



برخی مفاهیم فازی قابلیت اعتماد بر اساس آلفا-شک

مهدیه مظفری^{۱*}، محمد خنجری صادق^۱، محمد قاسم اکبری^۱، غلام رضا حسامیان^۲
^۱آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند
^۲آگروه آمار، دانشگاه پیام نور تهران

چکیده: در این مقاله با استفاده از تعریف آلفا-شک متغیر تصادفی فازی مقیاس برخی از معیارهای قابلیت اعتماد مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، در صورت نامعلوم بودن توزیع طول عمر مؤلفه یا در دسترس بودن فقط مشاهدات فازی طول عمر مؤلفه‌ها، از تابع توزیع تجربی داده‌های فازی برای تخمین قابلیت استفاده گردیده است.

واژه‌های کلیدی: آلفا-شک، تابع بقا، تابع توزیع تجربی، متغیر تصادفی فازی مقیاس، نرخ خطر.

۱ مقدمه

در بسیاری از رویدادهای واقعی زندگی، مجموعه مشاهدات نادقیق می‌باشند. نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفیسور لطفی عسکرزاده معرفی شد و از زمان ارائه آن تاکنون، گسترش زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در علوم مختلف از جمله ریاضیات، مهندسی، اقتصاد و ... پیدا کرده است. (حسامیان و همکاران، ۲۰۱۹) با استفاده از تعریف α -شک و متغیر فازی مکان-مقیاس برخی مفاهیم استنباط آماری و توابع قابلیت اعتماد سیستم k از n را مورد بررسی قرار داده‌اند. (زنده‌دل و همکاران، ۲۰۲۲)، بر اساس یک تعریف جدید برای تابع چگالی متغیرهای تصادفی فازی، توابع نرخ خطر و تابع میانگین باقیمانده را برای متغیر تصادفی فازی نمایشی مورد بررسی قرار داده‌اند. در این مقاله، با استفاده از مفهوم α -شک در تعریف متغیر تصادفی فازی، تابع توزیع تجربی فازی معرفی شده، همچنین از این مفهوم در تخمین تابع چگالی بر اساس تابع کرنل استفاده شده است. بعلاوه، توابع بقای تجربی و نرخ خطر بر اساس α -شک مطرح شده‌اند. در ادامه، مثال‌هایی برای شرح و تبیین مفاهیم قابلیت اعتماد بیان گردیده است.

۲ اعداد فازی

مجموعه مرجع \mathbb{X} را در نظر بگیرید. مجموعه فازی \tilde{A} از \mathbb{X} به صورت $\{(x, \tilde{A}(x)); x \in \mathbb{X}\}$ نمایش داده می‌شود. نگاشت $\tilde{A}: \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ که به هر $x \in \mathbb{X}$ یک مقدار از بازه $[0, 1]$ نسبت می‌دهد، تابع عضویت \tilde{A} گویند. برای هر $\alpha \in (0, 1]$ زیرمجموعه $\{x \in \mathbb{X} \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$ ، α -برش \tilde{A} نامیده شده و به صورت $\tilde{A}[\alpha] = [\tilde{A}_\alpha^L, \tilde{A}_\alpha^U]$ نمایش داده می‌شود، که در آن

$$\tilde{A}_\alpha^L = \inf\{x \in \mathbb{X} \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}, \quad \tilde{A}_\alpha^U = \sup\{x \in \mathbb{X} \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}.$$

تعریف ۱. مجموعه فازی \tilde{A} از \mathbb{R} را عدد فازی گویند، هرگاه تک نمای، محدب و نیم‌پیوسته بالایی باشد.

تعریف ۲. فرض کنید \tilde{A} یک عدد فازی روی \mathbb{R} باشد. \tilde{A} را عدد فازی LR گویند، اگر تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{l_a}\right) & x \leq a \\ R\left(\frac{x-a}{r_a}\right) & x > a, \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیرصعودی از \mathbb{R}^+ به $[0, 1]$ می‌باشند و $L(0) = R(0) = 1$. عدد حقیقی a مقدار نما یا میانه، اعداد مثبت r_a و l_a به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست \tilde{A} نامیده می‌شوند. عدد فازی LR با نماد $(a; l_a, r_a)_{LR}$ نمایش داده می‌شود.

همچنین \tilde{A} به ازای هر $x \in [0, 1]$ یک عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود، هرگاه $L(x) = R(x) = 1 - x$ و آن را با نماد $(a; l_a, r_a)_T$ نمایش می‌دهند.

ملاحظه ۱. فرض کنید $F(\mathbb{R})$ مجموعه اعداد فازی باشد. برای $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$ ، نگاشت $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1] : \tilde{A}_\alpha - \alpha$ شک \tilde{A} نامیده و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{A}_\alpha = \begin{cases} \tilde{A}_\alpha^L & 0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ \tilde{A}_\alpha^U & 0.5 < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

که در آن \tilde{A}_α^L و \tilde{A}_α^U مقادیر پایین و بالای α -برش عدد فازی \tilde{A} میباشد. دقت می‌کنیم که رابطه α -شک با α -برش به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{A}[\alpha] = \left[\tilde{A}_{\frac{\alpha}{2}}^L, \tilde{A}_{1-\frac{\alpha}{2}}^R \right], \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

ملاحظه ۲. به ازای هر $\tilde{A}, \tilde{B} \in F(\mathbb{R})$ ، $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in [0, 1]$ داریم:

$$\begin{aligned} (\tilde{A} \oplus \tilde{B})_\alpha &= \tilde{A}_\alpha + \tilde{B}_\alpha, \\ (\tilde{A} \otimes \tilde{B})_\alpha &= \tilde{A}_\alpha / \tilde{B}_{1-\alpha} \quad \tilde{B}_0 > 0, \\ (\lambda \otimes \tilde{A})_\alpha &= \begin{cases} \lambda \tilde{A}_\alpha & \lambda > 0 \\ 0 & \lambda = 0 \\ \lambda \tilde{A}_{1-\alpha} & \lambda < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

۳ متغیرهای تصادفی فازی

در دهه‌های اخیر تعریف متغیر تصادفی در محیط فازی توسط محققین زیادی مد نظر قرار گرفته است. واکرناک (۱۹۷۸، ۱۹۷۹) با استفاده از α -برش متغیر تصادفی فازی، تعریفی برای متغیر تصادفی فازی بیان کرد. بعدها، پوری و رالسکو (۱۹۸۶) متغیر تصادفی فازی را به صورت زیر تعریف کردند.

تعریف ۳. در فضای احتمال (Ω, A, P) ، $\tilde{X} : \Omega \rightarrow F(\mathbb{R})$ مجموعه تمام اعداد فازی روی \mathbb{R} یک متغیر تصادفی فازی است اگر به ازای تمام $\alpha \in (0, 1]$ $\tilde{X}_\alpha^L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ و $\tilde{X}_\alpha^U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ متغیرهای تصادفی معمولی باشند.

با توجه به مفهوم α -شک و رابطه آن با α -برش، بیان دیگری از تعریف واکرناک به صورت زیر ارائه شده است.

تعریف ۴. (حسامیان و چاچی، ۲۰۱۶) در فضای احتمال (Ω, A, P) ، $\tilde{X} : \Omega \rightarrow F(\mathbb{R})$ یک متغیر تصادفی فازی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\alpha \in (0, 1]$ یک متغیر تصادفی معمولی باشد.

روابط بین تعاریف ۳ و ۴ به صورت زیر است:

$$\tilde{X}_\alpha = \begin{cases} \tilde{X}_{\frac{\alpha}{2}}^L & 0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ \tilde{X}_{\frac{\alpha}{2}(1-\alpha)}^U & 0.5 < \alpha \leq 1 \end{cases}, \quad \tilde{X}[\alpha] = [\tilde{X}_{\frac{\alpha}{2}}^L, \tilde{X}_{1-\frac{\alpha}{2}}^R] \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

بعلاوه، دو متغیر تصادفی فازی \tilde{X} و \tilde{Y} مستقل و هم‌توزیع می‌باشند، هرگاه \tilde{X}_α و \tilde{Y}_α به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ مستقل و هم‌توزیع باشند.

تعریف ۵. فرض کنید g یک تابع چگالی احتمال و X یک متغیر تصادفی مقیاس با تابع چگالی زیر باشد:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} g(x/\sigma); \quad x \in S_X \subseteq \mathbb{R}, \sigma > 0,$$

که S_X ، تکیه‌گاه X می‌باشد. بنابراین $\tilde{X} = X \otimes (1; U_1, U_2)_T$ متغیر تصادفی فازی مقیاس (SFRV) نامیده می‌شود، اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱). $P(S_X \subseteq (0, \infty)) = 1$. (۲). U_1 و U_2 مستقل از X ، $U_1 \sim U(a_1, b_1)$ و $U_2 \sim U(a_2, b_2)$ باشند، به طوری که $0 \leq a_1 < b_1 \leq 1$ و $0 \leq a_2 < b_2$.

۴ برخی مفاهیم قابلیت در محیط فازی

در تحلیل قابلیت اعتماد کلاسیک، معمولاً داده‌های جمع‌آوری شده، پارامترهای مدل، احتمال‌های مربوطه و ... کمیت‌هایی دقیق در نظر گرفته می‌شوند. اما، در عمل با وضعیت‌هایی مواجه خواهیم شد که در آنها به دلیل شرایط حاکم بر آزمایش، مفروضات فوق برقرار نیستند. نظریه مجموعه‌های فازی، یکی از ابزارهای مناسب برای غلبه بر این مشکل می‌باشد.

لم ۱. (حساميان و همكاران، ۲۰۱۹) فرض كنيد \tilde{T} متغير تصادفي فازی مقیاس باشد، آنگاه (۱)

$$(\tilde{F}_{\tilde{T}}(z))_{\alpha} = \begin{cases} F_T\left(\frac{z}{1 + (1 - 2\alpha)b_2}\right) + \frac{z}{1 + (1 - 2\alpha)a_2} \int_z^{\frac{z}{t - 1 - (1 - 2\alpha)a_2}} \frac{z/t - 1 - (1 - 2\alpha)a_2}{(1 - 2\alpha)(b_2 - a_2)} \times f_T(t) dt & 0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ F_T\left(\frac{z}{1 + (1 - 2\alpha)a_1}\right) + \frac{z}{1 + (1 - 2\alpha)b_1} \int_z^{\frac{z}{t - 1 - (1 - 2\alpha)b_1}} \frac{z/t - 1 - (1 - 2\alpha)b_1}{(2\alpha - 1)(b_1 - a_1)} \times f_T(t) dt & 0.5 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

ملاحظه ۳. فرض كنيد \tilde{T} يك SFRV باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\tilde{T}_{\alpha}}(z) &= 1 - P(\tilde{T}_{\alpha} \leq z) \\ &= 1 - (\tilde{F}_{\tilde{T}}(z))_{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (2)$$

ملاحظه ۴. فرض كنيد متغير تصادفي فازی \tilde{T} يك SFRV باشد، بر اساس ملاحظه ۳ داریم:

$$\begin{aligned} f_{\tilde{T}_{\alpha}}(z) &= -\frac{d}{dz} \bar{F}_{\tilde{T}_{\alpha}}(z) \\ &= \frac{d}{dz} (F_{\tilde{T}}(z))_{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (3)$$

تعريف ۶. فرض كنيد \tilde{T} طول عمر مؤلفه باشد. نرخ خطر آن يعني $\tilde{r}_{\tilde{T}}(z)$ به صورت زیر می باشد:

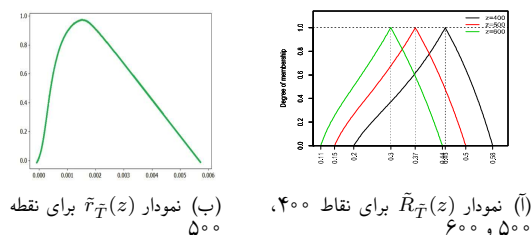
$$(\tilde{r}_{\tilde{T}}(z))_{\alpha} = \begin{cases} \inf_{\beta \in I_{\alpha}} \frac{f_{\tilde{T}_{\beta}}(z)}{R_{\tilde{T}_{\beta}}(z)} & 0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ \sup_{\beta \in I_{\alpha}} \frac{f_{\tilde{T}_{\beta}}(z)}{R_{\tilde{T}_{\beta}}(z)} & 0.5 < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (4)$$

مثال ۱. فرض كنيد متغير تصادفي فازی \tilde{T} يك SFRV باشد، كه $U_1 \sim U(0, 1)$ ، $T \sim Exp(0.002)$ و

$U_2 \sim U(0, 1)$ باشند. بنا بر معادله (۲) داریم:

$$(\tilde{R}_{\tilde{T}}(z))_{\alpha} = \begin{cases} R_T(z) - \int_z^{z/\gamma\alpha} \frac{z/t - \gamma\alpha}{(1 - \gamma\alpha)} f_T(t) dt & 0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ R_T\left(\frac{z}{\gamma\alpha}\right) - \int_{z/\gamma\alpha}^z \frac{z/t - 1}{(\gamma\alpha - 1)} f_T(t) dt & 0.5 < \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (5)$$

که نمودار $\tilde{R}_{\tilde{T}}(z)$ با شبیه سازی الگوریتم (۵) برای نقاط ۴۰۰، ۵۰۰ و ۶۰۰ با استفاده از نرم افزار R و نمودار $\tilde{r}_{\tilde{T}}(z)$ با شبیه سازی الگوریتم (۴) با استفاده از نرم افزار $\text{Minitab} \setminus \text{fig}$ در نقطه $z = 0.005$ در شکل ۱ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۱: نمودار $\tilde{R}_{\tilde{T}}(z)$ و $\tilde{r}_{\tilde{T}}(z)$

با توجه به مطالبی که شرح آن در بالا گذشت، توابع بقا و نرخ خطر برای خانواده مقیاس در حالتی که توزیع متغیر تصادفی فازی طول عمر \tilde{T} معلوم باشد، قابل محاسبه هستند. حال اگر توزیع طول عمر \tilde{T} مشخص نباشد، یا اگر فقط مشاهدات فازی طول عمر مؤلفه‌ها در دسترس باشد، می‌توان با استفاده از توزیع تجربی آنها برای تخمین قابلیت اعتماد استفاده کرد. فرض کنید $\tilde{t} = (\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n)$ یک نمونه تصادفی فازی از مشاهدات \tilde{T} باشد، بنابراین با استفاده از تعریف تابع توزیع تجربی برای این مشاهدات نادقیق، توابع بقا و نرخ خطر تعریف می‌شوند.

تعریف ۷. $\tilde{F}_n(t)$ را تابع توزیع تجربی فازی \tilde{T} گوئیم، هرگاه α -شک آن به صورت زیر بیان شود:

$$(\tilde{F}_n(t))_{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I((\tilde{t}_i)_{1-\alpha} \leq t).$$

همچنین، تابع بقای تجربی \tilde{T} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} (\tilde{R}_n(t))_{\alpha} &= (\tilde{F}_n(t))_{\alpha} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I((\tilde{t}_i)_{\alpha} \geq t), \end{aligned} \quad (6)$$

دقت می‌کنیم که این تابع نسبت به α همواره صعودی بوده و α -برش‌های آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{R}_n(t)[\alpha] = [\tilde{R}_n(t)_{\alpha/2}, \tilde{R}_n(t)_{1-\alpha/2}].$$

در آمار ناپارامتری، برآورد تابع چگالی را می‌توان بر اساس تابع کرنل بدست آورد. تابع کرنل (هسته)، تابعی متقارن و تک مدی حول صفر بوده که اولین بار برای تخمین تابع چگالی احتمال استفاده شده و آن را با $K(u)$ نمایش می‌دهند. با توجه به تابع کرنل $K(u)$ برآورد $f_{\tilde{T}_\beta}(t)$ را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\tilde{f}_{n,\beta}(t) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - \tilde{t}_{i\beta}}{h}\right),$$

که h ، پارامتر هموار سازی است.

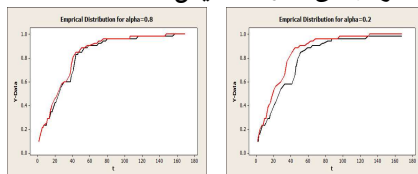
تعریف ۸. $\tilde{r}_n(t)$ را تابع نرخ خطر تجربی فازی \tilde{T} گوئیم، هرگاه α -شک آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left(\tilde{r}_n(t)\right)_\alpha = \begin{cases} \inf_{\beta \in I_{\alpha}} \frac{\tilde{f}_{n,\beta}(t)}{\tilde{R}_{n,\beta}(t)} & 0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ \sup_{\beta \in I_{\alpha}} \frac{\tilde{f}_{n,\beta}(t)}{\tilde{R}_{n,\beta}(t)} & 0.5 < \alpha \leq 1 \end{cases}, \quad (7)$$

که $I_\alpha = [\alpha/2, 1 - \alpha/2]$ می‌باشد و با جایگذاری $\tilde{f}_{n,\beta}(t)$ و $\tilde{R}_{n,\beta}(t)$ در رابطه (7)، کران‌های پایین و بالای $\tilde{r}_n(t)$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

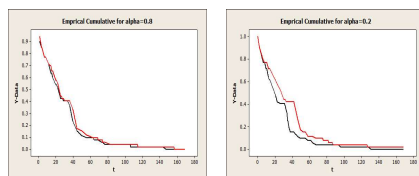
$$\begin{aligned} \left(\tilde{r}_n(t)\right)_\alpha^L &= \inf_{\beta \in [\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}]} \frac{\tilde{f}_{n,\beta}(t)}{\tilde{R}_{n,\beta}(t)}, \\ \left(\tilde{r}_n(t)\right)_\alpha^U &= \sup_{\beta \in [\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}]} \frac{\tilde{f}_{n,\beta}(t)}{\tilde{R}_{n,\beta}(t)} \end{aligned}$$

مثال ۲. (سدرا و اسمیت (۲۰۰۴)) ۵۲ مشاهده فازی مثلثی واقعی طول عمر مؤلفه Q_2 از یک مدار را که در آن به منظور تقویت سیگنال ورودی، از سه ترانزیستور Q_1 ، Q_2 و Q_3 نوع NPN به شکل سری استفاده شده است را در نظر بگیرید. با ماکروهایی که در نرم افزار *MiniTab* ۱۶ نوشته شده، کران‌های پایین و بالای $\tilde{F}_n(t)$ و $\tilde{R}_n(t)$ برای $h = 10$ و α های مختلف، در نمودارهای ۲ و ۳ نمایش داده شده‌اند.

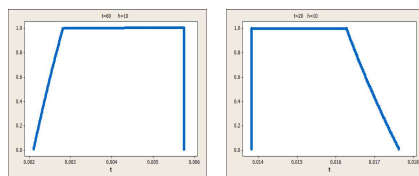


شکل ۲: نمودار کران‌های بالا و پایین $\tilde{F}_n(t)$ برای $\alpha = 0.8, 0.2$

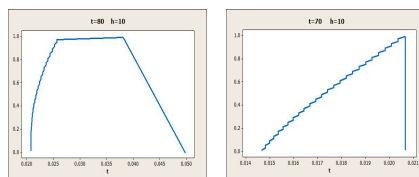
همچنین، منحنی توابع $\tilde{f}_n(t)$ و $\tilde{r}_n(t)$ در نمودارهای ۴ و ۵ نمایش داده شده‌اند. بنا بر نمودارهای ۴ و ۵ برای $h = 10$ ، $\tilde{f}_n(t)$ در نقاط $t = 20, 60$ به ترتیب حدوداً 0.155 و 0.004 و $\tilde{r}_n(t)$ در نقاط $t = 50, 80$ به ترتیب حدوداً 0.205 و 0.35 می‌باشند.



شکل ۳: نمودار کران‌های بالا و پایین برای $\tilde{R}_n(t)$ برای $\alpha = 0.8, 0.2$



شکل ۴: نمودار برای $\tilde{f}_n(t)$ برای $h = 10$ و $t = 20, 60$



شکل ۵: نمودار برای $\tilde{r}_n(t)$ برای $h = 10$ و $t = 50, 80$

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از تعریف آلفا-شک متغیر تصادفی فازی مقیاس برخی از معیارهای قابلیت اعتماد مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، در صورت نامعلوم بودن توزیع طول عمر مؤلفه یا در دسترس بودن فقط مشاهدات فازی طول عمر مؤلفه‌ها، از تابع توزیع تجربی داده‌های فازی برای تخمین قابلیت استفاده گردید. بعلاوه، مثال‌هایی عددی برای بررسی و کنکاش بیشتر مطرح گردید.

مراجع

- Akbari, M. G., and Hesamian, G. (2020). Time-Dependent Intuitionistic Fuzzy System Reliability Analysis. *Soft Computing*, **24**, 14441–14448.
- Hesamian, G. R., and Chachi, J. (2015). Two-sample Kolmogorov–Smirnov fuzzy test for fuzzy random variables. *Statistical Papers*, **56**, 61–82.
- Hesamian, G., Akbari, M. G., and Zendehdel, J. (2019). Location and Scale Fuzzy Random Variables. *International Journal of Systems Science*, 229–241.
- Kwakernaak, H. (1978). Fuzzy Random Variables-I. Definition and Theorem. *Information Sciences*, **15**, 1–29.

- Kwakernaak, H. (1979). Fuzzy Random Variables-II. Algorithms and Examples for the Discrete Case. *Information Sciences*, **17**, 253-278.
- Puri, M. L., and Ralescu, D. A. (1986). Fuzzy Random Variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **114**, 409-422.
- Sedra, A., and Smith, K. (2004). *Microelectronic Circuits*. United Kingdom: Oxford University Press.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information Control*, **8**, 338-356.
- Zendehdel, J., Zarei, R., and Akbari, M. G. (2022). Testing Exponentiality for Imprecise Data and Its Application . *Soft Computing*, **22**, 3301–3312.

Some fuzzy concepts of reliability based on alpha-value

Mozafari, M.¹, Khanjari Sadegh, M.¹, Akari, M. GH.¹, Hesamian, Gh.²

¹Department of Statistics, Birjand University, Birjand, Iran.

²Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Abstract: In this paper, some reliability criteria have been investigated using the definition of α -value fuzzy random variable scale. Also, if the component lifetime distribution is unknown or only fuzzy observations of component lifetime are available, the experimental fuzzy data distribution function is used to estimate the capability.

Keywords: Alpha-value, Failure rate, Fuzzy number, Fuzzy scale random variable, Survival function.
