Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2022
Vol. 16, No. 2, pp 253-273
DOI: 10.29252/jss.16.2.253

Reliability Equivalence Factors of Series and Parallel Systems in Proportional Hazards Model

Etminan, J., Khanjari, M. and Chahkandi, M.
Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.

Corresponding author: M. Khanjari, mkhanjari@birjand.ac.ir

Received: 11/2/2022 **Revised:** 3/9/2022 **Accepted and Published Online:** 7/9/2022.

Introduction

Redundancy is a commonly used technique to increase the reliability of a system. However, because of some limitations, such as high cost and space, this method cannot always be used. These constraints can be overcome by using a reduction method, which involves improving the system's reliability by reducing the failure rate of some of its components by a constant factor $0 < \rho < 1$. Based on the reduction factor, the concept of reliability equivalence factors was introduced by Rade (1993). The reliability equivalence factor (REF) is a factor as $0 < \rho < 1$ by which the failure rates of some system components are reduced such that the system reliability reaches the reliability of a system that is improved via an arbitrary method. The REF is a valuable tool for comparing the different ways of system improvements. Consider a coherent system of order n, with component lifetimes $T_1, \ldots, T_n$. If $P(T_i > t) = \bar{F}^{\lambda_i}(t)$ for some $\lambda_i > 0$ and $i = 1, \ldots, n$, then the mutually s-independent lifetime variables $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ follow the proportional hazard rates (PHR) model, where $\bar{F}$ is the baseline survival function and $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ is the proportional hazard vector. In this paper, we apply the reduction method in series and parallel systems under the PHR model and discuss the relation of the REF and $\boldsymbol{\lambda}$.

Material and Methods

We discuss that the reduction method can be considered as a special case of the PHR model and then, based on REF, compare the homogeneous and heterogeneous strategies in the PHR model.

Results and Discussion

This paper considers the conditions in which the lifetimes of two series or parallel systems are stochastically ordered. We then discuss how the REF can be used to improve and equivalent the system lifetimes. The REFs are often obtained by numerical methods and mathematical packages in literature. In this paper, based on survival and mean reliability equivalence factors, the equivalence between the reduction method and heterogeneous strategy in the PHR model for the parallel and series systems with independent components is investigated. We present closed formulas for the REF of series and parallel systems when the lifetimes of components follow the PHR model. Sufficient conditions for the relative ageing comparisons of the improved series and parallel systems under the PHR model and reduction method are also developed.

Conclusion

There is a close relationship between the PHR model and the reduction method. We apply this relation and find some conditions for the equivalence of the lifetimes of two series or parallel systems. We also compare the lifetimes of two series systems under the PHR model and the reduction method based on the ageing faster orders in terms of the hazard and the reversed hazard rates. By a study on the reduction method and heterogeneous strategy in the PHR model for the series system with the component reliability vector $\bar{\mathbf{F}}(t) = (\bar{F}(t), \ldots, \bar{F}(t))$, we find that the improved systems by the reduction method and heterogeneous strategy in the PHR model are equivalent in the sense of ageing faster order in the hazard rate. For the parallel and series systems with the component reliability vector $\bar{\mathbf{F}}(t) = (\bar{F}(t), \ldots, \bar{F}(t))$, we also find the sufficient condition under that the improved systems by the reduction method age faster than those systems, improved by heterogeneous strategy in the PHR model.

Keywords: Reduction Method, Proportional Hazard Rates Model, Reliability Equivalence Factors, Relative Ageing Order.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N05, 60K10.

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۱
جلد ۱۶، شماره ۲، ص ۲۵۳ – ۲۷۳
DOI: 10.29252/jss.16.2.253
مقاله پژوهشی

عامل‌های هم‌ارزی قابلیت اعتماد سیستم‌های سری و موازی در مدل نرخ‌های شکست متناسب

جلال اطمینان، محمد خنجری صادق و مجید چهکندی
گروه آمار، دانشگاه بیرجند

نویسنده مسئول : محمد خنجری ، mkhanjari@birjand.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۲۲   تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۲   تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۱/۰۶/۱۶

چکیده: در این مقاله سیستم‌های سری و موازی با مولفه‌های دو به دو مستقل و هم توزیع در نظر گرفته شده است. قابلیت اعتماد سیستم‌ها با روش کاهش افزایش یافته است. در روش کاهش، قابلیت اعتماد سیستم با کاهش نرخ شکست زیرمجموعه‌ای از مولفه‌های اصلی سیستم با ضرب عامل $۰ < \rho < ۱$ در تابع نرخ شکست مولفه بهبود می‌یابد. شکل کلی برای تعدادی از عامل‌های هم‌ارزی قابلیت اعتماد بدست آمده است. این عامل‌ها برای مقایسه کارایی سیستم‌ها مفید هستند. روش کاهش، به عنوان حالت خاص مدل نرخ شکست متناسب مورد بحث و بررسی قرار گرفته و شرط‌های کافی برای مقایسه سالخوردگی نسبی سیستم‌های سری و موازی بهبود یافته تحت مدل نرخ‌های شکست متناسب و روش کاهش، مورد کنکاش قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: روش کاهش، مدل نرخ شکست متناسب، عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد، ترتیب سالخوردگی نسبی.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N05، 60K10.

۱ مقدمه

منظور از سالخوردگی در تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌ها، تغییر نرخ از کار افتادگی (شکست) سیستم در گذر زمان است. به همین جهت معمولاً در بررسی سالخوردگی سیستم از تابع نرخ شکست استفاده می‌شود. برای متغیر طول

عمر T با توزیع مطلقاً پیوسته F_T، تابع بقاء $\bar{F}_T = 1 - F_T$ و تابع چگالی احتمال f_T، تابع نرخ شکست برای $t \geq 0$ به صورت $h_T(t) = f_T(t)/\bar{F}_T(t)$ تعریف می‌شود. اگر تابع نرخ شکست سیستم صعودی باشد، سالخوردگی سیستم مثبت و چنانچه تابع نرخ شکست نزولی باشد، سالخوردگی سیستم منفی است، سالخوردگی منفی بدین معنی است که سیستم با گذر زمان جوان‌تر می‌شود. اگر تابع نرخ شکست سیستم نسبت به زمان ثابت باشد، سیستم فاقد سالخوردگی است. کیلسون و سومیتا (۱۹۸۲) اولین نفراتی بودند که تابع نرخ شکست معکوس متغیر تصادفی پیوسته طول عمر T را به صورت $r_T(t) = f_T(t)/F_T(t)$ تعریف کردند. مقدار $r_T(t)\mathrm{d}t$ به احتمال تقریبی رخداد شکست در $[t - \mathrm{d}t, t]$ به شرط اطلاع از رخداد شکست در بازه $[0, t]$ تفسیر می‌شود. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع پیوسته $F_X(t)$ و $F_Y(t)$، به ترتیب دارای توابع نرخ شکست $h_X(t)$ و $h_Y(t)$ و توابع نرخ شکست معکوس $r_X(t)$ و $r_Y(t)$ باشند، در این صورت X در ترتیب تصادفی معمولی [۱] از Y کوچک‌تر است و با نماد اختصاری $X \leq_{st} Y$ نشان داده می‌شود، اگر برای هر t ، $\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$ باشد. X نسبت به Y بر اساس ترتیب نرخ شکست [۲] کوچک‌تر است اگر برای هر $t \in (0, \infty)$ ، $h_X(t) \geq h_Y(t)$ باشد، این ترتیب را با نماد اختصاری $X \leq_{hr} Y$ نشان می‌دهند و بدان معنی است که سالخوردگی متغیر X از Y بیشتر است. متناظراً بر حسب تابع بقاء، $X \leq_{hr} Y$ است اگر و فقط اگر $\bar{F}_X(t)/\bar{F}_Y(t)$ بر حسب t نزولی باشد. X نسبت به Y بر اساس معیار ترتیب نرخ شکست معکوس [۳] کوچک‌تر است اگر برای هر $t \in (0, \infty)$ ، $r_X(t) \leq r_Y(t)$ باشد و آن را با نماد اختصاری $X \leq_{rh} Y$ نشان می‌دهند. می‌توان برای مطالعه بیش‌تر در خصوص ترتیب‌های تصادفی به برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۴) و منابع آن مراجعه نمود. بلاک و همکاران (۱۹۹۸) نشان دادند تابع نرخ شکست معکوس افزایشی برای متغیر تصادفی مثبت وجود ندارد. بنابراین بر خلاف شاخص نرخ شکست که یکنوایی در آن یکنوایی در سالخوردگی را نتیجه می‌دهد، یکنوایی در نرخ شکست معکوس با ویژگی سالخوردگی متغیر تصادفی مثبت مرتبط نیست (ناندا و همکاران، ۲۰۰۳). X در سرعت سالخوردگی[۴] از Y در نرخ شکست کوچک‌تراست و با نماد اختصاری $X \lesssim_{hr} Y$ نشان داده می‌شود، هرگاه متغیر $-\log \bar{F}_Y(X)$ متعلق به خانواده توزیع با نرخ شکست صعودی[۵] (IFR) باشد. این تعریف توسط کلاشینکوف و راچو (۱۹۸۶) ارائه شده است. سنگوپتا و دشپانته (۱۹۹۴) نشان دادند در صورت وجود تابع نرخ شکست دو متغیر، $X \lesssim_{hr} Y$ است اگر نسبت $h_X(t)/h_Y(t)$ تابعی صعودی از t باشد. همچنین X در سرعت سالخوردگی از Y در نرخ شکست معکوس کوچک‌تر است و با نماد اختصاری $X \lesssim_{rh} Y$ نشان داده می‌شود، اگر $r_Y(t)/r_X(t)$ تابعی صعودی از t باشد، این تعریف توسط رضائی و همکاران (۲۰۱۵) ارائه شده است. چن لی و ژیاهولی (۲۰۱۶) متغیرهای تصادفی X و Y را در سرعت سالخوردگی در نرخ شکست معادل نامیدند اگر $X \lesssim_{hr} Y$ و $Y \lesssim_{hr} X$ باشد یا به عبارت دیگر $h_Y(t)/h_X(t)$ تابع ثابتی نسبت به t باشد.

---

[1] Usual Stochastic Order
[2] Failure Rate Order
[3] Reversed Failure Rate Order
[4] Aging Faster
[5] Increasing Failure Rate

فرض کنید برای تابع توزیع پایه دلخواه $F(t)$، $h(t)$ تابع نرخ شکست پایه و توابع بقاء متغیرهای دو به دو مستقل بردار $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ از مدل $P(T_i > t) = \bar{F}^{\lambda_i}(t), \quad \lambda_i > 0, \ i = 1, \dots, n$ پیروی کند، در این صورت $h_{T_i}(t) = \lambda_i h(t)$، $r_{T_i}(t) = h(t)\frac{\lambda_i}{\bar{F}^{-\lambda_i}(t) - 1}$ و توزیع بردار $\mathbf{T}$ از مدل نرخ‌های شکست متناسب [1] است و با نماد اختصاری $\mathbf{T} \sim PHR(\bar{F}, \boldsymbol{\lambda})$ نشان داده می‌شود. بردار $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ را بردار ضرایب نرخ‌های شکست متناسب می‌نامند. به عنوان مثال اگر متغیرهای طول عمر مولفه‌های سیستم از تابع توزیع نمایی به شکل $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t} \ , \ t > 0, \quad i = 1, \dots, n$ پیروی کنند. در این صورت با در نظر گرفتن تابع توزیع پایه به صورت $\bar{F}(t) = e^{-t}$ نتیجه می‌شود که $\mathbf{T} \sim PHR(\bar{F}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. وقتی در مدل نرخ‌های شکست متناسب مقادیر بردار ضرایب نرخ‌های شکست متناسب برابر است، آن‌را مدل نرخ‌های شکست متناسب همگن و در غیر این صورت برای تاکید بیشتر آن‌را مدل نرخ‌های شکست متناسب ناهمگن نیز می‌گویند (کومار و کلفسجو، ۱۹۹۴؛ گوپتا و همکاران، ۱۹۹۸؛ چن لی و ژیاهولی ، ۲۰۱۶). توزیع‌های مشهوری مانند توزیع نمایی، رایلی، پارتو و بر در این خانواده قرار دارند.

وقتی یک سیستم در ترتیب تصادفی از سیستم دیگر کوچک‌تر است، یعنی قابلیت اعتماد آن کمتر است. در این صورت یک موضوع جذاب بررسی و مقایسه روش‌های مختلف بهبود قابلیت اعتماد سیستم ضعیف‌تر برای هم‌ارز شدن با سیستم قوی‌تر است. در این خصوص به ترتیب برای سیستم‌های تعمیرپذیر و تعمیرناپذیر، تحلیل عامل هم‌ارزی قابلیت دسترسی[2] و عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد کاربرد دارد. برای آشنایی با این مفاهیم می‌توان به راد (۱۹۸۹، ۱۹۹۰، ۱۹۹۱، ۱۹۹۳)، سرحان (۲۰۰۰) و سرحان و همکاران (۲۰۰۸)، سرحان و مصطفی (۲۰۱۳)، هو و همکاران (۲۰۱۶) و الغازو و همکاران (۲۰۲۰) مراجعه کرد. در این مقاله برای سیستم‌های پایه سری و موازی دو سیستم که یکی از آن‌ها بطور تصادفی از دیگری کوچک‌تر است، در نظر گرفته می‌شود و ضمن ارائه شکل بسته عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد مورد نیاز برای هم‌ارزی سیستم ضعیف‌تر با سیستم قوی‌تر در بهبود سیستم بر اساس مدل نرخ‌های شکست متناسب، نتایجی در خصوص مقایسه سرعت سالخوردگی نسبی سیستم‌های هم‌ارز ارائه می‌شود. در همین راستا روش‌های اساسی کاهش و افزونگی در بهبود قابلیت اعتماد سیستم و تعریف عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد در بخش ۲ یادآوری می‌شود و برای سیستم‌های پایه سری و موازی با مولفه‌های دو به دو مستقل و هم‌توزیع، نتایجی برای عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد در بهبود قابلیت اعتماد سیستم بر اساس مدل نرخ‌های شکست متناسب در دو حالت بردار ضرایب نرخ‌های شکست همگن و ناهمگن بدست می‌آید. در بخش ۳ نتایجی در خصوص سالخوردگی نسبی در نرخ شکست و نرخ شکست معکوس برای مقایسه رهیافت‌های مختلفی از بهبود قابلیت اعتماد سیستم‌های سری و موازی مبتنی بر روش کاهش و مدل نرخ‌های شکست متناسب بدست می‌آید.

لم ۱. (چن لی و ژیاهولی ، ۲۰۱۶) برای $\lambda > 0$ و $q \in (0, 1)$، تابع $\frac{1-q^{\lambda}}{\lambda}$ نسبت به λ اکیداً نزولی و محدب است.

---

[1] Proportional Hazard Rates

[2] Availability

لم ۲ (نامساوی چبیشف). (میترونویک و همکاران، ۲۰۱۳) اگر $(a_1, \dots, a_n)$ و $(b_1, \dots, b_n)$ بردارهایی حقیقی مقدار باشند به قسمی که $(a_1 \leq \dots \leq a_n)$ و $(b_1 \leq \dots \leq b_n)$ یا $(a_1 \geq \dots \geq a_n)$ و $(b_1 \geq \dots \geq b_n)$ در این صورت

$$\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\Big) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \qquad (1)$$

۲ عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد

روش‌های متعددی برای بهبود قابلیت اعتماد سیستم‌ها پیشنهاد شده ولی روش‌های کاهش [1] و افزونگی[2]، از جمله روش‌های اساسی و مهم بهبود قابلیت اعتماد سیستم‌ها هستند. در روش افزونگی، با افزودن مولفه‌های اضافی به سیستم اصلی، قابلیت اعتماد سیستم بهبود می‌یابد. این مولفه‌ها می‌توانند به صورت فعال[3] یا آماده‌به‌کار[4] به سیستم اضافه شوند. در افزونگی فعال، مولفه‌های اضافی به صورت موازی با مولفه‌های اصلی سیستم قرار می‌گیرند و شروع عملکرد آن‌ها همزمان با مولفه‌های اصلی است. در افزونگی آماده‌به‌کار، مولفه‌های افزونه تنها پس از شکست مولفه‌های اصلی شروع به کار می‌کنند. از دیگر روش‌های بهبود قابلیت اعتماد سیستم‌ها استفاده از روش کاهش است. در روش کاهش، قابلیت اعتماد برخی از مولفه‌های اصلی سیستم از طریق جایگزینی با مولفه‌های با کیفیت بالاتر یا از طریق ارتقاء یا اصلاح برخی ویژگی‌های آن‌ها بهبود می‌یابد. به عبارت دیگر در این روش با کاهش نرخ شکست برخی مولفه‌های اصلی، قابلیت اعتماد سیستم بهبود می‌یابد. فرض کنید متغیر طول عمر T با ضرب عامل کاهش $\theta \in (0, 1)$ در تابع نرخ شکست بهبود یابد و متغیر طول عمر بهبود یافته با T_θ نشان داده شود، در این صورت $\bar{F}_{T_\theta}(t) = [\bar{F}_T(t)]^\theta, \quad \theta \in (0, 1)$ است. لذا روش کاهش یک حالت خاص از مدل نرخ شکست متناسب است که ضریب نرخ شکست آن متعلق به بازه $(0, 1)$ است. از طرفی ضریب نرخ شکست در مدل نرخ شکست متناسب می‌تواند هر مقدار مثبت دلخواه باشد. بنابراین هر مدل نرخ شکست متناسب لزوماً یک روش بهبود قابلیت اعتماد محسوب نمی‌شود، زیرا برای $\theta > 1$ قابلیت اعتماد کاهش می‌یابد.

فرض کنید سیستم اصلی، یک سیستم n مولفه‌ای با توزیع طول‌عمر دو به دو مستقل با بردار قابلیت اعتماد $\bar{\mathbf{F}}(t) = (\bar{F}(t), \dots, \bar{F}(t))$ باشد و T و $R_T(t)$ به ترتیب متغیر تصادفی طول عمر و تابع بقاء سیستم اصلی با بردار قابلیت اعتماد $\bar{\mathbf{F}}$ باشند، در این صورت دو رهیافت بهبود قابلیت اعتماد سیستم بر اساس روش کاهش و مدل نرخ شکست متناسب تعریف می‌کنیم.

الف- رهیافت نرخ شکست متناسب: در این رهیافت، قابلیت اعتماد سیستم بر اساس بهبود قابلیت اعتماد مولفه‌های سیستم در مدل نرخ شکست متناسب بهبود می‌یابد. ضرایب نرخ‌های شکست متناسب را می‌توان همگن

[1] Reduction
[2] Redundancy
[3] Active
[4] Standby

یا ناهمگن در نظر گرفت. در حالت ناهمگن بردار قابلیت اعتماد مولفه‌های سیستم بهبود یافته با نماد $\bar{\mathbf{F}}_{\boldsymbol{\lambda}}$ به صورت

$$\bar{\mathbf{F}}_{\boldsymbol{\lambda}} = (\bar{F}^{\lambda_1}, \ldots, \bar{F}^{\lambda_n}), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,\, \lambda_i \in [0, 1] \tag{۲}$$

و متغیر طول عمر سیستم بهبود یافته و تابع بقاء آن نیز به ترتیب با $T_{\boldsymbol{\lambda}}$ و $R_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)$ نشان داده می‌شود. در حالت همگن بودن نرخ‌های شکست، بردار قابلیت اعتماد مولفه‌های سیستم بهبود یافته با نماد

$$\bar{\mathbf{F}}_{\boldsymbol{\lambda}_0} = (\bar{F}^{\lambda_0}, \ldots, \bar{F}^{\lambda_0}), \quad \boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_0, \ldots, \lambda_0)\,,\, \lambda_0 \in [0, 1] \tag{۳}$$

نشان داده می‌شود.

ب- رهیافت کاهش: در این رهیافت، قابلیت اعتماد سیستم به روش کاهش برای زیر مجموعه کاهش K از مولفه‌های اصلی سیستم و با اعمال ضریب کاهش $\rho \in (0, 1)$ در نرخ شکست مولفه‌های متعلق به این مجموعه بهبود می‌یابد و بردار قابلیت اعتماد مولفه‌های سیستم بهبود یافته با نماد $\bar{\mathbf{F}}_{\boldsymbol{\lambda}_{(\rho,K)}}$ به صورت $\bar{\mathbf{F}}_{\boldsymbol{\lambda}_{(\rho,K)}} = (\bar{F}^{\lambda_1}, \ldots, \bar{F}^{\lambda_n})$ نشان داده می‌شود، به قسمی که

$$\boldsymbol{\lambda}_{(\rho,K)} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \lambda_i = \begin{cases} \rho & i \in K \\ 1 & i \notin K \end{cases}$$

و $0 \le \rho \le 1$ است. همچنین متغیر طول عمر سیستم بهبود یافته و تابع بقاء آن نیز به ترتیب با $T_{(\rho,K)}$ و $R_{T_{(\rho,K)}}(t)$ نشان داده می‌شود.

رهیافت کاهش حالت خاص رهیافت نرخ شکست متناسب در حالت نرخ‌های شکست ناهمگن است، همچنین اگر $K = \{1, \ldots, n\}$ باشد، رهیافت کاهش منطبق بر رهیافت نرخ‌های شکست متناسب در حالت همگن است.

تعریف ۱. (سرحان، ۲۰۰۲) فرض کنید قابلیت اعتماد سیستم به روش کاهش برای زیر مجموعه K از مولفه‌های اصلی سیستم و با اعمال ضریب کاهش $\rho \in (0, 1)$ در نرخ شکست مولفه‌های متعلق به این مجموعه بهبود یابد، در این صورت ضریب ρای که موجب معادل شدن شاخص ارزیابی قابلیت اعتماد سیستم بهبود یافته به روش کاهش با یک روش بهبود قابلیت اعتماد دلخواه دیگر شود، عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد [1] نامیده می‌شود.

شاخص میانگین زمان تا شکست سیستم اصلی به صورت $MTTF_T = \int_0^\infty R_T(t)\mathrm{d}t$ تعریف می‌شود و $E(T) = MTTF_T$ است. در تعریف ۲ بر اساس تعریف ۱ به ترتیب برای شاخص‌های ارزیابی تابع بقاء و میانگین (میانگین زمان تا شکست) تعریف اختصاصی عامل‌های هم‌ارزی بقاء و میانگین ارائه می‌شود.

[1] Reliability Equivalence Factor

تعریف ۲. فرض کنید سیستمی با متغیر طول عمر T بر اساس یک روش بهبود دلخواه دارای متغیر طول عمر T' و بر اساس بهبود در روش کاهش دارای متغیر طول عمر $T_{(\rho,K)}$ باشد. اگر $R_{T'}(t)$ و $MTTF_{T'}$ به ترتیب تابع بقاء و میانگین زمان تا شکست سیستم بهبود یافته به روشی دلخواه و $R_{T_{(\rho,K)}}(t)$ و $MTTF_{T_{(\rho,K)}}$ به ترتیب تابع بقاء و شاخص میانگین زمان تا شکست سیستم بهبود یافته در روش کاهش باشد، آنگاه عامل‌های هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء و میانگین به شرح زیر است:

الف- عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء: ضریب کاهش ρ که از حل معادله هم‌ارزی توابع بقاء، یعنی معادله $R_{T_{(\rho,K)}}(t) = R_{T'}(t)$ بدست می‌آید، عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء[۱] $(SREF)$ نامیده می‌شود.

ب- عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد میانگین: ضریب کاهش ρ ای که از حل معادله هم‌ارزی میانگین، یعنی $E(T_{(\rho,K)}) = E(T')$ بدست می‌آید، عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد میانگین[۲] $(MREF)$ می‌گویند.

تذکر ۱. با توجه به دلخواه بودن روش بهبود سیستم، ممکن است همواره عامل‌های هم‌ارزی قابلیت اعتماد وجود نداشته باشند. به عبارت دیگر ممکن است معادلات هم‌ارزی برای ρ جوابی در بازه $[۰,۱]$ نداشته باشند. در این مقاله هرگاه صحبت از عامل‌های هم‌ارزی قابلیت اعتماد می‌شود، فرض شده است جواب معادلات هم‌ارزی متناظر آن وجود دارد. همچنین باید توجه داشت در حالت کلی $SREF$ کمیتی پویا و وابسته به زمان ولی $MREF$ یک کمیت ایستا و مستقل از زمان است.

در سیستم‌های سری با مولفه‌های دو به دو مستقل و هم‌توزیع با توزیع طول عمر یکسان F، سیستم با تعداد مولفه بیشتر در ترتیب تصادفی معمولی کوچک‌تر است. همچنین اگر تعداد مولفه‌های دو سیستم سری برابر باشد ولی توزیع طول عمر مولفه‌های یک سیستم، توزیع F و توزیع طول عمر مولفه‌های سیستم دیگر، توزیع G و توزیع F در ترتیب تصادفی معمولی کوچک‌تر از G باشد، آنگاه سیستم متشکل از مولفه‌های با توزیع طول عمر F در ترتیب تصادفی از سیستم متشکل از مولفه‌های با توزیع طول عمر G کوچک‌تر است. از آنجاکه کوچک‌تری یک سیستم در ترتیب تصادفی به معنی کوچک‌تری در تابع بقاء در هر لحظه است، در قضیه ۱ تحت شرایطی، شکل کلی عامل هم‌ارزی بقاء در لحظه t برای دو سیستم سری که یکی در ترتیب تصادفی معمولی از دیگری کوچکتر است، بدست می‌آید.

قضیه ۱. فرض کنید دو سیستم سری $S_۱$ و $S_۲$ به ترتیب دارای $n_۱$ و $n_۲$ مولفه و مولفه‌های سیستم‌ها دو به دو مستقل و هم‌توزیع به ترتیب با توزیع‌های F و G باشند. اگر $T_{s_۱} \leq_{st} T_{s_۲}$ باشد، آنگاه

الف- سیستم بهبود یافته $S_۱$ به روش کاهش روی مجموعه مولفه‌های K در تابع بقاء با سیستم $S_۲$ بر اساس عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء

$$\rho = ۱ + \frac{۱}{k}\left(\frac{n_۲ \ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)} - n_۱\right), \quad \frac{n_۱ - k}{n_۲} \leq \inf_{t>۰} \frac{\ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)},$$

[1] Survival Reliability Equivalence Factor
[2] Mean Reliability Equivalence Factor

هم‌ارز است.

ب- عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء سیستم S_1 برای هم‌ارزی با سیستم بهبود یافته S_2 با بردار قابلیت اعتماد $\bar{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\lambda}} = (\bar{G}^{\lambda_1}, \ldots, \bar{G}^{\lambda_{n_2}})$ که $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_2})\,,\ \lambda_i \in [0,1]$ است، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\rho = 1 + \frac{1}{k}\Big(\frac{(\sum_{i=1}^{n_2} \lambda_i) \ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)} - n_1\Big), \quad \frac{n_1 - k}{\sum_{i=1}^{n_2} \lambda_i} \leq \frac{\ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)} \leq \frac{n_1}{\sum_{i=1}^{n_2} \lambda_i}.$$

برهان: فرض کنید تابع بقاء سیستم $S_i\,,\ i = 1,2$ با $R_{T_{s_i}}(t)$ نشان داده شود، در این صورت $R_{T_{s_1}}(t) = [\bar{F}(t)]^{n_1}$ و $R_{T_{s_2}}(t) = [\bar{G}(t)]^{n_2}$ است. اگر تابع بقاء سیستم S_1 بهبود یافته به روش کاهش با در نظر گرفتن ضریب کاهش $\rho \in [0,1]$ برای مجموعه کاهش دلخواه و معین K از مولفه‌های سیستم S_1، با نماد $R_{T_{s_1,(\rho,K)}}(t)$ نشان داده شود، آنگاه

$$R_{T_{s_1,(\rho,K)}}(t) = \prod_{i \in K} (\bar{F}(t))^{\rho} \prod_{i \notin K} \bar{F}(t) = (\bar{F}(t))^{k\rho + (n_1 - k)},$$

که در آن $|K| = k$ تعداد عناصر مجموعه K است. عامل هم‌ارزی ρ از حل معادله هم‌ارزی $R_{T_{s_1,(\rho,K)}}(t) = R_{T_{s_2}}(t)$ به صورت $\rho = 1 + \frac{1}{k}(\frac{n_2 \ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)} - n_1)$ بدست می‌آید. چون $\rho \in [0,1]$، اگر $\frac{n_1-k}{n_2} \leq \frac{\ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)} \leq \frac{n_1}{n_2}$ باشد آنگاه عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء وجود دارد. چون $T_{s_1} \leq_{st} T_{s_2}$ بوده است، پس $\bar{F}^{n_1}(t) \leq \bar{G}^{n_2}(t)$ است و نامساوی $\frac{\ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)} \leq \frac{n_1}{n_2}$ بدیهی است. اما برای نامساوی $\frac{n_1-k}{n_2} \leq \frac{\ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)}$ لازم است مجموعه کاهش K به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود بطوری که $\frac{n_1-k}{n_2} \leq \inf_{t>0} \frac{\ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)}$ باشد.

ب- فرض کنید تابع بقاء سیستم بهبود یافته S_2 با بردار قابلیت اعتماد $\bar{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\lambda}}$ به صورت $R_{T_{s_2,\bar{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\lambda}}}}(t) = [\bar{G}(t)]^{\sum_{i=1}^{n_2} \lambda_i}$ باشد، آنگاه عامل هم‌ارزی ρ از حل معادله هم‌ارزی $R_{T_{s_1,(\rho,K)}}(t) = R_{T_{s_2,\bar{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\lambda}}}}(t)$ به صورت $\rho = 1 + \frac{1}{k}(\frac{(\sum_{i=1}^{n_2} \lambda_i) \ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)} - n_1)$ بدست می‌آید و عامل هم‌ارزی بقاء وجود دارد اگر $\frac{n_1-k}{\sum_{i=1}^{n_2} \lambda_i} \leq \frac{\ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)} \leq \frac{n_1}{\sum_{i=1}^{n_2} \lambda_i}$ باشد.

تذکر ۲. عامل هم‌ارزی همواره متعلق به بازه $[0,1]$ است، بنابراین در حالت کلی جواب معادله هم‌ارزی در صورتی قابل قبول است که متعلق به بازه $[0,1]$ باشد. در قسمت (الف) و (ب) قضیه ۱ به ترتیب شرطهای $\frac{n_1-k}{n_2} \leq \frac{\ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)} \leq \frac{n_1}{n_2}$ و $\frac{n_1-k}{\sum_{i=1}^{n_2} \lambda_i} \leq \frac{\ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)} \leq \frac{n_1}{\sum_{i=1}^{n_2} \lambda_i}$ تضمین‌کننده تعیین جواب مجاز معادله هم‌ارزی به عنوان عامل هم‌ارزی است.

فرع ۱. اگر در قسمت (الف) قضیه ۱، $F = G$ باشد، آنگاه با توجه به رابطه $T_{S_1} \leq_{st} T_{S_2}$، حتماً باید $n_2 > n_1$ باشد. در این حالت عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء از رابطه $\rho = 1 + \frac{1}{k}(n_2 - n_1)$ بدست می‌آید و وابسته به زمان نیست. عدم وابستگی ρ به زمان در این حالت به این معنی است که از حل معادله هم‌ارزی

قابلیت اعتماد بقاء در زمان‌های مختلف، عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء یکسانی بدست می‌آید. به عبارت دیگر در این حالت عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء به زمان در نظر گرفتن معادله هم‌ارزی وابسته نیست. به طور مشابه اگر $n_۱ = n_۲ = n$ باشد، آن‌گاه حتماً $\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t)\,; t \geq ۰$ است و عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء از رابطه $\rho = ۱ + \frac{n}{k}(\frac{\ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)} - ۱)$ بدست می‌آید. در این حالت برای این‌که $۰ \leq \rho \leq ۱$ باشد، باید k در شرط $۰ = \frac{n-k}{n} \leq \inf_{t>۰} \frac{\ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)}$ صدق کند، بنابراین $k = n$ و $\rho = \frac{\ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)}$ است. بدیهی است وقتی $n_۱ = n_۲$ و $F = G$ است، دیگر نیازی به استفاده از روش کاهش نیست، در این حالت $k = n$ و $\rho = ۱$ است.

فرع ۲. فرض کنید توزیع‌های F و G متعلق به مدل PHR باشند به طوری که برای تابع بقاء دلخواه $\bar{H}$، مقادیر مثبت $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ وجود داشته باشند که $\bar{F} = \bar{H}^{\lambda_۱}$ و $\bar{G} = \bar{H}^{\lambda_۲}$ باشد (اگر $\lambda_۱ = \lambda_۲$ باشد همان حالت فرع ۱ نتیجه می‌شود). در این صورت عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء از رابطه

$$\rho = ۱ + \frac{۱}{k}(\frac{n_۲\lambda_۲}{\lambda_۱} - n_۱), \quad \frac{n_۱ - k}{n_۲} \leq \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}$$

بدست می‌آید. از آنجا که $\bar{F}^{n_۱} \leq \bar{G}^{n_۲}$ است، لذا $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ در شرط $n_۱\lambda_۱ \geq n_۲\lambda_۲$ صدق می‌کنند. مشابه فرع ۱ در این حالت نیز ρ به زمان بستگی ندارد.

تذکر ۳. کاهش عامل هم‌ارزی از یک به صفر در بازه مجاز $[۰, ۱]$ به معنای بهبود بیشتر قابلیت اعتماد مولفه‌های سیستم در روش کاهش است، از آنجاکه معمولاً بهبود بیشتر معادل با هزینه بیشتر است، لذا عامل هم‌ارزی بزرگ‌تر نسبت به عامل هم‌ارزی کوچک‌تر دارای ارجحیت است. به عنوان مثال اگر روش کاهش روی یک مولفه انجام شود، مولفه‌ای که عامل هم‌ارزی بزرگ‌تری داشته باشد در اولویت است. برای آشنایی با نتایج بیشتر در این خصوص می‌توان به چهکندی و همکاران (۱۴۰۰) مراجعه نمود. علاوه بر این بین عامل هم‌ارزی ρ و تعداد مولفه‌های متعلق به مجموعه کاهش k ارتباط مستقیم وجود دارد، به عبارت دیگر با افزایش k، عامل هم‌ارزی ρ نیز بزرگ‌تر و به عدد یک در بازه $[۰, ۱]$ نزدیک‌تر می‌شود. از طرفی برای یک مجموعه کاهش معین، بزرگی ضریب کاهش نرخ شکست مولفه‌های متعلق به مجموعه کاهش، ارتباط معکوس با هزینه بهبود قابلیت اعتماد سیستم دارد. لذا شاخص‌های مطلوب در بهبود قابلیت اعتماد سیستم به روش کاهش عبارتند از نزدیکی ضریب کاهش ρ به عدد ۱ و کمتر بودن تعداد عناصر مجموعه کاهش. بنابراین حالت بهینه وقتی است که بر اساس شاخصی نظیر هزینه بین مقادیر این دو کمیت تعادل برقرار شود. مثلاً در فرع ۱ برای $k = n_۱$ بزرگ‌ترین مقدار ممکن ρ عبارت است از $\rho = \frac{n_۲}{n_۱}$. همچنین اگر $n_۱ = n_۲ = n$ باشد، آن‌گاه از حل معادله هم‌ارزی بقاء در لحظه t بزرگ‌ترین مقدار ρ در بین مجموعه‌های کاهش ممکن، $\rho = \frac{\ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)}$ است و لذا بزرگترین مقدار برای عامل هم‌ارزی بقاء $\rho = \sup_{t>۰} \frac{\ln \bar{G}(t)}{\ln \bar{F}(t)}$ است. مشابه فرع ۲ بزرگ‌ترین مقدار ممکن ρ عبارت است از $\rho = \frac{n_۲\lambda_۲}{n_۱\lambda_۱}$.

قضیه ۲. فرض کنید دو سیستم موازی $S_۱$ و $S_۲$ به ترتیب دارای $n_۱$ و $n_۲$ مولفه و مولفه‌های سیستم‌ها دو به دو مستقل و هم‌توزیع به ترتیب با توزیع‌های F و G باشند. اگر $T_{s_۱} \leq_{st} T_{s_۲}$ باشد، آن‌گاه

الف- سیستم بهبود یافته $S_۱$ به روش کاهش روی مجموعه مولفه‌های K در تابع بقاء با سیستم $S_۲$ بر اساس عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء

$$\rho = \frac{\ln(۱ - \frac{[G(t)]^{\frac{n_۲}{k}}}{[F(t)]^{\frac{n_۱}{k}-۱}})}{\ln(\bar{F}(t))}, \quad \frac{n_۱ - k}{n_۲} \leq \inf_{t>۰} \frac{\ln G(t)}{\ln F(t)},$$

هم‌ارز است.

ب- عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء سیستم $S_۱$ برای هم‌ارزی با سیستم بهبود یافته $S_۲$ با بردار قابلیت اعتماد $\bar{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\lambda}} = (\bar{G}^{\lambda_۱}, \ldots, \bar{G}^{\lambda_{n_۲}})$ که $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_۱, \ldots, \lambda_{n_۲})\ ,\ \lambda_i \in [۰, ۱]$ است، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\rho = \frac{\ln(۱ - \frac{[G(t)]^{\frac{\sum_{i=۱}^{n_۲}\lambda_i}{k}}}{[F(t)]^{\frac{n_۱}{k}-۱}})}{\ln(\bar{F}(t))}, \quad \frac{n_۱ - k}{\sum_{i=۱}^{n_۲}\lambda_i} \leq \frac{\ln G(t)}{\ln F(t)} \leq \frac{n_۱}{\sum_{i=۱}^{n_۲}\lambda_i}.$$

برهان: فرض کنید توابع توزیع و بقاء سیستم $S_i\ ,\ i = ۱, ۲$ به ترتیب با $F_{T_{s_i}}(t)$ و $R_{T_{s_i}}(t)$ نشان داده شود، در این صورت $F_{T_{s_۱}}(t) = [F(t)]^{n_۱}$ و $F_{T_{s_۲}}(t) = [G(t)]^{n_۲}$ است. فرض کنید سیستم $S_۱$ به روش کاهش با در نظر گرفتن ضریب کاهش $\rho \in [۰, ۱]$ برای مجموعه کاهش دلخواه و معین K از مولفه‌های سیستم $S_۱$، بهبود یابد و تابع توزیع سیستم بهبود یافته با نماد $F_{T_{s_۱,(\rho,K)}}(t)$ نشان داده شود، آنگاه

$$F_{T_{s_۱,(\rho,K)}}(t) = \prod_{i\in K}(۱ - [\bar{F}(t)]^{\rho}) \prod_{i\notin K} F(t) = (۱ - [\bar{F}(t)]^{\rho})^k [F(t)]^{(n_۱-k)},$$

که در آن $k = |K|$ تعداد عناصر مجموعه K است. عامل هم‌ارزی ρ از حل معادله هم‌ارزی $R_{T_{s_۱,(\rho,K)}}(t) = R_{T_{s_۲}}(t)$ به صورت $\rho = \ln(۱ - \frac{G(t)]^{\frac{n_۲}{k}}}{[F(t)]^{\frac{n_۱}{k}-۱}})/\ln(\bar{F}(t))$ بدست می‌آید. با توجه به این‌که $\rho \in [۰, ۱]$ است، لذا اگر $\frac{n_۱-k}{n_۲} \leq \frac{\ln G(t)}{\ln F(t)} \leq \frac{n_۱}{n_۲}$ باشد آن‌گاه عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء وجود دارد. چون $T_{s_۱} \leq_{st} T_{s_۲}$ بوده است، پس $F^{n_۱}(t) \leq G^{n_۲}(t)$ است و نامساوی $\frac{\ln G(t)}{\ln F(t)} \leq \frac{n_۱}{n_۲}$ بدیهی است. اما برای نامساوی $\frac{n_۱-k}{n_۲} \leq \frac{\ln G(t)}{\ln F(t)}$ لازم است مجموعه کاهش K به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود بطوری که $\frac{n_۱-k}{n_۲} \leq \inf_{t>۰} \frac{\ln G(t)}{\ln F(t)}$ باشد.

ب- فرض کنید تابع توزیع سیستم بهبود یافته $S_۲$ با بردار قابلیت اعتماد $\bar{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\lambda}}$ به صورت $F_{T_{s_۲,\bar{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\lambda}}}}(t) = [G(t)]^{\sum_{i=۱}^{n_۲}\lambda_i}$ باشد، آن‌گاه عامل هم‌ارزی ρ از حل معادله هم‌ارزی $R_{T_{s_۱,(\rho,K)}}(t) = R_{T_{s_۲,\bar{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\lambda}}}}(t)$ به صورت $\rho = \ln(۱ - \frac{[G(t)]^{\frac{\sum_{i=۱}^{n_۲}\lambda_i}{k}}}{[F(t)]^{\frac{n_۱}{k}-۱}})/\ln(\bar{F}(t))$ بدست می‌آید و عامل هم‌ارزی بقاء وجود دارد اگر $\frac{n_۱-k}{\sum_{i=۱}^{n_۲}\lambda_i} \leq \frac{\ln G(t)}{\ln F(t)} \leq \frac{n_۱}{\sum_{i=۱}^{n_۲}\lambda_i}$ باشد.

تذکر ۴. فرض کنید $T_{n:n}$ متغیر طول عمر سیستم موازی n مولفه‌ای باشد، در این صورت $T_{n:n} \leq_{st} T_{n+1:n+1}$ است. بنابراین با توجه به قضیه ۲، عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء سیستم موازی n مولفه‌ای در هم‌ارزی با سیستم موازی $n+1$ مولفه‌ای در لحظه t به شکل $\rho = \frac{\ln(1-[F(t)]^{1+\frac{1}{k}})}{\ln(\bar{F}(t))}$

قضیه ۳. فرض کنید در سیستم سری با مولفه‌های دو به دو مستقل $\rho_i, \quad i=0,1,2$ عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء $(SREF)$ برای سیستم‌های بهبود یافته با متغیر طول عمر $T_{\boldsymbol{\lambda}_i}\,;\, i=0,1,2$، باشد به قسمی که $\boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_0,\dots,\lambda_0)\,,\, \lambda_0 \in [0,1]$ و $\bar{\lambda}_1$ و $\bar{\lambda}_2$ به ترتیب میانگین بردارهای ضرایب نرخ شکست متناسب ناهمگن $\boldsymbol{\lambda}_1$ و $\boldsymbol{\lambda}_2$ با ضرایب متعلق به بازه $[0,1]$ باشند، در این صورت:

$$\rho_i \leq \rho_0 \Leftrightarrow \lambda_0 \geq \bar{\lambda}_i\,;\, i=1,2 \tag{4}$$

$$\rho_1 \leq \rho_2 \Leftrightarrow \bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}_2, \quad 0 \leq \frac{n(1-\bar{\lambda}_1)}{k} \leq 1\,,\, 0 \leq \frac{n(1-\bar{\lambda}_2)}{k} \leq 1 \tag{5}$$

برهان: چون $R_T(t) = [\bar{F}(t)]^n$، $R_{T_{\boldsymbol{\lambda}_i}}(t) = (\bar{F}(t))^{n\bar{\lambda}_i}, \quad i=0,1,2$ و

$$R_{T_{(\rho,K)}}(t) = \prod_{i\in K}(\bar{F}(t))^{\rho}\prod_{i\notin K}\bar{F}(t) = (\bar{F}(t))^{k\rho+(n-k)}\,;\, k=|K|,$$

است و عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء $\rho_i, \quad i=0,1,2$، ضریب ρ ای است که از حل معادله هم‌ارزی بقاء متناظر یعنی $R_{T_{(\rho,K)}}(t) = R_{T_{\boldsymbol{\lambda}_i}}(t), \quad i=0,1,2$ بدست می‌آید، لذا:

$$\rho_0 = 1-\frac{n(1-\lambda_0)}{k}, \quad 1-\frac{k}{n} \leq \lambda_0 \leq 1$$
$$\rho_i = 1-\frac{n(1-\bar{\lambda}_i)}{k}, \quad 0 \leq \frac{n(1-\bar{\lambda}_i)}{k} \leq 1, \quad i=1,2$$

بنابراین با مقایسه‌ای ساده حکم ثابت است.

مثال ۱. فرض کنید متغیر طول عمر مولفه‌های سیستم سری دارای تابع توزیع نمایی

$$T_i \sim E(\lambda_i)\,,F_i(t) = 1-e^{-\lambda_i t}\,,\, t>0, \quad i=1,\dots,n$$

باشند. برای $n=k=2$ فرض کنید $\boldsymbol{\lambda}_1 = (0/1, 0/9)$ و $\boldsymbol{\lambda}_0 = (0/1, 0/1)$ باشد، در این صورت شرط $\lambda_0 \geq \bar{\lambda}$

در قضیه ۳ بر قرار نیست و ملاحظه می‌شود:

$$\rho_\circ = ۱ - \frac{n(۱-\lambda_\circ)}{k} = \circ/۱,$$
$$\rho_۱ = ۱ - \frac{n-\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i}{k} = \circ/۵, \quad \circ < \frac{n-\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i}{k} < ۱$$

بنابراین رابطه $\rho_۱ \leq \rho_\circ$ برقرار نیست و تائیدی بر نتایج قضیه ۳ است.

قضیه ۴. برای سیستم سری با مولفه‌های دو به دو مستقل و هم‌توزیع $F(t)$،
الف- عامل‌های هم‌ارزی قابلیت اعتماد میانگین $(MREF)$ سیستم بهبود یافته با متغیر طول عمر $T_{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \lambda_i \in [\circ,۱]$، از حل معادله

$$\int_\circ^\infty (\bar{F}(t))^{\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i}\mathrm{d}t = \int_\circ^\infty (\bar{F}(t))^{k\rho+(n-k)}\mathrm{d}t, \quad k=|K|,$$

بدست می‌آید و اگر $F(x)=۱-e^{-\theta x}$ باشد، آن‌گاه:

$$\rho = ۱ - \frac{n-\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i}{k}, \quad \circ < \frac{n-\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i}{k} < ۱$$

ب- برای $F(x)=۱-e^{-\theta x}$، اگر $\rho_i, i=\circ,۱,۲$ عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد میانگین برای سیستم‌های بهبود یافته با متغیر طول عمر $T_{\boldsymbol{\lambda}_i}, i=\circ,۱,۲$، باشد به قسمی که $\boldsymbol{\lambda}_\circ=(\lambda_\circ,\ldots,\lambda_\circ)$، $\lambda_\circ \in [\circ,۱]$ و $\bar{\lambda}_۱$ و $\bar{\lambda}_۲$ به ترتیب میانگین بردارهای ضرایب نرخ شکست متناسب ناهمگن $\boldsymbol{\lambda}_۱$ و $\boldsymbol{\lambda}_۲$ با ضرایب متعلق به بازه $[\circ,۱]$ باشند، در این صورت:

$$\rho_i \leq \rho_\circ \Leftrightarrow \lambda_\circ \geq \bar{\lambda}_i, \quad i=۱,۲$$
$$\rho_۱ \leq \rho_۲ \Leftrightarrow \bar{\lambda}_۱ \leq \bar{\lambda}_۲, \quad \circ \leq \frac{n(۱-\bar{\lambda}_۱)}{k} \leq ۱, \quad \circ \leq \frac{n(۱-\bar{\lambda}_۲)}{k} \leq ۱$$

برهان: عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد میانگین، ρای است که در رابطه $E(T_{(\rho,K)})=E(T_{\boldsymbol{\lambda}})$ صدق کند و لذا از حل معادله $\int_\circ^\infty (\bar{F}(t))^{k\rho+(n-k)}\mathrm{d}t = \int_\circ^\infty (\bar{F}(t))^{\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i}\mathrm{d}t$ بدست می‌آید. بنابراین اگر $F(x) = ۱-e^{-\theta x}$ باشد، عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد میانگین به صورت:

$$\rho = ۱ - \frac{n-\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i}{k}, \quad \circ < \frac{n-\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i}{k} < ۱$$

است و با مقایسه‌ای ساده نتایج زیر بدست می‌آید:

$$\rho_i \leq \rho_\circ \Leftrightarrow \lambda_\circ \geq \bar{\lambda}_i, \quad i = ۱, ۲$$
$$\rho_۱ \leq \rho_۲ \Leftrightarrow \bar{\lambda}_۱ \leq \bar{\lambda}_۲, \quad \circ \leq \frac{n(۱-\bar{\lambda}_۱)}{k} \leq ۱, \quad \circ \leq \frac{n(۱-\bar{\lambda}_۲)}{k} \leq ۱$$

۳ سالخوردگی نسبی

چن لی و ژیاهولی (۲۰۱۶) برای

$$\mathbf{X} = (X_۱, \ldots, X_n) \sim PHR(\bar{F}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_۱, \ldots, \lambda_n), \lambda_i \geq \circ$$
$$\mathbf{Y} = (Y_۱, \ldots, Y_n) \sim PHR(\bar{F}, \boldsymbol{\lambda}_\circ), \quad \boldsymbol{\lambda}_\circ = (\lambda_\circ, \ldots, \lambda_\circ), \lambda_\circ \geq \circ$$

نشان دادند $X_{۱:n}(\gtrsim_{rh})$ $Y_{۱:n} \lesssim_{rh}$ است، اگر و فقط اگر $\lambda_\circ \geq (\leq) \sum_{i=۱}^n \lambda_i/n$ باشد و $Y_{n:n} \lesssim_{rh} X_{n:n}$ است، اگر $\lambda_\circ \geq \sum_{i=۱}^n \lambda_i/n$ باشد. به طریقی مشابه، در قضیه‌های ۵ و ۶ به ترتیب برای سیستم‌های سری و موازی، وضعیت سرعت سالخوردگی نسبی در نرخ شکست و نرخ شکست معکوس رهیافت بهبود قابلیت اعتماد سیستم به روش مدل نرخ شکست ناهمگن (با نرخ‌های شکست متعلق به بازه $[\circ, ۱]$) نسبت به بهبود قابلیت اعتماد سیستم در رهیافت روش کاهش، بررسی می‌شود. اگر مجموعه کاهش در روش بهبود قابلیت اعتماد سیستم به روش کاهش، شامل همه مولفه‌های اصلی سیستم باشد، نتایج چن لی و ژیاهولی (۲۰۱۶) برای بررسی سرعت سالخوردگی نسبی رهیافت مدل نرخ شکست متناسب ناهمگن نسبت به رهیافت روش کاهش کفایت می‌کند، ولی اگر مجموعه کاهش برابر مجموعه همه مولفه‌های اصلی نباشد، آنگاه نتایج قضیه‌های ۵ و ۶ مفید است.

قضیه ۵. برای سیستم سری با مولفه‌های دو به دو مستقل و هم‌توزیع $F(t)$، فرض کنید T، $T_{(\rho,K)}$ و $T_{\boldsymbol{\lambda}}$ به ترتیب متغیر طول عمر سیستم اصلی و سیستم‌های بهبود یافته به روش‌های کاهش و مدل نرخ‌های شکست متناسب باشند، در این صورت:

الف– $T_{\boldsymbol{\lambda}}$ و $T_{(\rho,K)}$ در سرعت سالخوردگی نرخ شکست معادلند یعنی نسبت تابع نرخ شکست آن‌ها نسبت به t یک تابع ثابت است.

ب–

$$T_{\boldsymbol{\lambda}} \lesssim_{rh} T_{(\rho,K)} \Leftrightarrow \rho \geq ۱ - \frac{n - \sum_{i=۱}^n \lambda_i}{k}, \quad \rho \in (\circ, ۱)$$
$$T_{\boldsymbol{\lambda}} \gtrsim_{rh} T_{(\rho,K)} \Leftrightarrow \rho \leq ۱ - \frac{n - \sum_{i=۱}^n \lambda_i}{k}, \quad \rho \in (\circ, ۱)$$

برهان: **الف–** از آنجاکه $h_{T_{(\rho,K)}}(t) = h(t)[n-k(1-\rho)]$ و $h_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t) = h(t)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ است، نسبت $\frac{h_{T_{(\rho,K)}}(t)}{h_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)}$ بر حسب t مقدار ثابتی است، بنابراین $T_{\boldsymbol{\lambda}} \lesssim_{hr} T_{(\rho,K)}$ و $T_{(\rho,K)} \lesssim_{hr} T_{\boldsymbol{\lambda}}$ است. به عبارت دیگر $T_{(\rho,K)}$ و $T_{\boldsymbol{\lambda}}$ معادلند.

ب– از آنجاکه

$$r_{T_{(\rho,K)}}(t) = \frac{h_{T_{(\rho,K)}}(t)}{\frac{1-R_{T_{(\rho,K)}}(t)}{R_{T_{(\rho,K)}}(t)}} = \frac{h(t)[n-k(1-\rho)]}{[\bar{F}(t)]^{-(n-k(1-\rho))}-1}$$

$$r_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t) = \frac{h_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)}{\frac{1-R_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)}{R_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)}} = h(t)\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{[\bar{F}(t)]^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}-1}$$

بنابراین

$$\frac{r_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)}{r_{T_{(\rho,K)}}(t)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{n-k(1-\rho)} \cdot \frac{[\bar{F}(t)]^{-(n-k(1-\rho))}-1}{[\bar{F}(t)]^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}-1}$$

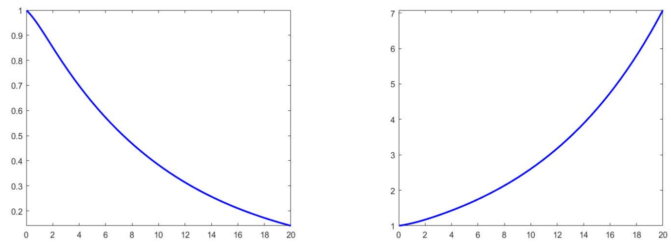
با در نظر گرفتن $c = n-k(1-\rho)$ و $d = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ مشتق آن نسبت به t به صورت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{r_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)}{r_{T_{(\rho,K)}}(t)} = h(t) \times \frac{d}{c} \times \frac{[\bar{F}(t)]^{-c}-1}{[\bar{F}(t)]^{-d}-1} \times (\frac{c}{1-[\bar{F}(t)]^{c}} - \frac{d}{1-[\bar{F}(t)]^{d}})$$

است. لذا علامت $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{r_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)}{r_{T_{(\rho,K)}}(t)}$ با علامت عبارت $(\frac{c}{1-[\bar{F}(t)]^{c}} - \frac{d}{1-[\bar{F}(t)]^{d}})$ برابر است، از طرفی بنا به لم ۱، تابع $\frac{c}{1-[\bar{F}(t)]^{c}}$ بر حسب c صعودی است، لذا $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{r_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)}{r_{T_{(\rho,K)}}(t)} \geq 0 \Leftrightarrow \rho \geq 1 - \frac{n-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{a}$ و اثبات کامل است.

مثال ۲. سیستم سری سه مولفه‌ای متشکل از مولفه‌هایی با طول عمر دو به دو مستقل و توزیع نمایی با میانگین ۱ را در نظر گیرید. فرض کنید $T_{\boldsymbol{\lambda}_1}$ متغیر طول عمر سیستم بهبود یافته با مدل نرخ شکست متناسب ناهمگن با بردار نرخ شکست $\boldsymbol{\lambda}_1 = (0/9, 0/8, 0/7)$ و $T_{(\rho,K)}$ متغیر طول عمر سیستم بهبود یافته در روش کاهش با اعمال ضریب کاهش ρ برای مجموعه کاهش $K = \{1\}$ باشد، در این صورت $\boldsymbol{\lambda}_1 = (0/9, 0/8, 0/7)$ و $\rho_0 = 0/3$ در شرط $\rho \in (0,1)$, $\rho \leq 1 - \frac{n-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{k}$ قضیه ۵ صدق می‌کند، لذا $T_{\boldsymbol{\lambda}_1} \lesssim_{rh} T_{(\rho=0/3,K)}$ است. ولی $\boldsymbol{\lambda}_1 = (0/9, 0/8, 0/7)$ و $\rho_0 = 0/5$ در شرط مذکور صدق نمی‌کند و لذا بنا به قضیه ۵ $T_{\boldsymbol{\lambda}_1} \lesssim_{rh} T_{(\rho=0/5,K)}$ است. در شکل ۱ نمودار $\frac{r_{T_{(\rho,K)}}(t)}{r_{T_{\boldsymbol{\lambda}_1}}(t)}$ برای $\rho_0 = 0/3$ و $\rho_0 = 0/5$ نسبت به t رسم شده است، همانطور که ملاحظه می‌شود، در $\rho_0 = 0/3$ نسبت به t صعودی است ولی در $\rho_0 = 0/5$ نسبت به t نزولی است.

قضیه ۶. فرض کنید در سیستم موازی با مولفه‌های دو به دو مستقل و هم‌توزیع با توزیع F، T، $T_{(\rho,K)}$ و $T_{\boldsymbol{\lambda}}$ به



(ب) (الف)

شکل ۱. نمودار $\frac{r_{T_{(\rho,K)}}(t)}{r_{T_{\boldsymbol{\lambda}_۱}}(t)}$ برای $t > ۰$، الف- $\rho = ۰٫۳$ و ب- $\rho = ۰٫۵$

ترتیب متغیر طول عمر سیستم اصلی و سیستم‌های بهبود یافته به روش‌های کاهش و مدل نرخ‌های شکست متناسب باشند، آن‌گاه :

$$\rho \geq \frac{\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i}{n} \Rightarrow T_{(\rho,K)} \lesssim_{rh} T_{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \rho \in (۰,۱)\,,\, \lambda_i \in [۰,۱] \qquad (۶)$$

برهان: از آنجاکه

$$\begin{aligned} r_{T_{(\rho,K)}}(t) &= \sum_{i\in K} \frac{\rho}{[\bar{F}(t)]^{-\rho} - ۱} h(t) + \sum_{i\notin K} \frac{۱}{[\bar{F}(t)]^{-۱} - ۱} h(t) \\ &= h(t)[\frac{k\rho}{[\bar{F}(t)]^{-\rho} - ۱} + \frac{(n-k)}{[\bar{F}(t)]^{-۱} - ۱}] \end{aligned}$$

و $r_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t) = h(t)\sum_{i=۱}^{n} \frac{\lambda_i}{[\bar{F}(t)]^{-\lambda_i} - ۱}$، داریم

$$\frac{r_{T_{(\rho,K)}}(t)}{r_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)} = \frac{\frac{k\rho}{[\bar{F}(t)]^{-\rho} - ۱}}{\sum_{i=۱}^{n} \frac{\lambda_i}{[\bar{F}(t)]^{-\lambda_i} - ۱}} + \frac{\frac{(n-k)}{[\bar{F}(t)]^{-۱} - ۱}}{\sum_{i=۱}^{n} \frac{\lambda_i}{[\bar{F}(t)]^{-\lambda_i} - ۱}} = \frac{g_۱(t)}{g_۳(t)} + \frac{g_۲(t)}{g_۳(t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{r_{T_{(\rho,K)}}(t)}{r_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)} = \frac{g_۱'(t)g_۳(t) - g_۱(t)g_۳'(t)}{g_۳^۲(t)} + \frac{g_۲'(t)g_۳(t) - g_۲(t)g_۳'(t)}{g_۳^۲(t)}$$

که در آن

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \frac{k\rho}{[\bar{F}(t)]^{-\rho}-1}, & g_1'(t) &= \frac{-k\rho^2 h(t)}{[\bar{F}(t)]^{\rho}([\bar{F}(t)]^{-\rho}-1)^2} \\ g_2(t) &= \frac{n-k}{[\bar{F}(t)]^{-1}-1}, & g_2'(t) &= \frac{-(n-k)h(t)}{\bar{F}(t)([\bar{F}(t)]^{-1}-1)^2} \\ g_3(t) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{[\bar{F}(t)]^{-\lambda_i}-1}, & g_3'(t) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{-\lambda_i^2 h(t)}{[\bar{F}(t)]^{\lambda_i}([\bar{F}(t)]^{-\lambda_i}-1)^2} \end{aligned}$$

حال فرض کنید در لم ۱ $q(x)=\bar{F}(x)$ باشد، در این صورت تابع $\frac{[1-[\bar{F}(t)]^{\rho}]}{\rho}$ برای $\rho>0$، بر حسب t و محدب نسبت به $\rho>0$ است، لذا با فرض $\rho\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{n}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{[1-[\bar{F}(t)]^{\rho}]}{\rho}\leq\frac{1-[\bar{F}(t)]^{\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{n}}}{\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{n}}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-[\bar{F}(t)]^{\lambda_i}}{\lambda_i} \tag{۷}$$

در این صورت با مرتب کردن λ_i، برای مقادیر

$$a_i=\frac{1-[\bar{F}(t)]^{\lambda_i}}{\lambda_i}\,,\, b_i=\frac{\lambda_i^2}{[\bar{F}(t)]^{\lambda_i}[[\bar{F}(t)]^{-\lambda_i}-1]^2}\,,\, c_i=\frac{\lambda_i}{[\bar{F}(t)]^{-\lambda_i}-1}$$

با توجه به رابطه (۷) و لم ۲ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{1-[\bar{F}(t)]^{\rho}}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{[\bar{F}(t)]^{\lambda_i}([\bar{F}(t)]^{-\lambda_i}-1)^2} &\leq(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i)\times n \\ &\leq(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)\times n=\sum_{i=1}^{n}c_i \end{aligned}$$

بنابراین اگر $\lambda_i\in[0,1]$; $\rho\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{n}$ باشد، آن‌گاه $\frac{r_{T_{(\rho,K)}}(t)}{r_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)}$ نسبت به t نزولی است و لذا $T_{\boldsymbol{\lambda}}\lesssim_{rh}$ $T_{(\rho,K)}$ است.

تذکر ۵. در مقایسه بهبود قابلیت اعتماد سیستم موازی به روش‌های کاهش و مدل نرخ شکست متناسب چنانچه ضریب کاهش در شرط $\rho\in(0,1)$ و $\lambda_i\in[0,1]$, $\rho\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{n}$ صدق کند، در این صورت بنا به قضیه ۶ سرعت سالخوردگی نسبی در نرخ شکست معکوس سیستم موازی بهبود یافته به روش کاهش آهسته‌تر از سیستم موازی بهبود یافته به روش مدل نرخ شکست متناسب است.

مثال ۳. سیستم موازی سه مولفه‌ای با توزیع طول عمر وایبل تعمیم یافته با تابع توزیع

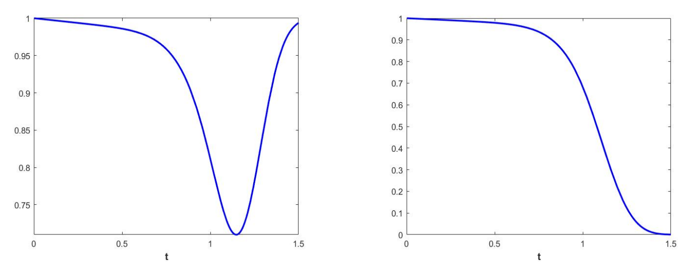
$$F(t) = 1 - e^{-\alpha t - \beta t^{\gamma}}, \quad t > 0\,, \alpha > 0\,, \beta > 0\,, \gamma > 0$$

را در نظر گیرید. اگر $\alpha = 0.05$، $\beta = 3$ و $\gamma = 7$ باشد و در رهیافت بهبود سیستم با مدل نرخ‌های شکست متناسب از نرخ‌های شکست $\lambda_1 = 0.9\,, \lambda_2 = 0.8\,, \lambda_3 = 0.7$ به ترتیب برای مولفه‌های ۱،۲ و ۳ و از ضریب‌های کاهش $\rho = 0.7$ و $\rho = 0.85$ برای مجموعه کاهش $K = \{1\}$ در روش کاهش استفاده شود، آن‌گاه

$$r_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t) = h(t)[\frac{0.9}{(\mathrm{e}^{-3t^{7}-\frac{t}{2}})^{-0.9}-1} + \frac{0.8}{(\mathrm{e}^{-3t^{7}-\frac{t}{2}})^{-0.8}-1} + \frac{0.7}{(\mathrm{e}^{-3t^{7}-\frac{t}{2}})^{-0.7}-1}]$$

$$r_{T_{(\rho=0.7,K)}}(t) = h(t)[\frac{2}{\mathrm{e}^{3t^{7}+\frac{t}{2}}-1} + \frac{7}{10\,((\mathrm{e}^{-3t^{7}-\frac{t}{2}})^{-0.7}-1)}]$$

$$r_{T_{(\rho=0.85,K)}}(t) = h(t)[\frac{2}{\mathrm{e}^{3t^{7}+\frac{t}{2}}-1} + \frac{17}{20\,((\mathrm{e}^{-3t^{7}-\frac{t}{2}})^{-0.85}-1)}]$$



(ب) (الف)

شکل ۲. $\frac{r_{T_{(\rho,K)}}(t)}{r_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)}$ برای $t > 0$، الف- $\rho = 0.85$ و ب- $\rho = 0.7$

است. از آنجاکه $\rho = 0.85$ در شرط قضیه ۶ صدق می‌کند، لذا $\frac{r_{T_{(\rho,K)}}(t)}{r_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)}$ نسبت به t نزولی است و $T_{\boldsymbol{\lambda}} \lesssim_{rh} T_{(\rho,K)}$ است ولی $\rho = 0.7$ در شرط قضیه ۶ صدق نمی‌کند، لذا $\frac{r_{T_{(\rho,K)}}(t)}{r_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)}$ نسبت به t همواره نزولی نخواهد بود. در شکل ۲ با رسم $\frac{r_{T_{(\rho,K)}}(t)}{r_{T_{\boldsymbol{\lambda}}}(t)}$ در بازه $[0\,, 1.5]$ نمایش تصویری این نتایج ارائه شده است.

بحث و نتیجه‌گیری

برای دو سیستم سری $S_۱$ و $S_۲$ اگر $T_{s_۲} <_{st} T_{s_۱}$ باشد، شکل کلی عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد بقاء برای هم‌ارز شدن سیستم $S_۱$ با سیستم $S_۲$ ارائه شد، همچنین شرایطی که عامل هم‌ارزی بقاء سیستم $S_۱$ برای هم‌ارز شدن با سیستم $S_۲$ بهبود یافته با مدل نرخ‌های شکست متناسب، وجود خواهد داشت مورد بررسی قرار گرفت و شکل کلی عامل هم‌ارزی بقاء در این حالت نیز تعیین گردید. در ادامه برای تابع توزیع پایه دلخواه F رهیافت‌های بهبود قابلیت اعتماد همگن و ناهمگن در مدل نرخ‌های شکست متناسب بر اساس عامل هم‌ارزی بقاء مقایسه و مرتب گردید. همچنین برای سیستم سری با مولفه‌های دو به دو مستقل و هم‌توزیع، سرعت سالخوردگی نسبی در شاخص‌های نرخ شکست و نرخ شکست معکوس برای بهبود در رهیافت روش کاهش نسبت به بهبود در رهیافت مدل نرخ‌های شکست متناسب مقایسه گردید.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات و پیشنهادات داوران محترم، رهنمودهای ارزنده و ویرایش ادبی سردبیر محترم و هیئت تحریریه مجله که باعث ارتقا کیفی مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

اسدی، م. (۱۳۹۵)، آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.

برمال‌زن، ق. حیدری، ع. و معصومی‌فرد، خ. (۱۳۹۴)، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی در مدل مقیاس، مجله علوم آماری ایران، **۹**، ۲۰۶-۱۸۹.

چهکندی، م. اطمینان، ج. و خنجری، م. (۱۴۰۰)، مطالعه‌ای بر هم‌ارزی قابلیت اعتماد در روش‌های کاهش و افزونگی، مجله علوم آماری ایران، **۱۵**، ۸۰-۶۱.

Alghazo, J. M., Mustafa, M. and El-Faheem, A. A. (2020), Availability Equivalence Analysis for the Simulation of Repairable Bridge Network System, *Complexity*, Vol. 2020, Article ID 4907895, 8 pages, https://doi.org/10.1155/2020/4907895.

Block, H. W., Savits, T. H., and Singh, H. (1998), The Reversed Hazard Rate Function, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **12**(1), 69-90.

Gupta, R. C., Gupta, P. L., and Gupta, R. D. (1998), Modeling Failure Time Data by Lehman Alternatives, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **27**(4), 887-904.

Hu, L., Yue, D. and Tian, R. (2016), Availability Equivalence Analysis of a Repairable Multi-State Parallel-Series System with Different Performance Rates, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol. 2016, Article ID 3175269, 9 pages, https://doi.org/10.1155/2016/3175269.

Kalashnikov, V. and Rachev, S. (1986), A Characterization of Qeueing Models and Its Stability, *Journal of Soviet Mathematics*, **35**(2), 2336-2360.

Keilson, J. and Sumita, U. (1982), Uniform Stochastic Ordering and Related Inequalities, *Canadian Journal of Statistics*, 10(3), 181-198.

Kumar, D. and Klefsjö, B. (1994), Proportional Hazards Model: A Review. *Reliability Engineering & System Safety*, **44**(2), 177-188.

Li, C. and Li, X. (2016), Relative Ageing of Series and Parallel Systems with Statistically Independent and Heterogeneous Component Lifetimes, *IEEE Transactions on Reliability*, **65**(2), 1014-1021.

Lawless, J. F. (1982), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley and Sons, New York.

Mitrinovic, D. S., Pecaric, J. and Fink, A. M. (1993), *Classical and New Inequalities in Analysis*, Springer Science and Business Media Dordrecht.

Nanda, A. K., Singh, H., Misra, N., and Paul, P. (2003), Reliability Properties of Reversed Residual Lifetime, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **32**(10), 2031-2042.

Rade, L. (1989), Reliability Equivalence, Studies in Statistical Quality Control and Reliability, *Mathematical Statistics, Chalmers University of Technology.*

Rade, L. (1990), Reliability Systems of 3-State Components, *Avdelningen för Matematisk Statistik, Chalmers Tekniska Högskola*.

Rade, L. (1991), Performance Measures for Reliability Systems with a Cold Standby with a Random Switch, *Avdelningen för Matematisk Statistik, Chalmers Tekniskahögskola*.

Rade, L. (1993), Reliability Survival Equivalence, *Microelectronics Reliability*, **33**(6), 881-894.

Rezaei, M., Gholizadeh, B., and Izadkhah, S. (2015), On Relative Reversed Hazard Rate Order, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **44**(2), 300-308.

Sarhan, A. M. (2000), Reliability Equivalence of Independent and Non-identical Components Series Systems, *Reliability Engineering & System Safety*, **67**(3), 293-300.

Sarhan, A. M. (2002), Reliability Equivalence with a Basic Series/Parallel System, *Applied Mathematics and Computation*, **132**(1), 115-133.

Sarhan A. M. and Mustafa, A. (2013), Availability Equivalence Factors of a General Repairable Series-Parallel System, *International Journal of Reliability and Applications*, **14**, 11–26.

Sarhan, A., Tadj, L., Al-Khedhairi, A. and Mustafa, A. (2008), Equivalence Factors of a Parallel-Series System, *Applied Sciences*, **10**, 219-230.

Sengupta, D. and Deshpande, J. V. (1994), Some Results on the Relative Ageing of Two Life Distributions, *Journal of Applied Probability*, **31**(4), 991-1003.