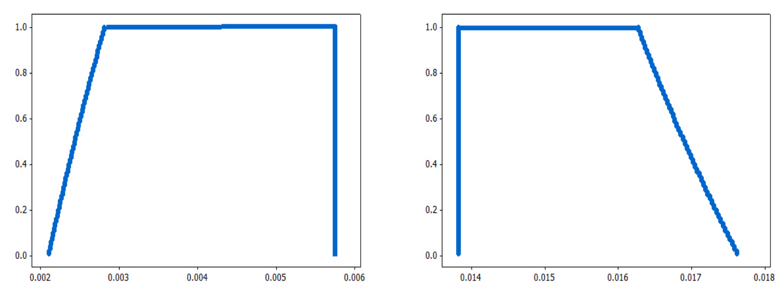
Gil, M. A., López-Díaz, M. and Ralescu, D. A. (2006), Overview on the Development of Fuzzy Random Variables, *Fuzzy Sets Systems*, **157**, 2546-2557.



(الف) (ب)

(ج) (د)

شکل ۵. نمودار کران‌های پایین و بالای $\tilde{\hat{R}}_n(t)$ برای الف- $\alpha =$ ۰/۲، ب- $\alpha =$ ۰/۵، ج- $\alpha =$ ۰/۸، د- $\alpha =$ ۱

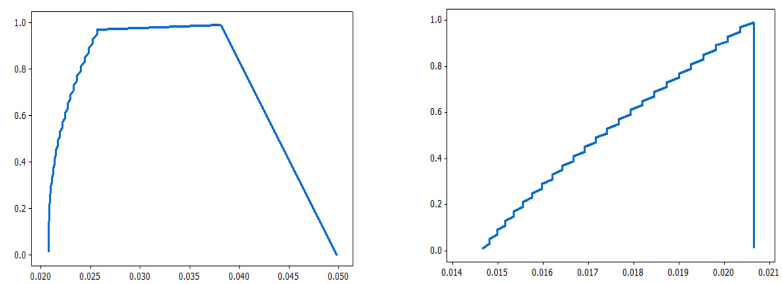


(الف) (ب)

شکل ۶. نمودار $\tilde{\hat{f}}_n(t)$ برای الف- $h =$ ۱۰ و $t =$ ۲۰، ب- $h =$ ۱۰ و $t =$ ۶۰

Grzegorzewski, P. (1998), Statistical Inference about the Median From Vague Data, *Control and Cybernetics*, **27**, 447-464.

Hesamian, G. R. and Chachi, J. (2015), Two-Sample Kolmogorov–Smirnov Fuzzy



(ب) (الف)

شکل ۷. نمودار $\tilde{r}_n(t)$ الف- $h = ۱۰$ و $t = ۷۰$، ب- $h = ۱۰$ و $t = ۸۰$

Test for Fuzzy Random Variables, *Statistical Papers*, **56**, 61–82.

Hesamian, G., Akbari, M. G. and Zendehdel, J. (2019), Location and Scale Fuzzy Random Variables, *International Journal of Systems Science*, 229-241.

Huang, H. Z. (1995), Reliability Analysis Method in the Presence of Fuzziness Attached to Operating Time, *Microelectronics Reliability*, **35**, 1483-1487.

Jiang, C. and Chen, C. (2003), A Numerical Algorithm of Fuzzy Reliability, *Reliability Engineering and System Safety*, **80**, 299-307.

Krätschmer, V. (2001), A Unified Approach to Fuzzy Random Variables, *Fuzzy Sets and Systems*, **123**, 1-9.

Kruse, R. and Meyer, K. D. (1987), Statistics with Vague Data, *Netherlands, Springer*.

Kwakernaak, H. (1978), Fuzzy Random Variables-I. Definition and Theorem, *Information Sciences*, **15**, 1-29.

Kwakernaak, H. (1979), Fuzzy Random Variables-II. Algorithms and Examples for the Discrete Case, *Information Sciences*, **17**, 253-278.

Lehmann, E. L. and Romano, J. P. (2005), Testing Statistical Hypotheses, *Springer Press*, Berlin.

Liu, B. (2013), Uncertainty Theory, *Springer Prees*, Berlin.

Marco, A., David. S., Mario, C. and Rolando, J. (2021), Fuzzy Reliability Centered Maintenance Considering Personnel Experience and Only Censored Data, *Computers and Industrial Engineering*, **DOI**: doi.org/10.1016/j.cie.2021.107440.

Puri, M. L. and Ralescu, D. A. (1986), Fuzzy Random Variables, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **114**, 409-422.

Saeidi, A. R., Akbari, M. G. and Doostparast, M. (2014), Hypotheses Testing with the Two Parameter Pareto Distribution on the Basis of Records in Fuzzy Environment, *Kybernetika*, **50**, 744-757.

Sedra, A. and Smith, K. (2004), Microelectronic Circuits, *United Kingdom: Oxford University Press.*

Shao, J. (2004), Mathematical Statistics, *Springer Press*, Berlin.

Shapiro, F. A. (2009), Fuzzy Random Variables, *Insurance: Journal of Mathematical Economics*, **44**, 307-314.

Wied, D. and Weißbach, R. (2012), Consistency of the Kernel Density Estimator: a Survey, *Statistical Papers*, **53**, 1-21.

Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy Sets, *Information Control*, **8**, 338-356.

Zendehdel, J., Rezaei, M., Akbari, M. G., Zarei, R. and Alizadeh Noughabi, H. (2017), A Novel Approach for Modeling System Reliability Characteristics in an Imprecise Environment, *Journal of Mathematical Modeling*, **DOI**: doi.org/10.22124/jmm.2022.20487.1836.

Zendehdel, J., Zarei, R. and Akbari, M. G. (2022), Testing Exponentiality for Imprecise Data and Its Application, *Soft Computing*, **22**, 3301–3312.