مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۴، ص ۶۳۹-۶۵۲

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2021.36985.1912

مقایسه تصادفی سیستم‌های کار کرده افزونه و سیستم‌های افزونه با مؤلفه‌های کار کرده

پانیذ صمدی، مجید رضائی [×]، محمد خنجری صادق

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران

دبیر مسئول: غلامعلی پرهام

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱/۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۸/۲۸

چکیده: یکی از هدف‌های مهم در مهندسی قابلیت اعتماد، بهبود عملکرد و افزایش قابلیت اعتماد سیستم‌ها است. افزایش قابلیت اعتماد سیستم، با اختصاص مؤلفه‌های افزونه در ساختار آن قابل انجام است. در این مقاله از مؤلفه‌های افزونه کار کرده و سالم (با مدت زمان استفاده شده‌ی برابر $t > ۰$) در ساختار سیستم‌های منسجم جهت افزایش قابلیت اعتماد آن استفاده می‌کنیم. همچنین مقایسه تصادفی طول عمر سیستم‌های منسجم افزونه کارکرده و سیستم‌های منسجم افزونه با مؤلفه‌های کارکرده را مورد بررسی قرار داده‌ایم. مقایسه طول عمر سیستم منسجم افزونه کار کرده و سیستم منسجم افزونه با مولفه‌های کارکرده به طراحان سیستم‌های مهندسی امکان ساخت سیستم قابل اعتمادتر از مؤلفه‌های خوب یک سیستم از کار افتاده را می‌دهد. با استفاده از تابع دگر شکلی، نمایش آمیخته طول عمر سیستم‌های مذکور را بدست می‌آوریم. براساس ترتیب‌های تصادفی مختلف شرایطی روی توابع قابلیت اعتماد ارائه می‌دهیم که طول عمر سیستم‌های منسجم افزونه کارکرده بیشتر (کمتر) از طول عمر سیستم‌های منسجم افزونه با مؤلفه‌های کارکرده باشند.

واژه‌های کلیدی: افزونگی، تابع دگرشکلی، تابع مفصل، سیستم منسجم، مانده عمر.

رده‌بندی ریاضی: 62N05, 60E15

۱ مقدمه

یکی از روش‌های معمول برای افزایش قابلیت اعتماد سیستم‌های مهندسی استفاده از مؤلفه‌های افزونه (یدک) در ساختار سیستم‌هاست. مؤلفه‌های افزونه غالباً در دو نوع افزونگی فعال و افزونگی آماده به کار مورد استفاده قرار می‌گیرند. در افزونگی فعال، مؤلفه افزونه به صورت موازی با مؤلفه سیستم قرار می‌گیرد و همزمان با آن شروع به کار می‌کند. در حالی که در افزونگی آماده به کار، مؤلفه افزونه در کنار مؤلفه سیستم قرار می‌گیرد و با از کار افتادن مؤلفه سیستم شروع به کار می‌کند.

سیستم منسجم نقش مهمی در مطالعه قابلیت اعتماد دارد. یک سیستم قابلیت اعتماد را منسجم می‌گوییم اگر هیچ مؤلفه بی‌ربط نداشته باشد و تعویض مؤلفه از کار افتاده با مؤلفه در حال کار باعث بدتر شدن سیستم نشود. سیستم‌های سری، موازی و k از n حالت‌های خاص

[×]نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: mjrezaei@birjand.ac.ir (Majid Rezaei),

سیستم منسجم می‌باشند. برای اطلاعات بیشتر در مورد سیستم منسجم می‌توان به بارلو و پروشان [۳] مراجعه کرد. برای بهبود عملکرد سیستم قابلیت اعتماد، از مؤلفه‌های افزونه استفاده می‌شود. تاکنون تحقیقات زیادی برای بدست آوردن تخصیص بهینه مؤلفه‌های افزونه، صورت گرفته است. از جمله هازرا و ناندا ([۱۱]، [۱۳]) ژائو و همکاران ([۱۹]،[۲۰]) ، بلزونس و همکاران ([۴]،[۵]) و... . در همه این تحقیقات مؤلفه‌های افزونه، جدید (نو) هستند. در حالی که در واقعیت ممکن است دسترسی به مؤلفه‌های جدید، همواره برایمان مقدور نباشد، در عوض مؤلفه‌های کار کرده (تا زمان $t \geq 0$) و سالم در اختیار داشته باشیم. لذا می‌توان از مؤلفه‌های کار کرده (با مدت زمان استفاده شده‌ی برابر) و سالم در ساختار برخی سیستم‌های قابلیت اعتماد جهت بهبود عملکرد سیستم استفاده کرد. مؤلفه‌های کارکرده و سالم با مدت زمان استفاده شده‌ی برابر t را می‌توان به صورت زیر در اختیار داشت. فرض کنید یک سیستم قابلیت اعتماد با مؤلفه‌های جدید در اختیار داریم. اجازه می‌دهیم سیستم مورد نظر تا زمان دلخواه t کار کند. فرض کنید با بررسی سیستم در زمان t شاهد از کار افتادن سیستم علی رغم کار کردن برخی از مؤلفه‌های آن باشیم. در صورت در اختیار داشتن دو یا چند سیستم مشابه و جمع آوری مؤلفه‌های سالم و کار کرده آنها می‌توان تعداد بیشتری از مؤلفه‌های کار کرده و سالم با مدت زمان استفاده شده‌ی برابر t در اختیار داشت. در زمینه استفاده مجدد از مؤلفه‌های کارکرده و سالم در ساختار سیستم‌های دیگر می‌توان به تحقیقات گوپتا و همکاران [۱۰]، هازرا و ناندا [۱۲] و فنگ و لی [۷] اشاره کرد. گوپتا و همکاران [۱۰] شرایطی مشخص برای سیستم‌های منسجم متشکل از مؤلفه‌های وابسته و کارکرده بدست آوردند تا طول‌عمر سیستم از نظر ترتیب‌های تصادفی مختلف بیشتر (کمتر) از طول عمر سیستم منسجم کارکرده باشد (با فرض اینکه هر دو سیستم ساختار یکسان و مؤلفه‌های طول عمر هر دو سیستم دارای وابستگی یکسان باشند). هازرا و ناندا [۱۲] تحت شرایطی خاص نشان دادند یک سیستم منسجم با مؤلفه‌های مستقل و کار کرده عملکرد بهتر (بدتر) نسبت به یک سیستم منسجم کار کرده دارند. فنگ و لی [۷] برای مؤلفه‌های وابسته و غیر هم توزیع، به مقایسه تصادفی یک سیستم منسجم کار کرده و سیستم منسجم مشابه با مؤلفه‌های کارکرده پرداختند. هدف این مقاله، مطالعه مقایسه تصادفی سیستم‌های منسجم کارکرده افزونه با مؤلفه‌های جدید و سیستم منسجم افزونه با مؤلفه‌های کار کرده است (فرض بر این است که همه مؤلفه‌ها تا زمان $t > 0$ کار کرده و سالم باشند.) برای محاسبه تابع قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم مورد نظر، از تابع دگر شکلی استفاده خواهیم کرد.

در بخش ۲ مقاله، تعاریف و مقدمات مورد نیاز بیان شده است. در بخش ۳، نتایج اصلی بیان شده است. نمایش آمیخته طول عمر سیستم منسجم کار کرده افزونه با مؤلفه‌های جدید و سیستم منسجم افزونه با مؤلفه‌های کار کرده بدست آورده شده است. همچنین شرایط لازم و کافی برای توابع قابلیت اعتماد سیستم‌ها فراهم شده است به طوری که طول عمر سیستم منسجم کار کرده افزونه با مؤلفه‌های جدید بیشتر / کمتر از طول عمر سیستم منسجم افزونه با مؤلفه‌های کار کرده باشد. در کل مقاله، به جای اصطلاح غیر نزولی و غیر صعودی به ترتیب از صعودی و نزولی استفاده کرده ایم. همچنین متغیرهای تصادفی مطلقاً پیوسته، غیر منفی و با امید ریاضی متناهی هستند. و برای دو عدد حقیقی x و y فرض می‌کنیم: $x \vee y = \max\{x, y\}$.

۲ تعاریف و مقدمات

در این بخش، برخی از تعاریف و مفاهیم مورد نیاز ارائه می‌شود. ابتدا به تعریف ترتیب‌های تصادفی مورد نیاز می‌پردازیم، برای آشنایی بیشتر با ترتیب های تصادفی [۱۷] را ببینید. سپس تابع مفصل و تابع دگر شکلی را بیان می‌کنیم. در ادامه تابع قابلیت اعتماد طول عمر سیستم با مؤلفه‌های وابسته و هم توزیع را براساس تابع قابلیت اعتماد طول عمر مؤلفه‌های آن که توسط ناوارو و همکاران [۱۵] ارائه شده است، تحت عنوان لم آورده و از آن در پیشبرد نتایج اصلی مقاله استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی مطلقاً پیوسته به ترتیب با توابع توزیع $F(x)$ و $G(y)$، توابع قابلیت اعتماد $\bar{F}(x)$ و $\bar{G}(y)$ و توابع چگالی $f(x)$ و $g(y)$ باشند. در این صورت

۱. X در ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی کوچکتر از Y است و با نماد $X \leq_{lr} Y$ نشان داده می شود اگر و تنها اگر به ازای $t > 0$، $\frac{f(t)}{g(t)}$ تابع نزولی از t باشد.

۲. X در ترتیب تصادفی نرخ خطر کوچکتر از Y است و با نماد $X \leq_{hr} Y$ نشان داده می شود اگر و تنها اگر به ازای $t > 0$، $r_X(t) \geq r_Y(t)$ باشد. که در آن $r_X(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$ و $r_Y(t) = \frac{g(t)}{\bar{G}(t)}$ به ترتیب توابع نرخ خطر متغیرهای تصادفی X و Y است.

۳. X در ترتیب تصادفی نرخ خطر معکوس کوچکتر از Y است و با نماد $X \leq_{rh} Y$ نشان داده می شود اگر و تنها اگر به ازای $t > 0$، $\bar{r}_X(t) \leq \bar{r}_Y(t)$ باشد. که در آن $\bar{r}_X(t) = \frac{f(t)}{F(t)}$ و $\bar{r}_Y(t) = \frac{g(t)}{G(t)}$ به ترتیب توابع نرخ خطر معکوس متغیرهای تصادفی X و Y است.

۴. X در ترتیب تصادفی معمولی کوچکتر از Y است و با نماد $X \leq_{st} Y$ نشان داده می شود اگر و تنها اگر به ازای $t > \circ$، $\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$ باشد.

روابط هم ارزی زیر به راحتی نتیجه می‌شود:

۱. $X \leq_{lr} Y$ اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

i. برای هر $x > \circ$ رابطه $\eta_f(x) \geq \eta_g(x)$ برقرار باشد. که در آن توابع اتا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\eta_f(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)}, \qquad \eta_g(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)} \qquad x \in (\circ, \infty).$$

تابع اتا اطلاعات مفیدی در مورد تابع نرخ خطر داراست. همچنین بین تابع نرخ خطر و تابع اتا رابطه زیر برقرار است.

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln r(x) = r(x) - \eta(x).$$

برای اطلاعات بیشتر در مورد تابع اتا می‌توان به [۸] و [۹] مراجعه کرد.

ii. $\bar{F}(\bar{G}^{-۱}(p))$ تابع محدب نسبت به $p \in (\circ, ۱)$ باشد.

۲. $X \leq_{hr} Y$ اگر و تنها اگر $\frac{\bar{F}(\bar{G}^{-۱}(p))}{p}$ تابع صعودی نسبت به $p \in (\circ, ۱)$ باشد.

۳. $X \leq_{rh} Y$ اگر و تنها اگر $\frac{F(G^{-۱}(p))}{p}$ تابع نزولی نسبت به $p \in (\circ, ۱)$ باشد.

بین ترتیب های تصادفی فوق رابطه زیر برقرار است

$$X \leq_{lr} Y \rightarrow X \leq_{hr(rh)} Y \rightarrow X \leq_{st} Y$$

مقالات زیادی وجود دارد که به مقایسه تصادفی سیستم‌های قابلیت اعتماد براساس ترتیب‌های تصادفی پرداخته‌اند خواننده علاقه مند می‌تواند به برمال‌زن و امینی سرشت [۲]،برمال‌زن و همکاران [۱]و... مراجعه کند.

مفصل تابعی است که میان تابع توزیع (بقا) توأم و توابع توزیع (بقا) حاشیه ای ارتباط برقرار می‌کند. با استفاده از قضیه بعد که به قضیه اسکلار معروف است می‌توان با توزیع‌های حاشیه ای یکسان ساختارهای وابستگی (مفاصل) متفاوتی را مورد بررسی قرار داد. برای برهان قضیه بعد می‌توان به [۱۸] مراجعه کرد.

قضیه ۲.۲. فرض کنید بردار تصادفی $\mathbf{X} = (X_۱, \ldots, X_n)$ دارای تابع توزیع توأم $F(.)$ و تابع بقا توأم $\bar{F}(.)$ باشد. همچنین فرض کنید تابع توزیع و تابع بقا X_i به ترتیب $F_i(.)$ و $\bar{F}_i(.)$ برای $i = ۱, \ldots, n$ باشد. آنگاه مفصل $C : [\circ, ۱]^n \rightarrow [\circ, ۱]$ و مفصل بقا $K : [\circ, ۱]^n \rightarrow [\circ, ۱]$ وجود دارد که برای هر $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ داریم

$$F(x_۱, \ldots, x_n) = C(F_۱(x_۱), \ldots, F_۲(x_n)),$$
$$\bar{F}(x_۱, \ldots, x_n) = K(\bar{F}_۱(x_۱), \ldots, \bar{F}_۲(x_n)).$$

مفاصل مختلفی وجود دارد از جمله مفصل ارشمیدسی، مفصل حاصل ضربی، مفصل کلایتون اکاس (CO) و ... . برای مطالعه بیشتر در زمینه مفاصل می‌توان به [۶] و [۱۶] اشاره کرد.

تعریف ۳.۲. برای تابع نزولی و پیوسته $\phi : [\circ, +\infty] \rightarrow [\circ, ۱]$ به طوری که $\phi(\circ) = ۱$ و $\phi(+\infty) = \circ$، تابع

$$C_\phi(u_۱, \ldots, u_n) = \phi\left(\phi^{-۱}(u_۱) + \ldots + \phi^{-۱}(u_n)\right), \qquad u_i \in [\circ, ۱], i = ۱, ۲, \ldots, n,$$

مفصل ارشمیدسی با تابع مولد ϕ گفته می‌شود (که در آن $\phi^{-۱}$ تابع معکوس از راست پیوسته می‌باشد) هرگاه

$$(-۱)^k \frac{d^k}{dx^k}\phi(x) \geq \circ, \qquad k = \circ, \ldots, n-۲,$$

و $(-۱)^{n-۲}\frac{d^{n-۲}}{dx^{n-۲}}\phi(x)$ تابعی نزولی و محدب باشد.

تعریف ۴.۲. تابع پیوسته و صعودی $h(.) : [0,1] \to [0,1]$ که در شرایط $h(0) = 0$ و $h(1) = 1$ صدق کند تابع دگرشکلی نامیده می‌شود.

لم بعد که توسط ناوارو و همکاران [۱۵] ارائه شده است نمایشی از تابع بقا سیستمی با مؤلفه‌های وابسته و هم توزیع براساس تابع بقا مؤلفه‌های سیستم با استفاده از تابع دگرشکل، می‌باشد.

لم ۵.۲. فرض کنید T طول عمر سیستم منسجم با مولفه‌های وابسته و هم توزیع (DID) $X_1, \ldots, X_n$، که دارای تابع قابلیت مشترک $\bar{F}(.)$ باشند آنگاه

$$\bar{F}_T(t) = h(\bar{F}(t)),$$

که در آن h تابع دگرشکلی می‌باشد و تنها به تابع ساختار سیستم و مفصل بقا $X_1, \ldots, X_n$ وابسته است.

تعریف ۶.۲. فرض کنید T طول عمر سیستم منسجم با تابع بقا $\bar{F}(t)$ باشد در این صورت متغیر تصادفی شرطی $T_t = (T - t | T > t)$ نشان دهنده مدت زمان باقیمانده از عمر سیستم بعد از زمان t، به شرط اینکه سیستم تا زمان t عمر کرده باشد و به آن باقیمانده عمر سیستم گفته می‌شود.

تابع بقا باقیمانده عمر سیستم منسجم نیز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} P(T - t > x | T > t) &= \frac{P(T > t + x)}{P(T > t)} \\ &= \frac{h\big(\bar{F}(t + x)\big)}{h\big(\bar{F}(t)\big)}. \end{aligned}$$

فرض کنید n مؤلفه افزونگی $R_1, \ldots, R_n$ با طول عمر $Y_1, \ldots, Y_n$ به ترتیب دارای تابع توزیع و تابع قابلیت $F(.)$ و $\bar{F}(.)$ باشند. مؤلفه‌های $C_1, \ldots, C_n$ با طول عمر $X_1, \ldots, X_n$ و مؤلفه‌های افزونگی $R_1, \ldots, R_1$ می‌توانند وابسته باشند اما لزوماً هم توزیع هستند. در افزونگی تحت مؤلفه، به هر مؤلفه C_i از سیستم منسجم یک مؤلفه افزونگی فعال R_i، $i = 1, \ldots, n$ اختصاص می‌دهیم. در اینصورت طول عمر سیستم منسجم افزونه با طول عمر مؤلفه‌های وابسته و هم توزیع $X_1, \ldots, X_n$ و طول عمر مؤلفه‌های افزونگی $Y_1, \ldots, Y_n$ به صورت $T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) = T(X_1 \vee Y_1, \ldots, X_n \vee Y_n)$ نشان می‌دهیم.

باقیمانده عمر سیستم منسجم افزونه با طول عمر مؤلفه‌های وابسته و هم توزیع $X_1, \ldots, X_n$ و طول عمر مؤلفه‌های افزونگی $Y_1, \ldots, Y_n$ را برای $t > 0$ به صورت $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t = (T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) - t | T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) > t)$ نشان می‌دهیم و دارای تابع قابلیت اعتماد زیر است

$$\bar{F}_{(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t}(x) = \frac{h\big(h_{1|2}(\bar{F}(x + t))\big)}{h\big(h_{1|2}(\bar{F}(t))\big)}, \qquad x \geq 0 \tag{۱.۲}$$

که در آن $h_{1|2}(.)$ تابع قابلیت اعتماد سیستم موازی با دو مؤلفه و $h\big(h_{1|2}(\bar{F}(.))\big)$ تابع قابلیت زیرسیستم حاصل از اختصاص مؤلفه افزونگی R_i به مؤلفه C_i، $i = 1, \ldots, n$ از سیستم منسجم است. تابع قابلیت اعتماد بدست آمده در رابطه (۱.۲) تابع قابلیت اعتماد بدست آمده از تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}_t(x) = \dfrac{h_{1|2}(\bar{F}(x + t))}{h_{1|2}(\bar{F}(t))}$ با تابع دگر شکلی $h_{(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t} = \dfrac{h(p h_{1|2}(q))}{h(h_{1|2}(q))}$ است.

طول عمر سیستم منسجم افزونه با مؤلفه‌های کار کرده (مؤلفه‌های اصلی و افزونه تا یک زمان یکسان کارکرده باشند) را به صورت $T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t) = T\big((X_1)_t \vee (Y_1)_t, \ldots, (X_n)_t \vee (Y_n)_t\big)$ نشان می‌دهیم و دارای تابع قابلیت اعتماد زیر است

$$\bar{F}_{T(X_t \vee Y_t)}(x) = h\left(h_{1|2}\left(\frac{\bar{F}(x + t)}{\bar{F}(t)}\right)\right), \qquad x \geq 0 \tag{۲.۲}$$

در بخش بعد با استفاده از روابط (۱.۲) و (۲.۲) به مقایسه سیستم‌های منسجم افزونه می‌پردازیم.

۳ مقایسه تصادفی بین سیستم افزونه کارکرده و سیستم‌های افزونه با مؤلفه‌های کار کرده

سیستم منسجم با مؤلفه‌های اصلی طول عمر وابسته و هم توزیع $X_1 \ldots, X_n$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $Y_1, \ldots, Y_n$ مؤلفه‌های افزونگی هم توزیع با مؤلفه‌های اصلی باشند. در این بخش شرایط معادل که طول عمر سیستم افزونه کارکرده بیشتر (کمتر) از طول عمر سیستم‌های افزونه با مؤلفه‌های کار کرده است را براساس ترتیب‌های تصادفی بدست می‌آوریم.

در قضیه بعد، شرایطی معادل که طول عمر سیستم منسجم افزونه کارکرده بیشتر (کمتر) از طول عمر سیستم منسجم افزونه با مؤلفه‌های کار کرده از نظر ترتیب نسبت درستنمایی بدست می آوریم.

قضیه ۱.۳. برای $t>0$، $(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t \leq_{lr} (\geq_{lr}) T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر برای $q\in(0,1)$ یکی از شروط زیر برقرار باشد

۱. $\dfrac{(p-1)h'\left(p(2-p)\right)}{(p-q)h'\left(\frac{p}{q}\left(2-\frac{p}{q}\right)\right)}$ تابعی نزولی (صعودی) از $p\in(0,q)$ برای $p<q$ باشد،

۲. $h\left(\dfrac{h^{-1}(pq(2-q))}{h^{-1}(q(2-q))}\right)$ تابعی مقعر (محدب) نسبت به $p\in(0,1)$ باشد،

۳. برای $p\in(0,q)$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{2(1-p)h''\left(p(2-p)\right)}{h'\left(p(2-p)\right)}+\frac{1}{q(q-p)}\geq(\leq)\frac{2(q-p)h''\left(\frac{p}{q}\left(2-\frac{p}{q}\right)\right)}{q^3h'\left(\frac{p}{q}\left(2-\frac{p}{q}\right)\right)}+\frac{1}{1-p}$$

که $h'(.)$ و $h''(.)$ به ترتیب مشتق اول و دوم از تابع دگرشکلی $h(.)$ است.

اثبات. قسمت اول. توابع چگالی $(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t$ و $T(\mathbf{X_t}\vee\mathbf{Y_t})$ به صورت زیر است

$$f_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x)=\frac{f(x+t)h'_{1|2}(\bar F(x+t))h'(h_{1|2}(\bar F(x+t)))}{h(h_{1|2}(\bar F(t)))},\quad x\geq 0$$
$$f_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x)=\frac{f(x+t)}{\bar F(t)}h'_{1|2}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)h'\left(h_{1|2}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)\right),\quad x\geq 0$$

حال $(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t \leq_{lr} (\geq_{lr}) T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)$ برقرار است اگر و تنها اگر $\dfrac{f_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x)}{f_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x)}$ تابع صعودی (نزولی) از $x\in(0,\infty)$ باشد. لذا

$$\frac{f(x+t)}{\bar F(t)}h'_{1|2}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)h'\left(h_{1|2}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)\right)\left[\frac{f(x+t)h'_{1|2}\big(\bar F(x+t)\big)h'\big(h_{1|2}(\bar F(x+t))\big)}{h\big(h_{1|2}(\bar F(t))\big)}\right]^{-1}$$
$$=\frac{h(h_{1|2}(\bar F(t)))h'_{1|2}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)h'\left(h_{1|2}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)\right)}{\bar F(t)h'_{1|2}(\bar F(x+t))h'(h_{1|2}(\bar F(x+t)))}$$

بنابراین $\dfrac{f_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x)}{f_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x)}$ تابع صعودی (نزولی) از $x\in(0,\infty)$ است اگر و تنها اگر

$$\frac{h'_{1|2}\left(\frac{p}{q}\right)h'\left(h_{1|2}\left(\frac{p}{q}\right)\right)}{h'_{1|2}(p)h'(h_{1|2}(p))}$$

تابعی صعودی (نزولی) نسبت به $p\in(0,q)$ باشد. که معادل است با $\dfrac{f_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x)}{f_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x)}$ تابع صعودی (نزولی) از $x\in(0,\infty)$ است اگر و تنها اگر $\dfrac{(p-q)h'\left(\frac{p}{q}\left(2-\frac{p}{q}\right)\right)}{(p-1)h'(p(2-p))}$ تابعی صعودی (نزولی) نسبت به $p\in(0,q)$ باشد.

قسمت دوم. باتوجه به قضیه ۲.۴ قسمت iv ناوارو و همکاران [۱۵]، $(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t \leq_{lr} (\geq_{lr}) T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر $h_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}\big(h^{-۱}_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(p)\big)$ تابعی مقعر (محدب) از $p\in(۰,۱)$ باشد. برای $p\in(۰,۱)$ داریم

$$\begin{aligned} h_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}\big(h^{-۱}_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(p)\big) &= h_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}\Big(\frac{h^{-۱}(ph(h_{۱|۲}(q)))}{h_{۱|۲}(q)}\Big)\\ &= h\Big(\frac{h^{-۱}(pq(۲-q))}{h^{-۱}(q(۲-q))}\Big) \end{aligned}$$

لذا $(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t \leq_{lr} (\geq_{lr}) T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر برای $q\in(۰,۱)$، $h\Big(\frac{h^{-۱}(pq(۲-q))}{h^{-۱}(q(۲-q))}\Big)$ تابعی مقعر (محدب) نسبت به $p\in(۰,۱)$ باشد.

قسمت سوم. $(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t \leq_{lr} (\geq_{lr}) T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر برای $x\in(۰,\infty)$ داشته باشیم

$$\eta_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x) \geq (\leq) \eta_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x)$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned} \eta_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x) - \eta_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x) = f(x+t)\Big[&\frac{h''_{۱|۲}(\bar F(x+t))}{h'_{۱|۲}(\bar F(x+t))} + \frac{h''(h_{۱|۲}(\bar F(x+t)))}{h'(h_{۱|۲}(\bar F(x+t)))}h'_{۱|۲}(\bar F(x+t))\\ &- \frac{h''_{۱|۲}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)}{\bar F(t)h'_{۱|۲}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)} - \frac{h''\left(h_{۱|۲}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)\right)h'_{۱|۲}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)}{\bar F(t)h'\left(h_{۱|۲}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)\right)}\Big] \end{aligned}$$

لذا $(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t \leq_{lr} (\geq_{lr}) T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned} &\frac{h''_{۱|۲}(\bar F(x+t))}{h'_{۱|۲}(\bar F(x+t))} + \frac{h''(h_{۱|۲}(\bar F(x+t)))}{h'(h_{۱|۲}(\bar F(x+t)))}h'_{۱|۲}(\bar F(x+t))\\ &\qquad \geq (\leq) \frac{h''_{۱|۲}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)}{\bar F(t)h'_{۱|۲}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)} + \frac{h''\left(h_{۱|۲}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)\right)h'_{۱|۲}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)}{\bar F(t)h'\left(h_{۱|۲}\left(\frac{\bar F(x+t)}{\bar F(t)}\right)\right)} \end{aligned}$$

بنابراین $(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t \leq_{lr} (\geq_{lr}) T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر برای $p\in(۰,۱)$ داشته باشیم

$$\frac{۲(۱-p)h''\left(p(۲-p)\right)}{h'\left(p(۲-p)\right)} + \frac{۱}{q(q-p)} \geq (\leq) \frac{۲(q-p)h''\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)}{q^{۳}h'\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)} + \frac{۱}{۱-p}$$

□

مثال ۲.۳. سیستم منسجم $T(\mathbf{X}) = \min(X_۱, \max(X_۲, X_۳))$ با مؤلفه‌های طول عمر وابسته و هم توزیع $X_۱, X_۲, X_۳$ را در نظر بگیرید. تابع قابلیت اعتماد سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \bar F_T(t) &= \bar F_{\{۱,۲\}}(t) + \bar F_{\{۱,۳\}}(t) - \bar F_{\{۱,۲,۳\}}(t)\\ &= \bar F(t,t,۰) + \bar F(t,۰,t) - \bar F(t,t,t)\\ &= K(\bar F(t),\bar F(t),۱) + K(\bar F(t),۱,\bar F(t)) - K(\bar F(t),\bar F(t),\bar F(t))\\ &= h(\bar F(t)) \end{aligned}$$

که در آن $h(u) = K(u,u,۱) + K(u,۱,u) - K(u,u,u)$.

فرض کنید مؤلفه‌های طول عمر دارای مفصل بقا

$$K(u_۱, u_۲, u_۳) = u_۱ u_۲ u_۳ (۱ + \alpha(۲ - u_۱ - u_۲)(۱ - u_۳)), \qquad ۰ < u_i < ۱, i = ۱, ۲, ۳.$$

که در آن $\alpha \in [-۰/۵, ۰/۵]$. لذا داریم:

$$h(u) = (۲ + \alpha)u^۲ - (۱ + ۴\alpha)u^۳ + ۵\alpha u^۴ - ۲\alpha u^۵, \qquad u \in (۰, ۱)$$

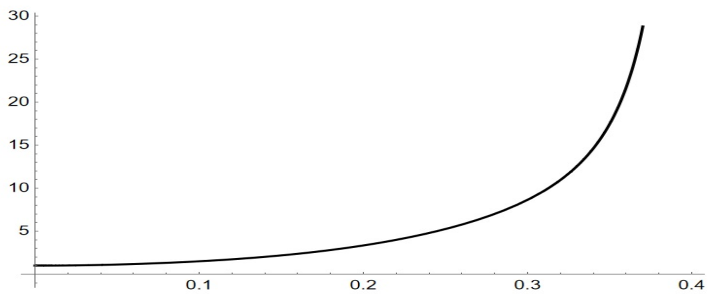
و

$$h'(u) = ۲(۲ + \alpha)u - ۳(۱ + ۴\alpha)u^۲ + ۲۰\alpha u^۳ - ۱۰\alpha u^۴, \qquad u \in (۰, ۱).$$

با فرض $\alpha = -۰/۵$ و $q = ۰/۴$ داریم:

$$\psi_۱(p) = \frac{(p - ۱)h'(p(۲ - p))}{(p - q)h'\left(\frac{p}{q}\left(۲ - \frac{p}{q}\right)\right)}$$

با توجه به نمودار تابع $\psi_۱(p)$ در برابر p بنا به قضیه (۱.۳) نتیجه می‌گیریم که $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \geq_{lr} T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$.



شکل ۱: نمودار $\psi_۱(p)$ دربرابر p.

در نتیجه بعد، نشان خواهیم داد همواره سیستم‌های افزونه k از n با مؤلفه‌های مستقل و کارکرده از نظر ترتیب نسبت درستنمایی بهتر از سیستم‌های افزونه k از n کارکرده است.

ملاحظه ۳.۳. برای هر سیستم k از n، $k \in \{۱, \ldots, n\}$ همواره $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \geq_{lr} T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$.

اثبات. با توجه به میسرا و همکاران [۱۴] تابع دگرشکلی برای سیستم k از n، به صورت زیر می‌باشد

$$h(p) = \frac{n!}{(n - k)!(k - ۱)!} \int_{۱-p}^{۱} u^{n-k}(۱ - u)^{k-۱} du, \quad p \in (۰, ۱).$$

لذا

$$h'(p) = \frac{n!}{(n - k)!(k - ۱)!}(۱ - p)^{n-k} p^{k-۱}$$

بنابراین برای $q \in (۰, ۱)$،

$$\psi(p) = \frac{(p - ۱)h'(p(۲ - p))}{(p - q)h'\left(\frac{p}{q}\left(۲ - \frac{p}{q}\right)\right)} = \left(\frac{q(۱ - p)}{q - p}\right)^{۲(n-k)} \left(\frac{q^۲(۲ - p)}{۲q - p}\right)^{k-۱} \left(\frac{p - ۱}{p - q}\right)$$

با توجه به اینکه

$$\begin{aligned}\psi'(p) &= \frac{\left(\frac{p-۲}{p-۲q}\right)^k \left(\frac{p-۱}{p-q}\right)^{۲(n-k)} (۱-q)\big(-p^۲ + ۲n(-۲+p)(p-۲q) + ۲q + ۲k(p-۳q+pq)\big)}{(p-۲)^۲(p-q)^۲} \\ &= A(p)\frac{(۱-q)\Big(۲(۲n-k)\Big(q(۱-p)+(q-p)\Big) + (۲q-p^۲) + ۲(np^۲-kp)\Big)}{(p-۲)^۲(p-q)^۲} \\ &\geq ۰.\end{aligned}$$

که در آن $A(p) = \left(\frac{p-۲}{p-۲q}\right)^k \left(\frac{p-۱}{p-q}\right)^{۲(n-k)} \geq ۰$.

لذا $\psi(p)$ تابع صعودی نسبت به $p \in (۰, q)$ است. در نتیجه با توجه به قضیه (۱.۳)، نتیجه برقرار می‌شود یعنی $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \geq_{lr} T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$. □

در قضیه بعد، شرایطی معادل که طول عمر سیستم منسجم افزونه کارکرده بیشتر (کمتر) از طول عمر سیستم منسجم افزونه با مؤلفه‌های کار کرده از نظر ترتیب نرخ خطر بدست می آوریم.

قضیه ۴.۳. برای $t > ۰$، $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \leq_{hr} (\geq_{hr}) T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر برای $q \in (۰, ۱)$ یکی از شروط زیر برقرار باشد

۱. برای هر $p \in (۰, q)$ داشته باشیم
$$\frac{(۱-p)h'(p(۲-p))}{h(p(۲-p))} \geq (\leq) \frac{(q-p)h'\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)}{q^۳ h\left(\frac{q}{p}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)}$$

۲. $\dfrac{h(p(۲-p))}{h\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)}$ تابع صعودی (نزولی) از $p \in (۰, ۱)$ باشد.

اثبات. قسمت اول. $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \leq_{hr} (\geq_{hr}) T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in (۰, \infty)$ داشته باشیم $r_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x) \geq (\leq) r_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x)$. بنابراین

$$\frac{h'_{۱|۲}(\bar{F}(x+t))h'(h_{۱|۲}(\bar{F}(x+t)))}{h(h_{۱|۲}(\bar{F}(x+t)))} \geq (\leq) \frac{h'_{۱|۲}\left(\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}\right) h'\left(h_{۱|۲}\left(\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}\right)\right)}{\bar{F}(t) h\left(h_{۱|۲}\left(\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}\right)\right)}$$

که معادل است با

$$\frac{(۱-p)h'(p(۲-p))}{h(p(۲-p))} \geq (\leq) \frac{h'\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)(q-p)}{q^۳ h\left(\frac{q}{p}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)}$$

لذا $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \leq_{hr} (\geq_{hr}) T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر برای هر $p \in (۰, q)$، که $۰ < p < q < ۱$ داشته باشیم

$$\frac{(۱-p)h'(p(۲-p))}{h(p(۲-p))} \geq (\leq) \frac{h'\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)(q-p)}{q^۳ h\left(\frac{q}{p}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)}.$$

قسمت دوم. باتوجه به قضیه ۲.۴ قسمت ii ناوارو و همکاران [۱۵]، $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \leq_{hr} (\geq_{hr}) T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر $\dfrac{h_{T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(p)}{h_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(p)}$ تابع صعودی (نزولی) نسبت به $p \in (۰, ۱)$ باشد. به طور معادل $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \leq_{hr} (\geq_{hr}) T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر $\dfrac{h(p(۲-p))}{h\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)}$ تابع صعودی (نزولی) نسبت به $p \in (۰, ۱)$ باشد. □

تذکر ۵.۳. لازم به ذکر است شرایط قضیه (۱.۳) شرایط قضیه (۴.۳) را نتیجه می‌دهد. به عنوان مثال شرط ۱ از قضیه (۱.۳) شرط ۲ از قضیه (۴.۳) را نتیجه می‌دهد.

اثبات. شرط ۱ قضیه (۱.۳) معادل است با اینکه نسبت توابع چگالی دو سیستم یعنی،

$$\frac{f_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x)}{f_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x)}$$

تابعی نزولی (صعودی) نسبت به $x \in (۰, +\infty)$ باشد. یا به عبارتی برای $x_۱ \leq x_۲$،

$$f_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x_۱)f_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x_۲) \geq (\leq) f_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x_۲)f_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x_۱)$$
$$\int_{t=x_۱}^{x_۲}\int_{t'=x_۲}^{\infty} f_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(t)f_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(t')dt'dt \geq (\leq) \int_{t=x_۲}^{\infty}\int_{t'=x_۱}^{x_۲} f_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(t')f_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(t)dt'dt$$
$$\int_{x_۱}^{\infty} f_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(t)dt\int_{x_۲}^{\infty} f_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(t')dt' \geq (\leq) \int_{x_۱}^{\infty} f_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(t)dt\int_{x_۲}^{\infty} f_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(t')dt'$$
$$\bar{F}_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x_۱)\bar{F}_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x_۲) \geq (\leq) \bar{F}_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x_۱)\bar{F}_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x_۲)$$

نامساوی آخر از رابطه‌ی فوق معادل با این است که $\frac{\bar{F}_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x)}{\bar{F}_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x)}$ تابعی نزولی (صعودی) نسبت به $x \in (۰, \infty)$ باشد. یا به طور معادل $\frac{h(p(۲-p))}{h\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)}$ تابعی نزولی (صعودی) نسبت به $p \in (۰, ۱)$ باشد. □

در قضیه بعد، شرایطی معادل که طول عمر سیستم منسجم افزونه کارکرده بیشتر (کمتر) از طول عمر سیستم منسجم افزونه با مؤلفه‌های کار کرده از نظر ترتیب نرخ خطر معکوس بدست می آوریم.

قضیه ۶.۳. برای $t > ۰$، $(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t \leq_{rh} (\geq_{rh}) T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر برای $q \in (۰, ۱)$ یکی از شرایط زیر برقرار باشد

۱. برای هر $p \in (۰, q)$ و $p < q$،
$$\frac{(۱-p)h'(p(۲-p))}{h(q(۲-q))-h(p(۲-p))} \leq (\geq) \frac{(q-p)h'\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)}{q^۳\left(۱-h\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)\right)}،$$

۲. $\frac{h(q(۲-q))-h(p(۲-p))}{۱-h\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)}$ تابع صعودی (نزولی) نسبت به $p \in (۰, ۱)$ باشد.

اثبات. قسمت اول. $(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t \leq_{rh} (\geq_{rh}) T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر برای $x \in (۰, \infty)$ داشته باشیم $\bar{r}_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x) \leq (\geq) \bar{r}_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x)$. بنابراین

$$\frac{h'_{۱|۲}(\bar{F}(x+t))h'(h_{۱|۲}(\bar{F}(x+t)))}{h(h_{۱|۲}(\bar{F}(t)))-h(h_{۱|۲}(\bar{F}(x+t)))} \leq (\geq) \frac{h'_{۱|۲}\left(\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}\right)h'\left(h_{۱|۲}\left(\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}\right)\right)}{\bar{F}(t)(۱-h\left(h_{۱|۲}\left(\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}\right)\right))}$$

که معادل است با:

$$\frac{(۱-p)h'(p(۲-p))}{h(q(۲-q))-h(p(۲-p))} \leq (\geq) \frac{(q-p)h'\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)}{q^۳\left(۱-h\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)\right)}$$

لذا $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \leq_{rh} (\geq_{rh}) T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر برای هر $p \in (۰, q)$، که $۰ < p < q < ۱$ داشته باشیم

$$\frac{(۱-p)h'(p(۲-p))}{h(q(۲-q)) - h(p(۲-p))} \leq (\geq) \frac{(q-p)h'\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)}{q^۳\left(۱-h\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)\right)}$$

قسمت دوم. باتوجه به قضیه ۲.۴ قسمت iii ناوارو و همکاران [۱۵]، $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \leq_{rh} (\geq_{rh}) T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر $\dfrac{۱-h_{T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(p)}{۱-h_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(p)}$ تابع صعودی (نزولی) نسبت به $p \in (۰, ۱)$ باشد. به طور معادل

$$(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \leq_{hr} (\geq_{hr}) T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$$

اگر و تنها اگر $\dfrac{h(q(۲-q)) - h(p(۲-p))}{۱-h\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)}$ تابع صعودی (نزولی) نسبت به $p \in (۰, ۱)$ باشد. □

قضیه قبل نشان می‌دهد که مدت زمان سپری شده از پایان عمر سیستم کارکرده (با مؤلفه‌های نو) کمتر (بیشتر) از مدت زمان سپری شده از پایان عمر سیستم با مؤلفه‌های کارکرده است.

در قضیه بعد، شرطی معادل که تصادفی طول عمر سیستم منسجم افزونه کارکرده بیشتر (کمتر) از طول عمر سیستم منسجم افزونه با مؤلفه‌های کار کرده از نظر ترتیب تصادفی معمولی بدست می آوریم.

قضیه ۷.۳. برای $t > ۰$، $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \leq_{st} (\geq_{st}) T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر شرط زیر برقرار باشد

$$\frac{h\big(p(۲-p)\big)}{h\big(q(۲-q)\big)} \leq (\geq) h\Big(\frac{p}{q}\big(۲-\frac{p}{q}\big)\Big) \quad \forall p \in (۰, q), ۰ < p < q < ۱$$

اثبات. $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \leq_{st} (\geq_{st}) T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر $\bar{F}_{(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t}(x) \leq (\geq) \bar{F}_{T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)}(x)$. بنابراین $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \leq_{st} (\geq_{st}) T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$ اگر و تنها اگر برای $p \in (۰, q)$ و $۰ < p < q < ۱$، رابطه زیر برقرار باشد

$\dfrac{h\big(p(۲-p)\big)}{h\big(q(۲-q)\big)} \leq (\geq) h\Big(\dfrac{p}{q}\big(۲-\dfrac{p}{q}\big)\Big)$. □

مثال ۸.۳. سیستم $T(\mathbf{X}) = \min(X_۱, X_۲, X_۳)$ با مؤلفه‌های طول عمر وابسته و هم توزیع $X_۱, X_۲, X_۳$ دارای مفصل بقا کلایتون–اکاس با ضابطه زیر را در نظر بگیرید.

$$K(u_۱, u_۲, u_۳) = \Big(\sum_{i=۱}^{۳} u_i^{۱-\theta} - ۲\Big)^{\frac{۱}{۱-\theta}}, \quad \theta \in (۱, \infty).$$

که در آن $۰ < u_i < ۱$، $i = ۱, ۲, ۳$ را در نظر بگیرید. تابع قابلیت اعتماد سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\bar{F}_T(t) &= \bar{F}_{\{۱,۲,۳\}}(t)\\ &= K(\bar{F}(t), \bar{F}(t), \bar{F}(t))\\ &= h(\bar{F}(t))\end{aligned}$$

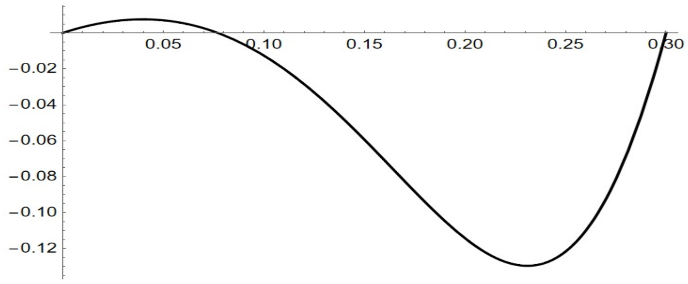
که در آن $h(u) = K(u, u, u)$. با فرض $\theta = ۲$ داریم

$$h_۲(u) = \frac{u}{۳-۲u}$$

برای $q = ۰/۳$ داریم

$$\psi_۲(p) = \frac{h_۲\big(p(۲-p)\big)}{h_۲\big(q(۲-q)\big)} - h_۲\Big(\frac{p}{q}\big(۲-\frac{p}{q}\big)\Big)$$

با توجه به نمودار تابع $\psi_۲(p)$ در برابر p و بنا به قضیه (۷.۳) نتیجه می‌گیریم که هیچ کدام از سیستم‌ها بر دیگری ارجحیت ندارد. یعنی $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \not\leq_{st} T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$ و $(T(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}))_t \not\geq_{st} T(\mathbf{X}_t \vee \mathbf{Y}_t)$.



شکل ۲: نمودار $\psi_۲(p)$ دربرابر p.

تذکر ۹.۳. مثال فوق قسمت (آ) نشان می‌دهد سیستم‌های منسجمی وجود دارد که سیستم‌های متناظر با $(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t$ و $T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)$ براساس هیچ یک از ترتیب‌های معرفی شده در تعریف (۱.۲) دارای طول عمر بیشتر (کمتر) نیستند.

مثال ۱۰.۳. سیستم منسجم $T(\mathbf{X})=\min(X_۱,\max\left(X_۲,X_۳\right))$ با مؤلفه‌های طول عمر وابسته و هم توزیع $X_۱,X_۲,X_۳$ را در نظر بگیرید. تابع قابلیت اعتماد سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\bar{F}_T(t)&=\bar{F}_{\{۱,۲\}}(t)+\bar{F}_{\{۱,۳\}}(t)-\bar{F}_{\{۱,۲,۳\}}(t)\\&=\bar{F}(t,t,۰)+\bar{F}(t,۰,t)-\bar{F}(t,t,t)\\&=K(\bar{F}(t),\bar{F}(t),۱)+K(\bar{F}(t),۱,\bar{F}(t))-K(\bar{F}(t),\bar{F}(t),\bar{F}(t))\\&=h(\bar{F}(t))\end{aligned}$$

که در آن $h(u)=K(u,u,۱)+K(u,۱,u)-K(u,u,u)$.

آ. فرض کنید مؤلفه‌های طول عمر دارای مفصل بقا کلایتون اکاس با $\theta=۲$ باشند. داریم

$$h_۳(u)=\frac{۲u}{۲-u}-\frac{u}{۳-۲u}.$$

با فرض $q=۰/۴$

$$\psi_۳(p)=\frac{h_۳\big(p(۲-p)\big)}{h_۳\big(q(۲-q)\big)}-h_۳\big(\frac{p}{q}(۲-\frac{p}{q})\big),\quad ۰<p<۰/۴$$

با توجه به نمودار تابع $\psi_۳(p)$ در برابر p (شکل ۳ قسمت آ.)بنا به قضیه (۷.۳) نتیجه می‌گیریم که

$$(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t\leq_{st}T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t).$$

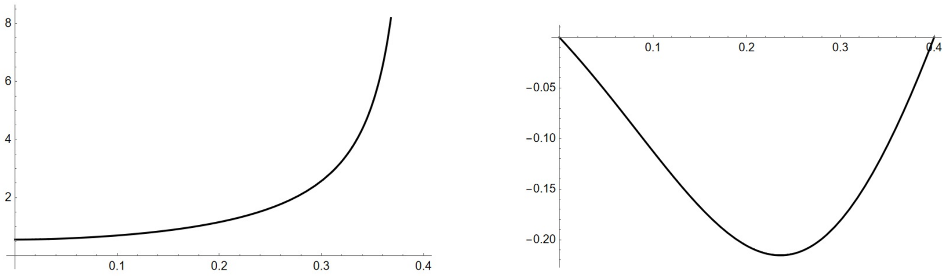
ب. اگر مؤلفه‌های طول عمر دارای مفصل علی میکائیل حق با $\theta=۰/۲$ باشند. در این صورت

$$h_۴(u)=۲u^۲-\frac{u^۳}{۱-۰/۲(۱-u)^۳}$$

با فرض $q=۰/۴$

$$\psi_۴(p)=\frac{h_۴\big(q(۲-q)\big)-h_۴(p(۲-p))}{۱-h\left(\frac{p}{q}\left(۲-\frac{p}{q}\right)\right)}$$

باتوجه به شکل ۳، نمودار (ب) تابع $\psi_۴(p)$ تابعی صعودی نسبت به $p\in(۰,۱)$ می‌باشد. لذا بنا به قضیه (۶.۳) قسمت ۲ $(T(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}))_t\leq_{rh}T(\mathbf{X}_t\vee\mathbf{Y}_t)$.



(آ) نمودار $\psi_۳(p)$ در برابر p.

(ب) نمودار $\psi_۴(p)$ در برابر p.

شکل ۳

۴ نتیجه گیری

مقایسه تصادفی سیستم منسجم افزونه کارکرده و سیستم منسجم افزونه با مؤلفه‌های کارکرده انجام گرفته است. در این مقاله فرض کرده ایم مؤلفه‌های سیستم‌ها وابسته باشند. استفاده از مؤلفه‌های افزونه منجر به بهبود عملکرد قابلیت اعتماد سیستم‌های مهندسی می‌شود. در این مقاله از مؤلفه‌های کارکرده و سالم به عنوان مؤلفه‌های افزونه استفاده کرده ایم. مقایسه سیستم منسجم افزونه کارکرده و سیستم منسجم افزونه با مؤلفه‌های کارکرده به طراحان سیستم‌های مهندسی امکان ساخت سیستم قابل اعتمادتر از مؤلفه‌های خوب یک سیستم از کارافتاده را می‌دهد. همچنین استفاده مجدد از مؤلفه‌های کارکرده و سالم در ساختار سیستم ها که در این مقاله بررسی شده است از نظر صرفه اقتصادی مورد توجه مهندسین قابلیت اعتماد قرار می‌گیرد.

۵ تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادهای داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده و ارائه بهتر مقاله شد کمال قدردانی و تشکر را دارند.

فهرست منابع

[۱] امینی سرشت، ا. برمال‌زن،ق (۱۴۰۰) مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های موازی و سری متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده، مجله علوم آماری،۱۵،۲۶ – ۱

[۲] برمال زن،ق. آیت، س.م. و اکرمی، ع. (۱۳۹۹) مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های لوماکس با مفصل ارشمیدسی، مجله مدل سازی پیشرفته ریاضی، ۱۰،۱۹۵ – ۱۷۲

[3] Barlow RE, Proschan F (1981) Statistical theory of reliability and life testing. Probability models. New York: Holt, Rinehart and winston

[4] Belzunce F, Martinez-Puertas H, Ruiz JM (2011) On optimal allocation of redundant components for series and parallel systems of two dependent components. J STAT PLAN INFER 141, 3094- 3104

[5] Belzunce F, Martinez-Puertas H, Ruiz JM (2013) On allocation of redundant components for systems with dependent components. Eur J Oper Res 230, 573- 580

[6] Durante F, Sempi C (2015) Principles of copula theory. CRC/Chapman & Hall, London

[7] Fang R, Li X (2017) Stochastic comparisons of used coherent system and new system of used components for non-identically distributed and dependent components. Nav Res Logist (Nrl) 63, 146-151

[8] Glaser, R. E. (2001). Bathtub and related failure rate characterizations. Journal of American Statistical Association, 75, 667–672.

[9] Goodarzi, F., Amini, M., Borzadaran, G.R.M. (2017). Characterizations of continous distributions through inequalities involving the expected values of selected functions. Applications of Mathematics 62:493-507.

[10] Gupta N, Misra N and Kumar S (2015) Stochastic comparisons of residual lifetimes and inactivity times of coherent systems with dependent identically distributed components. Eur. J. Oper. Res 240, 425-430

[11] Hazra NK, Nanda AK (2014) Component redundancy versus system redundancy in different stochastic orderings. IEEE T RELIAB 63, 567-582.

[12] Hazra NK, Nanda AK (2016) Stochastic comparisons between used systems and systems made by used components. IEEE Transactions on reliability 65:2, 751-762

[13] Hazra NK, Nanda AK (2017) General standby allocation in series and parallel systems. COMMUN STAT-THEOR M 46, 9842-9858

[14] Misra N, Dhariyal ID, Gupta N (2009) Optimal allocation of active spares in series systems and comparision of component and system redundancies. J Appl Probab 46, 19-34

[15] Navarro J, Del Aguila Y, Sordo MA, Suarez-Llorens A (2013) Stochastic ordering properties for systems with dependent identically distributed components. APPL STOCH MODEL BUS 29, 264-278

[16] Nelsen BR (2006) An introduction to copula. New York: Springer

[17] Shaked M, Shanthikumar JG (2007) Stochastic orders. Springer, New York

[18] Sklar, M. (1959). Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 8, 229-231.

[19] Zhao P, Chan PS, Li L, Ng HKT (2013a) On allocation of redundancies in two-component series systems. OPER RES LETT 41, 690-693

[20] Zhao P, Chan PS, Li L, Ng HKT (2013b) Allocation of two redundancies in two-component series systems. Nav Res Logist (Nrl) 588–598

Stochastic comparisons between used redundant systems and redundant systems with used components

Paniz Samadi , Majid Rezaei † , Mohammad Khanjari Sadegh

Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran

Communicated by: Gholam Ali Parham

Received: 2021/3/26 Accepted: 2021/11/19

Abstract: One of the important aims in reliability engineering is to improve the performance and increase the reliability of systems. Increasing the reliability of a system is possible by allocating redundancies components in the structure of the system. In this paper, we use the worked and functioning spares components in the structure of coherent systems to increase its performance. The stochastic comparisons between used redundant coherent systems and redundant coherent systems with used components done. A comparison of used redundant systems and redundant system with used components will the design engineers to build more reliable system out of the good components of a failed system. Using the distortion function, we obtain a mixture representation for the lifetime of the mentioned systems. Based on different random stochastic orders, we provide conditions on reliability functions that used redundant coherent systems work better (worse) than redundant coherent systems with used components.

Keywords: Redundancy, Distortion function, Copula function, Coherent system, Residual lifetime.

†Corresponding author.
mjrezaei: mjrezaei@birjand.ac.ir .