نهمین کنگره مشترک سیستم‌های فازی و هوشمند ایران
۱۱-۱۳ اسفند ماه ۱۴۰۰، مجتمع آموزش عالی بم

قابلیت اعتماد بر اساس α-شک اعداد فازی

مهدیه مظفری[۱]، محمد خنجری[۲] و محمد قاسم اکبری[۲]

[۱] گروه آمار، دانشکده ریاضی و محاسبات، مجتمع آموزش عالی بم، شهر بم، mozafari@bam.ac.ir
[۲] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، شهر بیرجند، mkhanjari@birjand.ac.ir، g-z-akbari@birjand.ac.ir

چکیده: در این مقاله، بر پایه α-شک اعداد فازی، یک متغیر تصادفی فازی مقیاس تعریف شده است. بر اساس این متغیر تصادفی، برخی از معیارهای قابلیت اعتماد نظیر تابع بقا و نرخ خطر مورد بررسی قرار گرفته و همچنین مثال‌هایی در این مورد، ارائه گردیده است.

کلمات کلیدی: تابع بقا، عدد فازی، قابلیت اعتماد، متغیر تصادفی فازی مقیاس، نرخ خطر.

۱ مقدمه

استنباط آماری کلاسیک به مشاهدات دقیق متکی است. با این وجود، در بسیاری از رویدادهای واقعی زندگی، مشاهدات قابل استفاده نادقیق می‌باشند. پس از معرفی نظریه مجموعه‌های فازی توسط زاده [۸]، چنین عدم قطعیت‌هایی با استفاده از مجموعه‌های فازی به روشی کارامدتر از در نظر گرفتن مقادیر دقیق مطلق مدل‌بندی شد. شاپیرو [۶] و گیل، لوپز دیاز و رالسکو [۲] تفسیرهای مختلفی از تعاریف مختلف متغیر تصادفی فازی را بررسی کردند. در این راستا، تلاش زیادی برای تعمیم مشخصه‌های احتمالی یک متغیر تصادفی فازی مانند: پارامترهای توزیع، توزیع تجمعی، میانگین، واریانس و کوواریانس انجام شده است. افراد دیگری، از جمله حسامیان و طاهری [۴] این مفاهیم آماری را به عنوان مجموعه‌های فازی گسترش دادند.
باید توجه داشت که، بسیاری از توزیع‌های احتمالی را می‌توان با پارامترهای مکان و مقیاس مشخص کرد. چنین پارامترهای مکان و مقیاس، اغلب در استنباط‌های آماری (لهمن و کسلا [۵]) و تئوری قابلیت اعتماد (ویلیام و اسکوبار [۷]) استفاده می‌شوند. از آنجا که، بسیاری از استنباط‌های آماری شامل عدم قطعیت می‌باشند، بنابراین در این مقاله، برخی استنباط‌های آماری یک متغیر تصادفی فازی از خانواده مقیاس نظیر توزیع تجمعی، امید ریاضی، واریانس و احتمال غیردقیق یک بازه مورد بررسی قرار گرفته است. بعلاوه، برخی از معیارهای قابلیت اعتماد نظیر تابع بقا و تابع نرخ شکست ارائه شده است. همچنین مثال‌هایی عددی نیز برای نشان دادن محاسبه عملگرها بیان گردید.

۲ اعداد فازی

مجموعه مرجع $\mathbb{X}$ را در نظر بگیرید. مجموعه فازی $\tilde{A}$از $\mathbb{X}$ به صورت $\{(x,\tilde{A}(x)); x\in\mathbb{X}\}$نمایش داده می‌شود.
نگاشت $\tilde{A}(x) : \mathbb{X} \longrightarrow [0,1]$ که به هر $x \in \mathbb{X}$ یک مقدار از بازه [۰،۱] نسبت می دهد، تابع عضویت $\tilde{A}$ گویند. برای هر $\alpha \in (0,1]$ زیرمجموعه $\{x \in X \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$، α-برش $\tilde{A}$ نامیده شده و با $\tilde{A}[\alpha]$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ روی $\mathbb{R}$، یک عدد فازی می‌باشد، هرگاه
(1) به ازای هر $\alpha \in [0,1]$، $\tilde{A}[\alpha] = \left[\tilde{A}^L[\alpha], \tilde{A}^U[\alpha]\right]$ باشد، که در آن

$$\tilde{A}^L[\alpha] = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\},$$

$$\tilde{A}^U[\alpha] = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}.$$

(2) عدد حقیقی یکتای $x^* = x^*_{\tilde{A}} \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد، بطوریکه $\tilde{A}(x^*) = 1$.

تعریف ۲. فرض کنید $\tilde{A}$ یک عدد فازي روي مجموعه مرجع $\mathbb{X}$ باشد، آن را عدد فازي LR گويند، اگر تابع عضويت آن به صورت زير باشد:

$$\tilde{A}(x)=\begin{cases} L(\frac{a-x}{l_a}) & x\leq a\\ R(\frac{x-a}{r_a}) & x>a\\ 0 & x\in\mathbb{R}-[a-l_a,a+r_a],\end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیرصعودی از $\mathbb{R}^+$ به $[0,1]$ می‌باشند و $L(0)=R(0)=1$. عدد حقیقی a مقدار نما (میانه)، l_a و r_a به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست $\tilde{A}$ نامیده می شوند. عدد فازی LR با نماد $(a;l_a,r_a)_{LR}$ نمایش داده می‌شود.
همچنین $\tilde{A}$ به ازای هر $x\in[0,1]$ یک عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود، هر گاه L(x)=R(x)=1-x و آن را با نماد $(a;l_a,r_a)_T$ نمایش می‌دهند. تابع عضویت آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{A}(x)=\begin{cases} \frac{x-(a-l_a)}{l_a} & a-l_a\leq x\leq a\\ \frac{a+r_a-x}{r_a} & a\leq x\leq a+r_a\\ 0 & x\in\mathbb{R}-[a-l_a,a+r_a].\end{cases}$$

ملاحظه ۱. فرض کنید $F(\mathbb{R})$ مجموعه اعداد فازی باشد. برای $\tilde{A}\in F(\mathbb{R})$ ، نگاشت $\tilde{A}_\alpha\ :\ [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ α-شک $\tilde{A}$نامیده می‌شود و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{A}_\alpha=\begin{cases}\tilde{A}^L[2\alpha] & \alpha\in[0,0.5]\\ \tilde{A}^U[2(1-\alpha)] & \alpha\in(0.5,1],\end{cases}$$

که $\tilde{A}^L[\alpha]$ و $\tilde{A}^U[\alpha]$ به ترتیب نشان‌دهنده کران‌های پایین و بالای α-برش‌های $\tilde{A}$ می‌باشند. به سادگی می‌توان نوشت:

$$\tilde{A}[\alpha]=[\tilde{A}^L[\alpha],\tilde{A}^U[\alpha]]=[\tilde{A}_{\alpha/2},\tilde{A}_{1-\alpha/2}]. \qquad (۱)$$

ملاحظه ۲. α -شک عدد فازی LR $\tilde{A}=(a;l_a,r_a)_{LR}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}_\alpha=\begin{cases} a-l_aL^{-1}(2\alpha) & \alpha\in[0,0.5]\\ a+r_aR^{-1}(2(1-\alpha)) & \alpha\in(0.5,1].\end{cases}$$

به طور مشابه، α -شک عدد فازی مثلثی $\tilde{A}=(a;l_a,r_a)_T$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{A}_\alpha=\begin{cases} a-l_a+2l_a\alpha & \alpha\in[0,0.5]\\ a+r_a-2r_a(1-\alpha) & \alpha\in(0.5,1].\end{cases}$$

ملاحظه ۳. به ازای هر $\tilde{A},\tilde{B}\in F(\mathbb{R})$، $\lambda\in\mathbb{R}$ و $\alpha\in[0,1]$ عملگرهای ریاضی اعداد فازی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}&(\tilde{A}\oplus\tilde{B})_\alpha=\tilde{A}_\alpha+\tilde{B}_\alpha,\\ &(\tilde{A}\ominus\tilde{B})_\alpha=\tilde{A}_\alpha-\tilde{B}_{1-\alpha},\\ &(\tilde{A}\oslash\tilde{B})_\alpha=\tilde{A}_\alpha/\tilde{B}_{1-\alpha} \qquad \tilde{B}_0>0,\\ &(\lambda\otimes\tilde{A})_\alpha=\begin{cases}\lambda\tilde{A}_\alpha & \lambda>0\\ 0 & \lambda=0\\ \lambda\tilde{A}_{1-\alpha} & \lambda<0.\end{cases}\end{aligned}$$

۳ متغیرهای تصادفی فازی

فرض کنید (Ω,A,P) یک فضای احتمال باشد.

تعریف ۳. نگاشت فازی مقدار $\tilde{X}:\Omega\longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک متغیر تصادفی فازی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\alpha\in[0,1]$، نگاشت حقیقی مقدار $\tilde{X}_\alpha\ :\ \Omega\ \longrightarrow\ \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی حقیقی مقدار باشد. بعلاوه، دو متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ مستقل و هم‌توزیع می باشند، هرگاه $\tilde{X}_\alpha$ و $\tilde{Y}_\alpha$ به ازای هر $\alpha\in[0,1]$ مستقل و هم‌توزیع باشند. همچنین $\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_n$ یک نمونه تصادفی فازی می‌باشند، اگر $\tilde{X}_i$ها متغیرهای تصادفی فازی مستقل و هم‌توزیع باشند. مقادیر مشاهده شده یک نمونه تصادفی فازی را با $\tilde{x_1},...,\tilde{x_n}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۴. عدد فازی $\tilde{F}_{\tilde{X}}(x)$ تابع توزیع تجمعی فازی $\tilde{X}$ می‌باشد، هرگاه α-شک آن به صورت زیر بیان شود:

$$(\tilde{F}_{\tilde{X}}(x))_\alpha= \qquad (۲)$$

$$P(\tilde{X}_{1-\alpha}\leq x)=\begin{cases}\inf_{\beta\in I_{2\alpha}}F_{\tilde{X}_\beta}(x) & 0.0\leq\alpha\leq0.5\\ \sup_{\beta\in I_{2(1-\alpha)}}F_{\tilde{X}_\beta}(x) & 0.5<\alpha\leq1.0,\end{cases}$$

که $I_\alpha=[\alpha/2,1-\alpha/2]$.

ملاحظه ۴. عدد فازی $\tilde{\bar{F}}_{\tilde{X}}(x)$ را در نقطه x در نظر بگیرید. α-شک آن به صورت $(\tilde{\bar{F}}_{\tilde{X}}(x))_\alpha=\bar{F}_{\tilde{X}_\alpha}(x)$ می‌باشد.

تعریف ۵. متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ را در نظر بگیرید. به ازای $(a,b)\subset\mathbb{R}$ داریم:

$$(\tilde{P}(\tilde{X}\in(a,b)))_\alpha=$$

$$\begin{cases}\inf_{\beta\in I_{2\alpha}}P(a<\tilde{X}_\beta<b) & 0.0\leq\alpha\leq0.5\\ \sup_{\beta\in I_{2(1-\alpha)}}P(a<\tilde{X}_\beta<b) & 0.5<\alpha\leq1.0.\end{cases}$$

ملاحظه ۵. اگر $(\tilde{F}_{\tilde{X}}(a))_1\leq(\tilde{F}_{\tilde{X}}(b))_0$، به آسانی می‌توان نشان داد:

$$(\tilde{P}(\tilde{X}\in(a,b)))_\alpha=(\tilde{F}_{\tilde{X}}(b))_\alpha-(\tilde{F}_{\tilde{X}}(a))_{1-\alpha}.$$

تعریف ۶. امید ریاضی و واریانس $\tilde{X}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&(\tilde{E}(\tilde{X}))_\alpha=E(\tilde{X}_\alpha),\\ &Var(\tilde{X})=E(d(\tilde{X},\tilde{E}(\tilde{X})),\end{aligned} \qquad (۳)$$

که برای دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$، $\mathbf{d}(\tilde{A},\tilde{B})=\int_0^1(\tilde{A}_\alpha-\tilde{B}_\alpha)^2d\alpha$. بنابراین $Var(\tilde{X})=\int_0^1 Var(\tilde{X})_\alpha d\alpha$.

تعریف ۷. فرض کنید X یک متغیر تصادفی مکان-مقیاس با تابع چگالی زیر باشد:

$$\{f_X(x)=\frac{1}{\sigma}g((x-\mu)/\sigma): x\in S_X\subseteq\mathbb{R},\mu\in\mathbb{R},\sigma>0\},$$

$\tilde{X}=X\otimes(1;U_1,U_2)_T$ متغیر تصادفی فازی مقیاس (**SFRV**) نامیده می‌شود، اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱). $\mu=0$ و $P(S_X\subseteq(0,\infty))=1$،

(۲). U_1 و U_2 مستقل از X، $U_1\sim U(a_1,b_1)$ و $U_2\sim U(a_2,b_2)$ با $0\le a_1<b_1\le 1$، $0\le a_2<b_2$ می‌باشند.

لم ۱. (حسامیان، اکبری و زنده‌دل [۳]) فرض کنید $\tilde{X}$ متغیر تصادفی فازی مقیاس باشد، آنگاه α-شک $\tilde{F}_{\tilde{X}}(z)$ به صورت زیر است:

(۴)

$$(\tilde{F}_{\tilde{X}}(z))_\alpha=\begin{cases}F_X(\frac{z}{1+(1-2\alpha)b_2})+\int_{\frac{z}{1+(1-2\alpha)b_2}}^{\frac{z}{1+(1-2\alpha)a_2}}\frac{z/x-1-(1-2\alpha)a_2}{(1-2\alpha)(b_2-a_2)}\times f_X(x)dx & 0\le\alpha\le 0.5\\ F_X(\frac{z}{1+(1-2\alpha)a_1})+\int_{\frac{z}{1+(1-2\alpha)a_1}}^{\frac{z}{1+(1-2\alpha)b_1}}\frac{z/x-1-(1-2\alpha)b_1}{(2\alpha-1)(b_1-a_1)}\times f_X(x)dx & 0.5<\alpha\le 1.\end{cases}$$

ملاحظه ۶. فرض کنید $\tilde{X}$ یک **SFRV** باشد، آنگاه داریم:

$$\bar{F}_{\tilde{X}_\alpha}(z)=1-P(\tilde{X}_\alpha\le z)=1-(\tilde{F}_{\tilde{X}}(z))_{1-\alpha},$$
$$\bar{F}_{\tilde{X}_{1-\alpha}}(z)=1-P(\tilde{X}_{1-\alpha}\le z)=1-(\tilde{F}_{\tilde{X}}(z))_\alpha. \qquad (۵)$$

لم ۲. فرض کنید $\tilde{X}$ یک ***SFRV*** باشد، آنگاه α -شک $\tilde{\bar{F}}_{\tilde{X}}(z)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

(۶)

$$(\tilde{\bar{F}}_{\tilde{X}}(z))_\alpha=\begin{cases}\bar{F}_X(\frac{z}{1+(2\alpha-1)a_1})-\int_{\frac{z}{1+(2\alpha-1)a_1}}^{\frac{z}{1+(2\alpha-1)b_1}}\frac{z/x-1-(2\alpha-1)b_1}{(1-2\alpha)(b_1-a_1)}\times f_X(x)dx & 0.0\le\alpha\le 0.5\\ \bar{F}_X(\frac{z}{1+(2\alpha-1)b_2})-\int_{\frac{z}{1+(2\alpha-1)b_2}}^{\frac{z}{1+(2\alpha-1)a_2}}\frac{z/x-1-(2\alpha-1)a_2}{(2\alpha-1)(b_2-a_2)}\times f_X(x)dx & 0.5<\alpha\le 1.\end{cases}$$

اثبات. بنا بر روابط (۴)و (۵) می‌توان نوشت:

$$(\tilde{\bar{F}}_{\tilde{X}}(z))_\alpha=\bar{F}_{\tilde{X}_\alpha}(z)=1-(\tilde{F}_{\tilde{X}}(z))_{1-\alpha}$$

$$=\begin{cases}1-F_X(\frac{z}{1+(1-2(1-\alpha))b_2})-\int_{\frac{z}{1+(1-2(1-\alpha))b_2}}^{\frac{z}{1+(1-2(1-\alpha))a_2}}\frac{z/x-1-(1-2(1-\alpha))a_2}{(1-2(1-\alpha))(b_2-a_2)}\times f_X(x)dx & 0\le 1-\alpha\le 0.5\\ 1-F_X(\frac{z}{1+(1-2(1-\alpha))a_1})-\int_{\frac{z}{1+(1-2(1-\alpha))a_1}}^{\frac{z}{1+(1-2(1-\alpha))b_1}}\frac{z/x-1-(1-2(1-\alpha))b_1}{(2(1-\alpha)-1)(b_1-a_1)}\times f_X(x)dx & 0.5<1-\alpha\le 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\bar{F}_X(\frac{z}{1+(2\alpha-1)a_1})-\int_{\frac{z}{1+(2\alpha-1)a_1}}^{\frac{z}{1+(2\alpha-1)b_1}}\frac{z/x-1-(2\alpha-1)b_1}{(1-2\alpha)(b_1-a_1)}f_X(x)dx & 0.0\le\alpha\le 0.5\\ \bar{F}_X(\frac{z}{1+(2\alpha-1)b_2})-\int_{\frac{z}{1+(2\alpha-1)b_2}}^{\frac{z}{1+(2\alpha-1)a_2}}\frac{z/x-1-(2\alpha-1)a_2}{(2\alpha-1)(b_2-a_2)}f_X(x)dx & 0.5<\alpha\le 1.\end{cases}$$

□

ملاحظه ۷. فرض کنید متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ یک **SFRV** باشد، بر اساس توجه ۶ داریم:

$$f_{\tilde{X}_\alpha}(z)=-\frac{d}{dz}\bar{F}_{\tilde{X}_\alpha}(z)=\frac{d}{dz}(F_{\tilde{X}}(z))_{1-\alpha}. \qquad (۷)$$

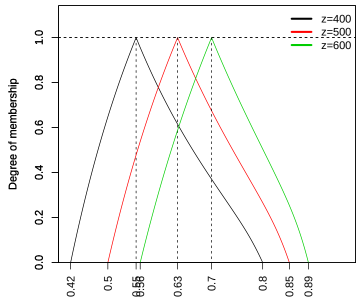
لم ۳. (حسامیان، اکبری و زنده‌دل [۳]) فرض کنید $\tilde{X}$ یک ***SFRV*** باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{E}}(\tilde{X})&=\boldsymbol{E}(X)\otimes(1;\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2})_T,\\ \boldsymbol{Var}(\tilde{X})&=\boldsymbol{Var}(X)(1+\frac{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}{24}\\&\quad-\frac{(a_2+b_2)+(a_1+b_1)}{4})\\&\quad+\boldsymbol{E}(X^2)(\frac{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}{72}).\end{aligned} \qquad (۸)$$

مثال ۱. فرض کنید $\tilde{X}$ یک **SFRV** باشد، که $X\sim Exp(0.002)$، $U_1\sim U(0,1)$ و $U_2\sim U(0,1)$ باشند. بنا بر (۴) داریم:

$$(\tilde{F}_{\tilde{X}}(z))_\alpha=\begin{cases}F_X(\frac{z}{2(1-\alpha)})+\int_{\frac{z}{2(1-\alpha)b_2}}^{z}\frac{z/x-1}{(1-2\alpha)}f_X(x)dx & 0\le\alpha\le 0.5\\ F_X(z)+\int_{z}^{\frac{z}{2(1-\alpha)}}\frac{z/x-2(1-\alpha)}{(2\alpha-1)}f_X(x)dx & 0.5<\alpha\le 1.\end{cases}$$

نمودار $\tilde{F}_{\tilde{X}}(z)$ برای نقاط ۴۰۰، ۵۰۰ و ۶۰۰ در منحنی ۱ نمایش داده شده است. بعلاوه بنا بر (۸)، $\tilde{E}(\tilde{X}) = (500; 250, 250)_T$ و $Var(\tilde{X}) = 159722.22$ می‌باشند.

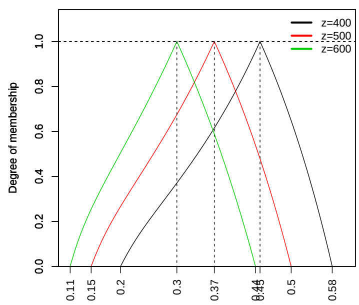


شکل ۱: منحنی $\tilde{F}_{\tilde{X}}(z)$ برای نقاط ۴۰۰، ۵۰۰ و ۶۰۰

مثال ۲. فرض کنید متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ یک **SFRV** باشد، که $X \sim Exp(0.002)$، $U_1 \sim U(0,1)$ و $U_2 \sim U(0,1)$ باشند. بنا بر معادله (۵) داریم:

$$(\bar{\tilde{F}}_{\tilde{X}}(z))_\alpha = \begin{cases} \bar{F}_X(z) - \displaystyle\int_z^{z/2\alpha} \frac{z/x - 2\alpha}{(1-2\alpha)} f_X(x)dx & \\ \qquad\qquad 0 \leq \alpha \leq 0.5 & \\ \bar{F}_X(\frac{z}{2\alpha}) - \displaystyle\int_{z/2\alpha}^{z} \frac{z/x - 1}{(2\alpha - 1)} f_X(x)dx & \\ \qquad\qquad 0.5 < \alpha \leq 1, & \end{cases}$$

که نمودار $\bar{\tilde{F}}_{\tilde{X}}(z)$ برای نقاط ۴۰۰، ۵۰۰ و ۶۰۰ در منحنی ۲ نمایش داده شده است.



شکل ۲: منحنی $\bar{\tilde{F}}_{\tilde{X}}(z)$ برای نقاط ۴۰۰، ۵۰۰ و ۶۰۰

۴ مفاهیم پایه قابلیت اعتماد فازی

در جهانی که در آن زندگی می‌کنیم، هیچ چیز از جمله اشیا و موجودات باقی و ثابت نیستند و در نهایت فانی خواهند شد. بنابراین از جمله خواسته‌های بشر نیاز به دانستن وضعیت طول عمر موجودات و اشیا اطراف اوست، تا بتواند به طور بهینه از آنها برای پیشبرد اهداف خود استفاده کند. این نیاز طبیعی بشر، امروزه منجر به ایجاد شاخه‌ای بزرگ و گسترده در تمامی علوم به نام قابلیت اعتماد یا بقا شده است.

لم ۴. فرض کنید $\tilde{T}$ که یک متغیر تصادفی فازی است، طول عمر سیستم باشد. آنگاه

$$(\tilde{R}_{\tilde{T}}(z))_\alpha = R_{\tilde{T}_\alpha}(z), \qquad (۹)$$

که $\tilde{R}_{\tilde{T}}(z)$، تابع بقا آن می‌باشد.

اثبات. به راحتی می‌توان نشان داد:

$$(\tilde{R}_{\tilde{T}}(z))_\alpha = (\bar{F}_{\tilde{T}}(z))_\alpha = \bar{F}_{\tilde{T}_\alpha}(z) = R_{\tilde{T}_\alpha}(z).$$

□

نکته ۱. عبارت‌های بیان شده در توجه ۶ در واقع، رابطه بین تابع توزیع و تابع بقای یک متغیر تصادفی فازی را بیان می‌کنند.

تعریف ۸. فرض کنید $\tilde{T}$ طول عمر سیستم باشد. نرخ خطر آن یعنی $\tilde{h}_{\tilde{T}}(z)$ به صورت زیر می‌باشد:

(۱۰)

$$(\tilde{h}_{\tilde{T}}(z))_\alpha = \begin{cases} \inf_{\beta \in I_{2\alpha}} \dfrac{f_{\tilde{T}_\beta}(z)}{R_{\tilde{T}_\beta}(z)} & 0.0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ \sup_{\beta \in I_{2(1-\alpha)}} \dfrac{f_{\tilde{T}_\beta}(z)}{R_{\tilde{T}_\beta}(z)} & 0.5 < \alpha \leq 1.0. \end{cases}$$

با توجه به (۲)، کران‌های پایین و بالای $\tilde{h}_{\tilde{T}}(z)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} (\tilde{h}_{\tilde{T}}(z))^L[\alpha] &= \inf_{\beta \in [\alpha/2, 1-\alpha/2]} \frac{f_{\tilde{T}_\beta}(z)}{R_{\tilde{T}_\beta}(z)}, \\ (\tilde{h}_{\tilde{T}}(z))^U[\alpha] &= \sup_{\beta \in [\alpha/2, 1-\alpha/2]} \frac{f_{\tilde{T}_\beta}(z)}{R_{\tilde{T}_\beta}(z)}. \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

مثال ۳. فرض کنید طول عمر سیستم $\tilde{T}$ یک **SFRV** باشد، که $T \sim Exp(0.002)$، $U_1 \sim U(0,1)$ و $U_2 \sim U(0,1)$ باشند. برای محاسبه $\tilde{h}_{\tilde{T}}(z)$، بنا بر (۵) و (۷) می‌توان نوشت:

(۱۲)

$$f_{\tilde{T}_\beta}(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_z^{z/2\beta} \frac{1}{t(1-2\beta)} f_T(t)dt & 0 \leq \beta \leq 0.5 \\ \displaystyle\int_{z/2\beta}^{z} \frac{1}{t(2\beta-1)} f_T(t)dt & 0.5 < \beta \leq 1, \end{cases}$$

(۱۳)

$$\bar{F}_{\tilde{X}_\beta}(z) = \begin{cases} \bar{F}_T(z) - \displaystyle\int_z^{z/2\beta} \frac{z/t - 2\beta}{(1-2\beta)} f_T(t)dt & 0 \leq \beta \leq 0.5 \\ \bar{F}_T(\frac{z}{2\beta}) - \displaystyle\int_{z/2\beta}^{z} \frac{z/t - 1}{(2\beta-1)} f_T(t)dt & 0.5 < \beta \leq 1, \end{cases}$$

که با جایگذاری (۱۲) و (۱۳) در (۱۱) داریم:

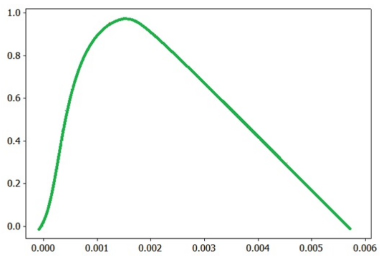
$$(\tilde{h}_{\tilde{T}}(z))^L[\alpha] =$$

$$\begin{cases} \inf_{\beta\in[\alpha/2,0.5]} \dfrac{\displaystyle\int_z^{z/2\beta} \frac{1}{t(1-2\beta)} f_T(t)dt}{\bar{F}_T(z) - \displaystyle\int_z^{z/2\beta} \frac{z/t-2\beta}{(1-2\beta)} f_T(t)dt}, \\ \inf_{\beta\in[0.5,1-\alpha/2]} \dfrac{\displaystyle\int_{z/2\beta}^{z} \frac{1}{t(2\beta-1)} f_T(t)dt}{\bar{F}_T(\frac{z}{2\beta}) - \displaystyle\int_{z/2\beta}^{z} \frac{z/t-1}{(2\beta-1)} f_T(t)dt}, \end{cases}$$

$$(\tilde{h}_{\tilde{T}}(z))^U[\alpha] =$$

$$\begin{cases} \sup_{\beta\in[\alpha/2,0.5]} \dfrac{\displaystyle\int_z^{z/2\beta} \frac{1}{t(1-2\beta)} f_T(t)dt}{\bar{F}_T(z) - \displaystyle\int_z^{z/2\beta} \frac{z/t-2\beta}{(1-2\beta)} f_T(t)dt}, \\ \sup_{\beta\in[0.5,1-\alpha/2]} \dfrac{\displaystyle\int_{z/2\beta}^{z} \frac{1}{t(2\beta-1)} f_T(t)dt}{\bar{F}_T(\frac{z}{2\beta}) - \displaystyle\int_{z/2\beta}^{z} \frac{z/t-1}{(2\beta-1)} f_T(t)dt}. \end{cases}$$

حال با در نظر گرفتن $z = 500$ و شبیه‌سازی الگوریتم بالا، منحنی $\tilde{h}_{\tilde{T}}(z)$ در شکل ۳ نمایش داده شده است.



شکل ۳: منحنی $\tilde{h}_{\tilde{T}}(z)$ برای نقطه ۵۰۰

۵ نتیجه

در این مقاله، یک مفهوم جدید از متغیر تصادفی فازی ارئه گردید. برای این منظور، یک خانواده توزیع احتمال مقیاس مورد استفاده قرار گرفت، سپس α-شک اعداد فازی برای توصیف مبهم بودن فرایندهای قبلی ترکیب شدند و متغیرهای تصادفی فازی مقیاس را به وجود آوردند. به این ترتیب، برخی از ویژگی‌های آماری بر اساس متغیرهای تصادفی فازی مقیاس مانند توزیع تجمعی، امید ریاضی، واریانس و احتمال غیردقیق یک بازه مورد بررسی قرار گرفت. بعلاوه، برخی از معیارهای قابلیت اعتماد نظیر تابع بقا و تابع نرخ شکست ارائه شد. همچنین مثال‌هایی عددی نیز برای نشان دادن محاسبه عملگرها بیان گردید. برای مطالعه در آینده، بر اساس این مفهوم پیشنهادی متغیر تصادفی فازی، می‌توان تئوری نمونه بزرگ، آزمون فرضیه‌ها و ... در استنباط آماری و همچنین مفاهیم سیستم های منسجم، موازی و سری در قابلیت اعتماد را بررسی کرد.

مراجع

[1] M. G. Akbari and G. Hesamian *"Linear model with exact inputs and interval-valued fuzzy outputs,"* IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 26, 518-530, 2017.

[2] M. A. Gil, M. López-Díaz and D. A. Ralescu *"Overview on the development of fuzzy random variables,"* Fuzzy Sets Systems, 157, 2546-2557, 2006.

[3] G. Hesamian, M. G. Akbari and J. Zendehdel *"Location and scale fuzzy random variables,"* International Journal of Systems Science. 229-241, 2019.

[4] G. Hesamian and S. M. Taheri *"Fuzzy empirical distribution function: Properties and application,"* Kybernetika, 49, 962-982, 2013.

[5] E. L. Lehmann and G. Casella *"Theory of point estimation (2nd ed.),"* Springer, 1998.

[6] F. A. Shapiro *"Fuzzy random variables,"* Insurance: Journal of Mathematical Economics, 44, 307-314, 2009.

[7] Q. M. William and L. A. Escobar, L. A *"Statistical methods forreliability data,"* John Wiley and Sons, Inc, 1998.

[8] L. A. Zadeh *"Fuzzy sets,"* Information Control, 8, 338-356, 1965.