مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۰
جلد ۱۵، شماره ۱، ص ۶۱ – ۸۰
DOI: 10.29252/jss.15.1.79
مقاله پژوهشی

مطالعه‌ای بر هم‌ارزی قابلیت اعتماد در روش‌های کاهش و افزونگی

مجید چهکندی، جلال اطمینان و محمد خنجری صادق

گروه آمار، دانشگاه بیرجند

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۸/۰۲   تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۳۹۹/۱۱/۰۹

چکیده: افزونگی و کاهش دو روش اصلی برای بهبود قابلیت اعتماد سیستم هستند. در روش افزونگی، قابلیت اعتماد سیستم با افزودن مولفه‌های اضافی به برخی از مولفه‌های اصلی سیستم بهبود می‌یابد. در روش کاهش قابلیت اعتماد سیستم با کاهش نرخ شکست همه یا برخی از مولفه‌های سیستم افزایش می‌یابد. این مقاله به بررسی هم‌ارزی بین روش‌های افزونگی و کاهش براساس مفهوم عامل‌های هم‌ارزی قابلیت اعتماد می‌پردازد. یک فرمول بسته برای محاسبه عامل هم‌ارزی بقاء به‌دست می‌آید. این عامل، میزان کاهش در نرخ خطر مولفه(های) یک سیستم برای اینکه قابلیت اعتماد آن برابر با زمانی باشد که به یکی از روش‌های افزونگی بهبود یافته است را مشخص می‌کند. تاثیر اندازه اهمیت مولفه نیز در نتایج به‌دست آمده، مورد مطالعه قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: اندازه اهمیت مولفه، روش افزونگی، روش کاهش، عامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد.

۱ مقدمه

با توجه به هزینه گزاف خرابی و از کارافتادن برخی از سیستم‌ها، ارتقاء عملکرد سیستم‌های مهندسی همواره از مباحث مورد علاقه در متون قابلیت اعتماد بوده‌است. افزونگی[1] و کاهش[2] از جمله روش‌های عمده

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: مجید چهکندی، mchahkandi@birjand.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N05.

[1]Redundancy
[2]Reduction

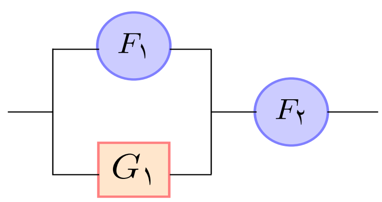
بهبود قابلیت اعتماد سیستم‌های مهندسی است. در روش افزونگی، با افزودن مولفه‌های اضافی به سیستم اصلی، قابلیت اعتماد سیستم بهبود می‌یابد. این مولفه‌ها می‌توانند به صورت فعال[1] یا آماده به‌کار[2] به سیستم اضافه شوند. در افزونگی فعال، مولفه‌های اضافی به صورت موازی با مولفه‌های اصلی سیستم قرار می‌گیرند و شروع عملکرد آن‌ها همزمان با مولفه‌های اصلی است. لذا طول عمر سیستم بر اساس ماکسیمم طول عمر مولفه‌های اصلی و افزونه‌هایشان تعیین می‌شود. در افزونگی آماده به‌کار، مولفه‌های افزونه تنها پس از شکست مولفه‌های اصلی شروع به کار می‌کنند. افزونگی آماده به‌کار به سه صورت امکان‌پذیر است. اگر نرخ خرابی مولفه افزونه در حالت آماده به‌کار با نرخ خرابی آن وقتی به‌صورت افزونگی فعال به‌کار رفته برابر باشد، آن‌گاه به آن یک مولفه افزونه آماده به‌کار داغ[3] گویند. اگر نرخ خرابی آن کمتر از حالتی باشد که به‌صورت فعال به‌کار رفته، به آن آماده به‌کار گرم[4] گویند و چنانچه نرخ خرابی مولفه افزونه در حالت آماده به‌کار برابر صفر باشد، افزونگی از نوع آماده به‌کار سرد[5] است. در واقع مولفه آماده به‌کار سرد تا زمانی که در حالت انتظار به سر می‌برد، خراب نمی‌شود. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد افزونگی فعال و آماده به‌کار به بارلو و پروشان (۱۹۷۵)، چا و همکاران (۲۰۰۸)، ناندا و حضرا (۲۰۱۳)، اریلماز (۲۰۱۴)، اریلماز و ارکان (۲۰۱۸) و جدی و دوست‌پرست (۲۰۲۰) مراجعه شود.

استفاده از مولفه‌های افزونه محدودیت‌هایی از جمله فضا و هزینه را به دنبال دارد. در این گونه از موارد یک راه دیگر برای ارتقاء عملکرد سیستم استفاده از روش کاهش است. در روش کاهش، قابلیت اعتماد سیستم از طریق جایگزین کردن مولفه‌های اصلی سیستم با مولفه‌هایی با کیفیت بالاتر و به عبارتی با نرخ شکست کمتر از مولفه‌های اصلی سیستم، افزایش می‌یابد. در این روش، با کاهش نرخ شکست زیرمجموعه‌ای دلخواه از مولفه‌های سیستم می‌توان تابع قابلیت اعتماد سیستم، میانگین زمان تا خرابی سیستم[6] یا هر یک از شاخص‌های ارزیابی عملکرد سیستم را به مقدار مورد نظر رساند. میزان کاهش در نرخ خطر زیر مجموعه‌ای از مولفه‌های سیستم برای اینکه مشخصه‌ای از قابلیت اعتماد آن، مانند تابع قابلیت اعتماد یا میانگین طول عمر، برابر با مشخصه‌ی متناظر از سیستمی دیگر شود تحت عنوان عامل‌های هم‌ارزی قابلیت اعتماد شناخته می‌شود. این مفهوم نخستین بار توسط راد (a ۱۹۹۳)؛ راد (b ۱۹۹۳) معرفی شد. وی براساس معیارهای میانگین طول عمر و تابع بقاء عوامل هم‌ارزی برای سیستم‌های یک و

[1] Active
[2] Standby
[3] Hot Standby
[4] Warm Standby
[5] Cold Standby
[6] Mean time to failure

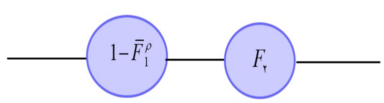
دو مولفه‌ای سری و موازی را مورد مطالعه قرار داد. محاسبه‌ی عوامل هم‌ارزی برای سیستم‌های پیچیده‌تر از جمله سیستم‌های سری-موازی، موازی-سری و سیستم پل نیز به ترتیب توسط سرهان (۲۰۰۲) و سرهان و همکاران (۲۰۰۸) مورد توجه قرار گرفت. برای مطالعه بیشتر در این زمینه القمدی (۲۰۱۵)، مصطفی و همکاران (۲۰۱۶) و مصطفی (۲۰۲۰) توصیه می‌شود. چنانچه سیستم‌ها قابل تعمیر باشند این هم‌ارزی معمولا براساس شاخص در دسترس بودن [1] مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. از جمله محققینی که به مطالعه عامل‌های هم‌ارزی در سیستم‌های تعمیرپذیر پرداخته‌اند می توان به سرهان و مصطفی (۲۰۱۳)، هو و همکاران (۲۰۱۶) و الغازو و همکاران (۲۰۲۰) اشاره نمود. برای آشنایی با مفاهیم تعمیر و نگهداری به صفائی و احمدی (۱۳۹۴)، کامرانفر و همکاران (۱۳۹۹) و منابع داخل آن‌ها مراجعه شود.

برای توضیح بیشتر در ارتباط با مفهوم عامل هم‌ارزی، سیستم سری دو مولفه‌ای با توابع توزیع طول عمر $F_1(.)$ و $F_2(.)$ که مستقل از هم هستند را در نظر بگیرید. تابع قابلیت اعتماد طول عمر سیستم، T، به‌صورت $\bar{F}_T(t) = \bar{F}_1(t) \times \bar{F}_2(t)$ به‌دست می‌آید. اگر یک مولفه افزونه از نوع فعال با توزیع طول عمر $G_1(.)$ برای مولفه شماره یک در نظر بگیریم (شکل ۱)، تابع قابلیت اعتماد طول عمر سیستم بهبود یافته، T'، عبارت است از $\bar{F}_{T'}(t) = \bar{F}_2(t) \times [1 - F_1(t) \times G_1(t)]$. اگر به روش کاهش،



شکل ۱. سیستم بهبود یافته به روش افزونگی

نرخ شکست مولفه شماره ۱ را از $r_1(t)$ به $r''_1(t) = \rho r_1(t)$ برای $\rho \in [0, 1]$ کاهش دهیم، قابلیت اعتماد مولفه ۱ و در نتیجه قابلیت اعتماد سیستم بهبود می‌یابد (شکل ۲). فرض کنید مولفه‌های ۱ و ۲

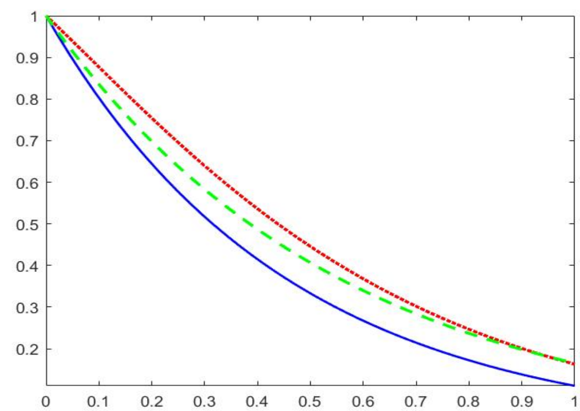


شکل ۲. سیستم بهبود یافته به روش کاهش

به‌ترتیب دارای توزیع نمایی با پارامترهای ۱ و ۱/۲ و مولفه افزونه نیز دارای توزیع نمایی با پارامتر ۱/۳ باشد

[1]Availability

و در روش کاهش، ضریب کاهش نرخ شکست را $\rho =$ ۰/۶ در نظر بگیرید. نمودار توابع بقاء سیستم اصلی، سیستم بهبود یافته به روش افزونگی و سیستم ارتقا یافته به روش کاهش در شکل ۳ ارائه شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود توابع قابلیت اعتماد به روش‌های کاهش و افزونگی همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. این همان لحظه‌ای است که روش کاهش و روش افزونگی فعال با عامل هم‌ارزی ۰/۶ $= \rho$ معادل می‌شوند. در تحقیقات گذشته، عامل‌های هم‌ارزی قابلیت اعتماد معمولاً به کمک روش‌های عددی



شکل ۳. توابع بقاء سیستم اصلی (خط)، سیستم ارتقا یافته به روش افزونگی فعال (نقطه‌چین) و سیستم ارتقا یافته به روش کاهش (خط-چین)

برای برخی از سیستم‌های خاص از جمله سری- موازی و موازی- سری به‌دست آمده و فرمول بسته‌ای برای محاسبه عامل‌های هم‌ارزی ارائه نشده است. در این مقاله با فرض اینکه روش کاهش تنها بر روی یک مولفه از یک سیستم منسجم دلخواه صورت پذیرد، فرمول بسته‌ای برای عامل هم‌ارزی بر اساس معیار تابع قابلیت اعتماد ارائه می‌شود. ابتدا فرض می‌شود که تنها ساختار سیستم مشخص است و اطلاعی درباره قابلیت اعتماد مولفه‌های آن در دسترس نیست. سپس سیستمی که قابلیت اعتماد مولفه‌های آن را در یک زمان مشخص داریم در نظر گرفته می‌شود و درنهایت به محاسبه عامل هم‌ارزی برای سیستمی که قابلیت اعتماد مولفه‌های آن به عنوان تابعی از زمان مشخص باشد، پرداخته می‌شود. نشان می‌دهیم اندازه اهمیت مولفه که توسط بیرنبام (۱۹۶۹) معرفی شده نقش مهمی در یافتن عامل‌های هم‌ارزی دارد. همچنین براساس مفهوم عامل‌های هم‌ارزی تعریف جدیدی از اهمیت مولفه‌های سیستم در روش کاهش ارائه می‌شود. در پایان، کاربرد نتایج ارائه شده با ارائه چند مثال توضیح داده می‌شود.

۲ هم‌ارزی در روش کاهش روی یک مولفه

فرض کنید بردارهای $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ و $\boldsymbol{p}(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t))$ به ترتیب بیانگر قابلیت اعتماد و وضعیت عملکرد مولفه‌های سیستم، $\varphi(.)$ تابع ساختار و $h(\boldsymbol{p})$ تابع قابلیت اعتماد سیستم باشند. همین‌طور $(1_i, \mathbf{x}(t)) = (x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), 1, x_{i+1}(t), \ldots, x_n(t))$ و $(1_i, \boldsymbol{p}(t)) = (p_1(t), \ldots, p_{i-1}(t), 1, p_{i+1}(t), \ldots, p_n(t))$ را در نظر بگیرید. به طور مشابه $(0_i, \mathbf{x}(t))$ و $(0_i, \boldsymbol{p}(t))$ نیز با جایگزینی صفر به جای یک در موقعیت iام در بردارهای متناظر تعریف می‌شوند. در حالت کلی نیز منظور از $(p_i'(t), \boldsymbol{p}(t))$ بردار قابلیت اعتماد مولفه‌های سیستمی است که قابلیت اعتماد مولفه iام آن از p_i به p_i' بهبود یافته است. برای سادگی، نمادهای فوق را بدون t به‌کار خواهیم برد. سیستم منسجمی با قابلیت اعتماد $h(\boldsymbol{p})$ و مولفه‌های مستقل در نظر بگیرید. برای آشنایی با مفاهیم اولیه قابلیت اعتماد از جمله تابع ساختار و سیستم منسجم اسدی (۱۳۹۲) پیشنهاد می‌گردد. فرض کنید به یکی از روش‌های افزونگی قابلیت اعتماد سیستم به عددی مانند α که $h(\boldsymbol{p}) \leq \alpha \leq 1$ افزایش یافته است. برای یافتن سیستمی هم‌ارز با این سیستم در روش کاهش براساس معیار تابع بقاء، در واقع به دنبال یافتن ضریبی مانند $0 \leq \rho_{\{D\}} \leq 1$ هستیم که با اعمال آن روی نرخ خطر زیرمجموعه‌ای مانند D از مولفه‌های سیستم اصلی، تابع بقاء سیستم به روش کاهش برابر مقدار α شود.

۲.۱ سیستم با ساختار معلوم

در حالتی که اطلاعاتی درباره قابلیت اعتماد مولفه‌های سیستم در دسترس نباشد بردار $\boldsymbol{p}$ به صورت $\boldsymbol{p} = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ در نظر گرفته می‌شود. در این حالت با توجه به بیرنبام (۱۹۶۹) معیار اهمیت ساختاری [1] بیرنبام عبارت است از: $I_\varphi(i) = h(1_i, \boldsymbol{p}) - h(0_i, \boldsymbol{p})$. فرض کنید به روش کاهش، نرخ خطر مولفه iام سیستم، $r_i(t)$، توسط ضریب $0 \leq \rho_i \leq 1$ کاهش یابد، یعنی $r_i'(t) = \rho_i r_i(t)$. با توجه به رابطه بین تابع قابلیت اعتماد و تابع نرخ شکست، قابلیت اعتماد مولفه iام از p_i به $p_i' = p_i^{\rho_i} = (\frac{1}{2})^{\rho_i}$ افزایش می‌یابد. در این‌صورت تابع قابلیت اعتماد سیستم بهبود یافته با $h^R(p_i', \boldsymbol{p})$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۱. سیستم منسجمی را با ساختار مشخص در نظر بگیرید که اطلاعی از قابلیت اعتماد مولفه‌های آن در دست نیست. چنانچه بخواهیم با کاهش نرخ خطر مولفه iام سیستم، قابلیت اعتماد سیستم بهبود یافته برابر مقدار مشخص α شود، ρ_i در رابطه $\rho_i = \frac{1}{\ln 2} \times \ln \frac{I_\varphi(i)}{\alpha - h(0_i, \boldsymbol{p})}$ صدق می‌کند.

[1] Structural importance

برهان: با توجه به تجزیه محوری[1] تابع قابلیت اعتماد و تعریف معیار اهمیت ساختاری بیرنبام، داریم

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{p}) &= \frac{۱}{۲}h(۱_i,\boldsymbol{p})+\frac{۱}{۲}h(۰_i,\boldsymbol{p}) \\ &= h(۰_i,\boldsymbol{p})+\frac{۱}{۲}(h(۱_i,\boldsymbol{p})-h(۰_i,\boldsymbol{p})) \\ &= h(۰_i,\boldsymbol{p})+\frac{۱}{۲}I_\varphi(i). \qquad (۱) \end{aligned}$$

به طور مشابه برای سیستمی که قابلیت اعتماد مولفه iام آن به روش کاهش از $p_i=\frac{۱}{۲}$ به $p'_i=(\frac{۱}{۲})^{\rho_i}$ افزایش یافته است نیز رابطه $h^R(p'_i,\boldsymbol{p})=h(۰_i,\boldsymbol{p})+(\frac{۱}{۲})^{\rho_i}I_\varphi(i)$ برقرار است، که با برابر قراردادن آن با α و با توجه به رابطه (۱)، تساوی

$$h^R(p'_i,\boldsymbol{p}) = h(\boldsymbol{p})+[(\frac{۱}{۲})^{\rho_i}-\frac{۱}{۲}]I_\varphi(i)=\alpha,$$

به‌دست می‌آید. بنابراین

$$(\frac{۱}{۲})^{\rho_i} = \frac{۲\alpha-۲h(\boldsymbol{p})+I_\varphi(i)}{۲I_\varphi(i)}=\frac{\alpha-h(۰_i,\boldsymbol{p})}{I_\varphi(i)},$$

که در آن تساوی دوم از تعریف $I_\varphi(i)$ و تجزیه محوری $h(\boldsymbol{p})$ به‌دست می‌آید.

فرع ۱. اگر مولفه iام نسبت به سایر مولفه‌های سیستم سری باشد، آنگاه $\rho_i=\frac{\ln\frac{I_\varphi(i)}{\alpha}}{\ln ۲}$.

فرع ۲. برای اینکه با اعمال روش کاهش روی مولفه iام سیستم بتوانیم قابلیت اعتماد سیستم را به α افزایش دهیم، لازم است که α طوری تعیین شود که $۰\le\rho_i\le۱$، یعنی

$$\frac{I_\varphi(i)}{۲}+h(۰_i,\boldsymbol{p})\le\alpha\le I_\varphi(i)+h(۰_i,\boldsymbol{p}),$$

یا به طور معادل $h(\boldsymbol{p})\le\alpha\le h(\boldsymbol{p})+\frac{I_\varphi(i)}{۲}$.

در واقع فرع ۲ بیان می‌کند که با اعمال روش کاهش روی مولفه iام حداکثر به میزان $\frac{I_\varphi(i)}{۲}$ می‌توان

[1] Pivotal decomposition

قابلیت اعتماد سیستم را بهبود داد. لذا بیشترین میزان افزایش در قابلیت اعتماد سیستم توسط مهم‌ترین مولفه سیستم از نظر معیار اهمیت ساختاری بیرنبام صورت خواهد پذیرفت.

لم ۱. فرض کنید با اعمال روش کاهش (با ضریب ثابت ρ) روی نرخ خطر یک مولفه از سیستم، قابلیت اعتماد سیستم افزایش یابد. در این‌صورت تاثیر مولفه i در افزایش قابلیت اعتماد سیستم بیشتر از مولفه j است هرگاه $I_\varphi(i) \geq I_\varphi(j)$.

برهان: چنانچه اطلاعاتی درباره‌ی قابلیت اعتماد مولفه‌های سیستم در دسترس نباشد، $h^R(p'_i,\boldsymbol{p}) - h^R(p'_j,\boldsymbol{p}) \geq 0$ اگر و تنها اگر $[(\frac{1}{2})^\rho - \frac{1}{2}]I_\varphi(i) \geq [(\frac{1}{2})^\rho - \frac{1}{2}]I_\varphi(j)$ که برهان را کامل می‌کند.

۲.۲ سیستم با مولفه‌هایی با قابلیت اعتماد معلوم در یک زمان ثابت

فرض کنید علاوه بر ساختار سیستم، بردار قابلیت اعتماد مولفه‌های سیستم در یک زمان مشخص به صورت $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ معلوم باشد. در این حالت به کمک تجزیه محوری تابع قابلیت اعتماد داریم

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{p}) &= p_i h(1_i, \boldsymbol{p}) + (1 - p_i) h(0_i, \boldsymbol{p}) \\ &= h(0_i, \boldsymbol{p}) + p_i I_B(i), \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن $I_B(i) = \frac{\partial h(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} = h(1_i, \boldsymbol{p}) - h(0_i, \boldsymbol{p})$، اهمیت بیرنبام مولفه iام است.

تعریف ۱. در بهبود قابلیت اعتماد سیستم به روش کاهش مولفه iام مهم‌تر از مولفه jام است هرگاه $\rho_i \geq \rho_j$، که ρ_i و ρ_j به ترتیب عامل‌های هم‌ارزی قابلیت اعتماد مربوط به مولفه‌های i و j هستند، یعنی $h(p_i^{\rho_i}, \boldsymbol{p}) = h(p_j^{\rho_j}, \boldsymbol{p})$.

قضیه ۲. سیستم منسجمی با مولفه‌های مستقل و هم‌توزیع در نظر بگیرید. فرض کنید ρ_i و ρ_j عوامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد باشند. در این‌صورت مولفه i مهم‌تر از مولفه j در روش کاهش است اگر و تنها اگر از نظر معیار اهمیت بیرنبام، مولفه i مهم‌تر از مولفه j باشد، یعنی $I_B(j) \leq I_B(i)$.

برهان: با توجه به هم توزیعی مولفه‌های سیستم، با استفاده از رابطه (۲) قابلیت اعتماد سیستم بهبود یافته با اعمال روش کاهش روی مولفه iام عبارت است از:

$$h^R(p'_i, \boldsymbol{p}) = h(0_i, \boldsymbol{p}) + p^{\rho_i} I_B(i). \tag{۳}$$

با تفاضل‌گیری از روابط (۲) و (۳) عبارت

$$h(p'_i, \boldsymbol{p}) - h(\boldsymbol{p}) = (p^{\rho_i} - p) I_B(i), \qquad (۴)$$

به‌دست می‌آید. رابطه (۴) میزان افزایش در قابلیت اعتماد سیستم وقتی قابلیت اعتماد مولفه iام افزایش می‌یابد را نشان می‌دهد. بنابراین برای افزایش قابلیت اعتماد سیستم به مقدار α، ضریب کاهش نرخ خطر مولفه iام در رابطه

$$\rho_i \quad = \quad \frac{۱}{\ln p} \times \ln \frac{\alpha - h(۰_i, \boldsymbol{p})}{I_B(i)} = \frac{۱}{\ln p} \times \ln(\frac{\alpha - h(\boldsymbol{p})}{I_B(i)} + p),$$

صدق می‌کند. حال اگر $I_B(j) \leq I_B(i)$، آن‌گاه $\rho_i \geq \rho_j$ که اثبات را کامل می‌کند.

در حالت استقلال و ناهم‌توزیعی مولفه‌ها، عامل هم‌ارزی به صورت $\rho_i = \frac{۱}{\ln p_i} \times \ln(\frac{\alpha - h(\boldsymbol{p})}{I_B(i)} + p_i)$ به‌دست می‌آید و $h(p'_i, \boldsymbol{p}) = h(p'_j, \boldsymbol{p})$ اگر وتنها اگر $(p_j^{\rho_j} - p_j) I_B(j) = (p_i^{\rho_i} - p_i) I_B(i)$. لذا نتیجه قضیه ۲ برای حالتی‌که مولفه‌ها هم‌توزیع نیستند لزوما برقرار نیست. مشابه آنچه در فرع ۲ بیان شد چون $۰ \leq \rho_i \leq ۱$، مقادیر مجاز برای α در نامساوی $p_i I_B(i) \leq \alpha - h(۰_i, \boldsymbol{p}) \leq I_B(i)$ صدق می‌کند. یا به طور معادل با استفاده از رابطه (۲) داریم

$$h(\boldsymbol{p}) \leq \alpha \leq h(\boldsymbol{p}) + (۱ - p_i) I_B(i) = h(۱_i, \boldsymbol{p}). \qquad (۵)$$

یعنی وقتی قابلیت اعتماد مولفه iام معلوم باشد، حداکثر میزان افزایش در قابلیت اعتماد سیستم چنانچه روش کاهش روی مولفه iام اعمال شود برابر $(۱ - p_i) I_B(i)$ است. بر اساس رابطه (۴) این میزان افزایش زمانی رخ می‌دهد که مولفه iام با یک مولفه با نرخ شکست صفر جایگزین شود. بنابراین اگر مولفه‌های سیستم مستقل و هم توزیع باشند، مولفه‌ای با بیشترین اندازه اهمیت بیرنبام، مناسب‌ترین مولفه برای اعمال روش کاهش خواهد بود. اگر مولفه‌ها هم‌توزیع نباشند آنگاه بیشترین مقدار افزایش در قابلیت اعتماد سیستم لزوما توسط مولفه‌ای نیست که بیشترین اهمیت را دارد، بلکه مولفه‌ای با شماره i^* مناسب‌ترین گزینه است، که i^* در رابطه $(۱ - p_{i^*}) I_B(i^*) = \max_{۱ \leq i \leq n} \{(۱ - p_i) I_B(i)\}$ صدق می‌کند. در ادامه نماد $\rho_{\{D\}}^{B_{\{E\}}}$ عامل هم‌ارزی وقتی روش کاهش روی زیرمجموعه D از مولفه‌های سیستم و روش افزونگی B ($B = A$ افزونگی فعال و $B = C$ افزونگی آماده به‌کار سرد را نشان می‌دهد)، روی زیر مجموعه E از مولفه‌های

سیستم صورت می‌پذیرد را نشان می‌دهد. وقتی مجموعه‌های $D = \{j\}$ و $E = \{i\}$ تک عضوی باشند، برای سادگی عامل هم‌ارزی روش کاهش و روش افزونگی B به‌صورت $\rho_j^{B_i}$ نمایش داده می‌شود. یکی از معایب معیار اهمیت بیرنبام مولفه iام عدم وابستگی آن به قابلیت اعتماد مولفه است. بر این اساس، شن و زی (۱۹۸۹) تعمیمی از معیار اهمیت بیرنبام مولفه iام را به صورت $I_{SX}(i) = (p_i' - p_i)I_B(i)$ ارائه دادند.

قضیه ۳. سیستم منسجمی با تابع قابلیت اعتماد $h(\boldsymbol{p})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید به یکی از روش‌های افزونگی روی مولفه iام، $h(\boldsymbol{p})$ به $h^B(p_i', \boldsymbol{p})$ افزایش یافته‌است. اگر روش کاهش روی مولفه شماره j اعمال شده باشد، آن‌گاه

الف) عامل هم‌ارزی به روش کاهش وجود دارد اگر و تنها اگر $I_{SX}^B(i) \leq (۱ - p_j)I_B(j)$، که در آن $I_{SX}^B(i)$ معیار اهمیت شن و زی برای مولفه iام است وقتی قابلیت اعتماد آن به روش افزونگی B افزایش یافته است.

ب) برای هم‌ارزی با افزونگی فعال، عامل کاهش عبارت است از

$$\rho_j^{A_i} = \frac{۱}{\ln p_j} \times \ln(\frac{s(۱ - p_i)I_B(i)}{I_B(j)} + p_j).$$

ج) برای هم‌ارزی با افزونگی آماده به‌کار سرد، عامل کاهش عبارت است از

$$\rho_j^{C_i} = \frac{۱}{\ln p_j} \times \ln(\frac{(s * p_i - p_i)I_B(i)}{I_B(j)} + p_j),$$

که در آن s قابلیت اعتماد مولفه افزونه و $s * p_i$ تابع بقاء مجموع طول عمر مولفه اصلی و افزونه است (پیچش تابع بقاء مولفه اصلی و افزونه).

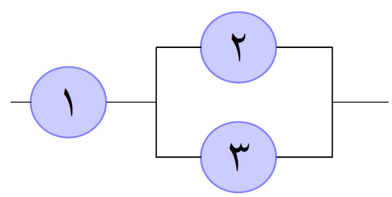
برهان: کافی است معادله $h^R(p_j^{\eta_{i,j}}, \boldsymbol{p}) = h^B(p_i', \boldsymbol{p})$، که در آن $\eta_{i,j} = \rho_j^{B_i}$ و $h^R(p_j^{\eta_{i,j}}, \boldsymbol{p})$ قابلیت اعتماد افزایش یافته سیستمی است که روش کاهش روی مولفه jام آن صورت پذیرفته است بر حسب $\rho_j^{B_i}$ حل شود.

$$\rho_j^{B_i} = \frac{۱}{\ln p_j} \times \ln(\frac{\Delta_i^B I_B(i)}{I_B(j)} + p_j), \qquad (۶)$$

که در آن $\Delta_i^B = p'_i - p_i$ میزان افزایش در قابلیت اعتماد مولفه iام است وقتی افزونگی از نوع B روی این مولفه صورت می‌پذیرد. برای اثبات مورد الف) کافی است نامعادله $0 \le \frac{1}{\ln p_j}\times\ln(\frac{\Delta_i^B I_B(i)}{I_B(j)}+p_j) \le 1$ را در نظر بگیریم. این نامساوی معادل است با $\Delta_i^B I_B(i) \le (1-p_j)I_B(j)$.

برای موارد ب) و ج) نیز توجه کنید که در افزونگی فعال $p'_i = 1-(1-p_i)(1-s)$ و در افزونگی آماده به کار سرد نیز $p'_i = p_i * s$. به طور معادل $\Delta_i^A = s(1-p_i)$ و $\Delta_i^C = s * p_i - p_i$ که برهان را کامل می‌کند.

فرع ۳. در قضیه ۳ چنانچه کاهش و افزونگی هر دو روی یک مولفه مثلا مولفه iام صورت پذیرد، آنگاه عامل کاهش مستقل از میزان اهمیت مولفه است یعنی $\rho_i^{A_i} = \frac{\ln(1-(1-p_i)(1-s))}{\ln p_i}$ و $\rho_i^{C_i} = \frac{\ln(s*p_i)}{\ln p_i}$.



شکل ۴. سیستم رادار هواپیما

مثال ۱. شکل ۴ ساختار یک سیستم سه مولفه‌ای که مشهور به سیستم رادار هواپیما است را نشان می‌دهد. تابع قابلیت اعتماد این سیستم با فرض $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$ به صورت $h(\boldsymbol{p}) = p_1(p_2+p_3-p_2p_3)$ است. چنانچه قابلیت اعتماد تمام مولفه‌ها یکسان باشد آنگاه $I_B(1) = 2p-p^2$ و $I_B(2) = I_B(3) = p-p^2$. لذا اهمیت بیرنبام مولفه اول همواره بیشتر از سایر مولفه‌هاست. حال فرض کنید به منظور افزایش قابلیت اعتماد سیستم، مولفه‌ای با قابلیت اعتماد $s \in (0, \frac{1-p}{2-p})$ به صورت افزونگی فعال به یکی از مولفه‌های سیستم مثلا مولفه شماره یک اضافه شود. در این‌صورت $\rho_1^{A_1} = \frac{1}{\ln p}\times\ln(s(1-p)+p)$ و $\rho_2^{A_1} = \rho_3^{A_1} = \frac{1}{\ln p}\times\ln(s(2-p)+p)$، واضح است که $\rho_1^{A_1} \ge \rho_2^{A_1}$. اگر مولفه افزونه به صورت فعال به مولفه ۲ یا ۳ اضافه شود، آن‌گاه $\rho_1^{A_2} = \frac{1}{\ln p}\times\ln(\frac{s(1-p)^2}{2-p}+p)$ و $\rho_2^{A_2} = \rho_3^{A_2} = \frac{1}{\ln p}\times\ln(s(1-p)+p)$، به راحتی ملاحظه می‌شود $\rho_1^{A_2} \ge \rho_2^{A_2}$. یعنی اگر مولفه‌های سیستم هم توزیع باشند، آن‌گاه مناسب‌ترین مولفه برای اعمال روش افزونگی فعال یا روش کاهش مولفه شماره یک است، که با نتیجه‌ی قضیه ۲ سازگار است. حال فرض کنید قابلیت اعتماد مولفه‌ها متفاوت باشد. به عنوان مثال $\boldsymbol{p}_1 = (0.9, 0.6, 0.7)$ و $\boldsymbol{p}_2 = (0.7, 0.6, 0.4)$ را در نظر بگیرید. پس از محاسبات

جبری ساده اهمیت مولفه‌ها به ترتیب عبارت است از: $I_B(۱;\boldsymbol{p}_۱)=p_{۲۱}+p_{۳۱}(۱-p_{۲۱})=۰/۸۸$، $I_B(۲;\boldsymbol{p}_۱)=p_{۱۱}(۱-p_{۳۱})=۰/۲۷$ و $I_B(۳;\boldsymbol{p}_۱)=p_{۱۱}(۱-p_{۲۱})=۰/۳۶$. اگر افزونگی فعال روی مولفه یک صورت پذیرد، آنگاه برای بردار $\boldsymbol{p}_۱$ ضرایب کاهش به‌صورت $\rho_۱^{A_۱}=\frac{\ln(۰/۹+۰/۱s)}{\ln(۰/۹)}$، $\rho_۲^{A_۱}=\frac{\ln(۰/۶+۰/۳۲s)}{\ln(۰/۶)}$ و $\rho_۳^{A_۱}=\frac{\ln(۰/۷+۰/۲۴s)}{\ln(۰/۷)}$ به‌دست می‌آید. به طور مشابه برای بردار $\boldsymbol{p}_۲$ نیز $I_B(۱;\boldsymbol{p}_۲)=۰/۷۶$، $I_B(۲;\boldsymbol{p}_۲)=۰/۴۲$ و $I_B(۳;\boldsymbol{p}_۲)=۰/۲۸$ و مقادیر مربوط به ضرایب کاهش به‌دست می‌آید. مقادیر $\rho_i^{A_۱};\ i=۱,۲,۳$ به ازای $\boldsymbol{p}_۱$ و $\boldsymbol{p}_۲$ به ترتیب در نمودار (الف) و (ب) در شکل ۶ نمایش داده شده است. این نمودارها نشان می‌دهد که وقتی مولفه‌های سیستم هم توزیع نیستند، لزوما مولفه با اهمیت بیشتر مناسب‌ترین مولفه برای اعمال روش کاهش نیست. زیرا در هر دو حالت مولفه شماره یک مهم‌ترین مولفه است در حالیکه براساس تعریف ۱ برای $\boldsymbol{p}_۲$ مهم‌ترین مولفه در اعمال روش کاهش مولفه شماره ۱ است اما برای $\boldsymbol{p}_۱$ مولفه شماره ۳ در اولویت است.

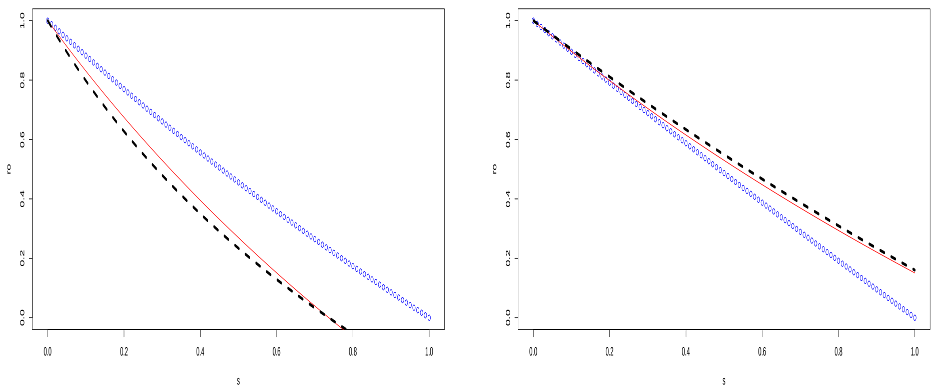
توجه داریم که براساس رابطه (۵) مقادیر $\rho_i^{A_۱};\ i=۱,۲,۳$ وجود دارند اگر به ازای $i=۱,۲,۳$ نامساوی

$$\begin{aligned} ۰\le h^A(p'_۱,\boldsymbol{p}_j)-h(\boldsymbol{p}_j) &= s(۱-p_{۱j})(p_{۲j}+p_{۳j}-p_{۲j}p_{۳j}) \\ &\le (۱-p_i)I_B(i), \end{aligned} \tag{۷}$$

برای $j=۱,۲$ برقرار باشد. به راحتی ملاحظه می‌شود که نامساوی (۷) به ازای هر $۰\le s\le ۱$ برای $\boldsymbol{p}_۱$ برقرار است. اما برای $\boldsymbol{p}_۲$، $\rho_۱^{A_۱}$ همواره وجود دارد در حالی‌که $\rho_۲^{A_۱}$ و $\rho_۳^{A_۱}$ به ازای $s\le ۰/۷۴$ وجود خواهند داشت. به عبارت دیگر، فرض کنید بردار قابلیت اعتماد مولفه‌های سیستم به صورت $\boldsymbol{p}_۲$ باشد و قابلیت اعتماد سیستم با افزونگی فعال روی مولفه ۱ ارتقاء یافته باشد. حال اگر بخواهیم به جای افزونگی فعال روی مولفه شماره ۱ با کاهش نرخ شکست مولفه‌های ۲ یا ۳ سیستمی با قابلیت اعتماد برابر با افزونگی فعال داشته باشیم، در صورتی امکان پذیر است که قابلیت اعتماد مولفه افزونه کمتر از ۰/۷۴ باشد. این مطلب در شکل ۶ نیز مشهود است.

۲.۳ سیستم با مولفه‌هایی با توزیع طول عمر معلوم

فرض کنید ساختار سیستم منسجم و توزیع طول عمر مولفه‌های سیستم معلوم است. در این‌صورت تابع قابلیت اعتماد مولفه‌های سیستم را به صورت تابعی از زمان می‌توان محاسبه نمود. برای محاسبه عامل



(الف) (ب)

شکل ۵. مقادیر ρ در مثال ۱، دایره توخالی برای ρ_1، خط برای ρ_2 و خط-چین برای ρ_3
الف: بردار قابلیت اعتماد مولفه‌ها $\boldsymbol{p}_1$ ب: بردار قابلیت اعتماد مولفه‌ها $\boldsymbol{p}_2$.

هم‌ارزی براساس معیار تابع قابلیت اعتماد، وقتی کاهش روی مولفه jام و افزونگی روی مولفه iام صورت پذیرفته‌است، کافی است معادله $h^R(p_j^{\eta_{i,j}}(t), \boldsymbol{p}(t)) = h^B(p'_i(t), \boldsymbol{p}(t)) = \omega$ حل شود. برای این منظور ابتدا مقداری از t پیدا می‌شود که در معادله $h^B(p'_i(t), \boldsymbol{p}(t)) = \omega$ صدق کند. اگر مقدار مورد نظر t_0 باشد با استفاده از نمایش پویای رابطه (۲) برای محاسبه عامل هم‌ارزی، معادله

$$h(p'_j(t_0), \boldsymbol{p}(t_0)) = h(0_j, \boldsymbol{p}(t_0)) + p_j^{\eta_{i,j}}(t_0) I_B(i; \boldsymbol{p}(t_0)) = \omega,$$

که در آن $\eta_{i,j} = \rho_j^{B_i}$ بر حسب $\rho_j^{B_i}$ حل می‌شود. در این‌صورت

$$\rho_j^{B_i} = \frac{1}{\ln p_j(t_0)} \times \ln\left(\frac{\Delta_i^B(t_0) I_B(i; \boldsymbol{p}(t_0))}{I_B(j; \boldsymbol{p}(t_0))} + p_j(t_0)\right), \qquad (8)$$

که در آن $\Delta_i^B(t_0) = p'_i(t_0) - p_i(t_0)$ و $I_B(i; \boldsymbol{p}(t_0))$ اهمیت بیرنبام مولفه iام در زمان t_0 است.

مثال ۲. سیستم مورد نظر در شکل ۴ را در نظر بگیرید. فرض کنید توزیع طول عمر مولفه‌های سیستم X_1، X_2 و X_3 به ترتیب نمایی با پارامتر های λ_1، λ_2، λ_3 باشد، یعنی $\boldsymbol{p}(t) = (e^{-\lambda_1 t}, e^{-\lambda_2 t}, e^{-\lambda_3 t})$.

تابع قابلیت اعتماد سیستم به صورت

$$h(\boldsymbol{p}(t)) = e^{-\lambda_1 t}\left[1-(1-e^{-\lambda_2 t})(1-e^{-\lambda_3 t})\right]$$

به‌دست می‌آید. حال یک مولفه به صورت افزونگی فعال برای مولفه ۱ در نظر بگیرید. این مولفه هم توزیع با مولفه ۱ است. در این صورت تابع بقاء سیستم بهبود یافته به صورت

$$h^A(p_1'(t),\boldsymbol{p}(t)) = e^{-\lambda_1 t}(2-e^{-\lambda_1 t})\left[e^{-\lambda_2 t}+e^{-\lambda_3 t}-e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t}\right].$$

است. فرض کنید در روش کاهش، نرخ شکست مولفه ۱ را بر اساس ضریب ρ کاهش دهیم (یعنی λ_1 به $\rho\lambda_1$ تبدیل شود). تابع بقاء سیستم بهبود یافته در این روش نیز به صورت

$$h^R(p_1'(t),\boldsymbol{p}(t)) = e^{-\rho\lambda_1 t}\left[1-(1-e^{-\lambda_2 t})(1-e^{-\lambda_3 t})\right].$$

است. به طور مشابه با اعمال روش کاهش روی مولفه‌های ۲ و ۳ نیز قابلیت اعتماد سیستم به‌دست می‌آید. برای هم‌ارزی توابع قابلیت اعتماد سیستم با افزونگی آماده به کار داغ (فعال) روی مولفه ۱ و سیستم با اعمال روش کاهش روی این مولفه، عامل هم‌ارزی $\rho_1^{A_1}$، از حل معادله

$$h^A(p_1'(t),\boldsymbol{p}(t)) = h^R(p_1'(t),\boldsymbol{p}(t)) = \omega$$

به‌دست می‌آید، که در آن ω مقداری معلوم است. برای این منظور ابتدا مقداری مانند t_0 که در رابطه $h^A(p_1'(t),\boldsymbol{p}(t)) = \omega$ صدق کند پیدا می‌شود، سپس $\rho_1^{A_1}$ از معادله $h^R(p_1'(t_0),\boldsymbol{p}(t_0)) = \omega$ به‌دست می‌آید. با فرض $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ و $\omega = 0/1$ و حل عددی معادله مورد نظر، مقدار $t_0 = 1/023$ به‌دست می‌آید. پس برای سیستم ارائه شده در شکل ۴ وقتی افزونگی از نوع داغ روی مولفه ۱ صورت پذیرد شانس زنده ماندن سیستم در زمان $t_0 = 1/023$ ده درصد خواهد بود. با توجه به اینکه $IB(1,\boldsymbol{p}(t_0)) = 0/169$، $IB(2,\boldsymbol{p}(t_0)) = 0/342$، $IB(3,\boldsymbol{p}(t_0)) = 0/312$، $\boldsymbol{\Delta}^A(t_0) = (0/230, 0/112, 0/044)$ مقدار $\rho_1^{A_1} = 0/516$ به‌دست می‌آید. یعنی در زمانی که شانس زنده ماندن سیستم ۱۰ درصد است (چندک ۰/۹ توزیع طول عمر سیستم)، برای اینکه قابلیت اعتماد سیستم در شکل ۴ با اعمال روش کاهش روی مولفه ۱ معادل قابلیت اعتماد سیستم با افزونگی داغ روی مولفه

جدول ۱. عوامل هم‌ارزی قابلیت اعتماد در مثال ۲

ω	t_0	$\rho_1^{A_1}$	$\rho_2^{A_1}$	$\rho_3^{A_1}$
۰٫۱	۱٫۰۲۳	۰٫۵۱۶	۰٫۶۹۱	۰٫۵۷۴

۱ باشد کافی است به جای مولفه ۱ با نرخ خطر ۱ $= \lambda$ مولفه‌ای با نرخ خطر ۰٫۵۱۶ $= \lambda$ روی سیستم تعبیه گردد. به طور متناظر عامل‌های هم‌ارزی بقاء با اعمال روش کاهش روی مولفه‌های ۲ و ۳ نیز از حل معادلات $h^R(p'_2(1.023), \boldsymbol{p}(1.023)) = 0.1$ و $h^R(p'_3(1.023), \boldsymbol{p}(1.023)) = 0.1$ به‌دست می‌آید. جدول ۱ عوامل هم‌ارزی بر حسب معیار تابع بقاء برای سیستم شکل ۴ وقتی افزونگی از نوع فعال روی مولفه شماره ۱ صورت می‌پذیرد را نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود برای اینکه قابلیت اعتماد سیستم ارائه شده در شکل ۴ در زمان $t_0 = 1.023$ به روش کاهش معادل شود با زمانیکه افزونگی داغ روی مولفه شماره ۱ صورت پذیرفته است، بیشترین کاهش روی مولفه شماره ۱ انجام می‌پذیرد. لذا اگر هزینه اعمال روش کاهش روی مولفه‌ها یکسان باشد، بهتر است مولفه شماره ۲ که به کاهش کمتری نیاز دارد از ابتدا با مولفه‌ای با نرخ خطر $0.691 \times \lambda_2$ جایگزین گردد.

یکی دیگر از معیارهای قابلیت اعتماد برای به‌دست آوردن عامل‌های هم‌ارزی، میانگین زمان تا خرابی سیستم ($MTTF$) است. به عنوان مثال برای اینکه با اعمال روش کاهش روی مولفه iام یک سیستم، میانگین زمان تا خرابی برابر عدد β شود، داریم:

$$\begin{aligned} MTTF^{R_{\{i\}}} = \beta &= \int_0^\infty h(p'_i(t), \boldsymbol{p}(t))dt \\ &= MTTF + \int_0^\infty (p_i^{\rho_{M,i}}(t) - p_i(t)) I_B(i; \boldsymbol{p}(t))dt, \end{aligned}$$

که در آن $\rho_{M,i}$ عامل هم‌ارزی در روش کاهش براساس معیار میانگین زمان تا خرابی سیستم است.

سیستم مورد مطالعه در شکل ۴ را با مولفه‌های مستقل و هم توزیع نمایی با پارامتر λ در نظر بگیرید. در این‌صورت $I_B(1; \boldsymbol{p}(t)) = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$. برای اینکه با اعمال روش کاهش روی مولفه شماره

۱ میانگین زمان تا خرابی سیستم برابر β شود، داریم:

$$\beta = MTTF + \frac{۲}{\lambda(\rho_{M,۱}+۱)} - \frac{۱}{\lambda(\rho_{M,۱}+۲)} - \frac{۲}{۳\lambda}, \qquad (۹)$$

که در آن $MTTF = \int_{۰}^{\infty}(۲e^{-۲\lambda t} - e^{-۳\lambda t})dt = \frac{۲}{۳\lambda}$. با حل معادله (۹) بر حسب $\rho_{M,۱}$، عامل هم‌ارزی میانگین زمان تا خرابی سیستم به صورت $\rho_{M,۱} = \frac{-۳a+۱+\sqrt{a^۲+۶a+۱}}{۲a}$ به‌دست می‌آید، که در آن $a = (\beta - MTTF)\lambda + \frac{۲}{۳} = \beta\lambda$ و تنها مقادیر $۰ \leq \rho_{M,۱} \leq ۱$ قابل قبول است. اگر برای سادگی کار فرض کنیم $\beta = \frac{۱}{\lambda}$ آنگاه $a = ۱$ و $\rho_{M,۱} = \sqrt{۲} - ۱ \simeq ۰/۴۱۴$.

با ادامه روندی مشابه، برای اینکه با کاهش روی مولفه ۲ یا ۳ میانگین زمان تا خرابی سیستم برابر β شود، $\rho_{M,۲}$ از حل معادله

$$\beta = MTTF + \frac{۱}{\lambda(\rho_{M,۲}+۱)} - \frac{۱}{\lambda(\rho_{M,۲}+۲)} - \frac{۱}{۶\lambda}, \qquad (۱۰)$$

به‌دست می‌آید. با فرض $b = (\beta - MTTF)\lambda + \frac{۱}{۶} = \beta\lambda - \frac{۱}{۲}$ به راحتی $\rho_{M,۲} = \frac{-۳+\sqrt{۱+\frac{۴}{b}}}{۲}$ خواهد بود.

۳ هم‌ارزی در روش کاهش روی زیرمجموعه‌ای از مولفه‌های سیستم

تعمیم نتایج بخش ۲ و ارائه فرمول بسته برای حالتی که با بیش از یک مولفه سروکار داریم از موضوعات مورد بررسی برای آینده تحقیق پیش‌روست. در این بخش، سیستم رادار هواپیما درنظرگرفته شده و عوامل هم‌ارزی براساس معیار تابع بقاء و میانگین زمان تا خرابی سیستم به صورت عددی محاسبه شده است. در شکل ۴ یک مولفه افزونه به صورت فعال برای مولفه شماره ۱ سیستم در نظر بگیرید. عوامل هم‌ارزی در چندک‌های مختلف طول عمر سیستم در جدول ۲ ارائه شده است. در این جدول فرض شده است که مولفه iام سیستم برای $i = ۱, ۲, ۳$ دارای توزیع نمایی با پارامتر i است. همچنین مولفه افزونه هم‌توزیع با مولفه اصلی متناظر است. مقدار ω در این جدول چندکی از طول عمر سیستم با افزونگی فعال است که قابلیت اعتماد سیستم به روش کاهش با آن هم‌ارز می‌شود. $t_۰$ نیز زمانی است که توابع قابلیت اعتماد سیستم در روش افزونگی و کاهش با هم برابر (هم‌ارز) می‌شوند. به کمک نتایج ارائه شده در جدول ۲ می‌توانیم

جدول ۲. عوامل هم‌ارزی بقاء برای افزونگی فعال روی مولفه ۱ در شکل ۴.

عامل	ω						
	۰٫۰۰۱	۰٫۰۱	۰٫۱	۰٫۵	۰٫۹	۰٫۹۹	۰٫۹۹۹
t_0	۲٫۵۴۵	۱٫۷۸۷	۱٫۰۲۳	۰٫۴۳۹	۰٫۱۴۰	۰٫۰۳۹	۰٫۰۱۲
$\rho_{\{1\}}$	۰٫۷۴۳	۰٫۶۶۱	۰٫۵۱۶	۰٫۳۰۷	۰٫۱۲۳	۰٫۰۳۸	۰٫۰۱۲
$\rho_{\{2\}}$	۰٫۸۶۴	۰٫۸۰۹	۰٫۶۹۱	۰٫۴۱۷	—	—	—
$\rho_{\{3\}}$	۰٫۶۵۶	۰٫۶۳۸	۰٫۵۷۴	۰٫۳۶۸	—	—	—
$\rho_{\{1,2\}}$	۰٫۹۱۰	۰٫۸۷۷	۰٫۸۰۸	۰٫۶۷۵	۰٫۴۵۱	۰٫۲۰۷	۰٫۰۷۷
$\rho_{\{1,3\}}$	۰٫۸۱۹	۰٫۷۹۷	۰٫۷۵۱	۰٫۶۴۸	۰٫۴۴۵	۰٫۲۰۷	۰٫۰۷۷
$\rho_{\{2,3\}}$	۰٫۸۷۷	۰٫۸۴۲	۰٫۷۷۵	۰٫۶۰۱	—	—	—
$\rho_{\{1,2,3\}}$	۰٫۹۱۷	۰٫۸۹۲	۰٫۸۴۷	۰٫۷۵۳	۰٫۵۴۲	۰٫۲۴۱	۰٫۰۸۲

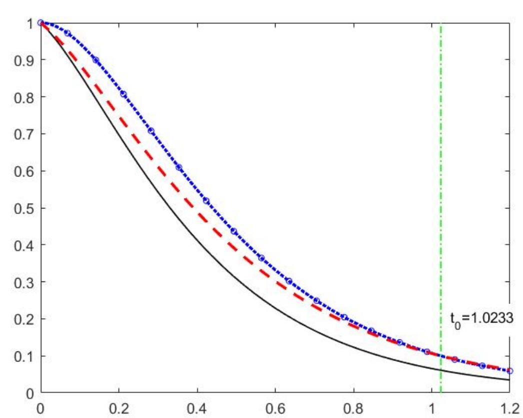
زیرمجموعه مناسب برای اعمال روش کاهش را انتخاب کنیم. برای سادگی در این جدول به اختصار از نماد $\rho_{\{D\}}$ به جای $\rho^{A_{\{1\}}}_{\{D\}}$ استفاده شده است، که در آن D زیرمجموعه دلخواه از مولفه‌های سیستم است. به عنوان مثال در $\omega = ۰٫۵$ با فرض یکسان بودن هزینه اعمال روش کاهش روی مولفه‌های مختلف، اگر کاهش تنها روی یک مولفه مجاز باشد، مولفه ۲ در اولویت است. اگر کاهش روی دو مولفه مجاز باشد، اولویت با مولفه‌های ۱ و ۲ است. خانه‌هایی از جدول ۲ که خط تیره درج شده به این معنی است که عامل هم‌ارزی وجود ندارد. به عنوان مثال در $\omega = ۰٫۹$ نمی‌توان با کاهش روی مولفه ۲ یا ۳ یا حتی کاهش همزمان روی دو مولفه ۲ و ۳ سیستمی یافت که قابلیت اعتمادش هم‌ارز شود با قابلیت اعتماد سیستم متناظر با افزونگی فعال روی مولفه ۱. توابع بقاء سیستم اصلي، سیستم با افزونگي فعال روي مولفه ۱ و سیستمی که روش کاهش روی سه مولفه آن با ضریب $\rho_{\{1,2,3\}} = ۰٫۸۴۶$ صورت پذیرفته در شکل ۶ نمایش داده شده است.

عوامل هم‌ارزی براساس معیار میانگین زمان تا خرابی سیستم، وقتی روش‌های افزونگی و کاهش روی زیرمجموعه‌ای دلخواه از مولفه‌های سیستم صورت می‌پذیرد در جدول ۳ گزارش شده است. در این جدول نماد $\rho^{A_{\{E\}}}_{M,\{D\}}$ بیانگر عامل هم‌ارزی برای زمانی است که افزونگی فعال روی زیر مجموعه E از مولفه‌های سیستم و روش کاهش روی زیر مجموعه D از مولفه‌های سیستم اعمال شده است. براساس نتایج ارائه شده در این جدول، فرض کنید به عنوان مثال افزونگی فعال روی یکی از مولفه‌های ۱، ۲ یا ۳ صورت پذیرد. حال اگر خواهیم با اعمال روش کاهش روی یک مولفه، سیستمی طراحی کنیم که میانگین زمان تا خرابی آن با مکانیسم ذکر شده برای افزونگی فعال یکسان باشد مولفه ۲ مناسب‌ترین انتخاب است، زیرا

جدول ۳. عوامل هم‌ارزی بر اساس شاخص ارزیابی $MTTF$

E	عامل هم‌ارزی به روش کاهش						
	$\rho_{M,\{۱\}}^{A_{\{E\}}}$	$\rho_{M,\{۲\}}^{A_{\{E\}}}$	$\rho_{M,\{۳\}}^{A_{\{E\}}}$	$\rho_{M,\{۱,۲\}}^{A_{\{E\}}}$	$\rho_{M,\{۱,۳\}}^{A_{\{E\}}}$	$\rho_{M,\{۲,۳\}}^{A_{\{E\}}}$	$\rho_{M,\{۱,۲,۳\}}^{A_{\{E\}}}$
$\{۱\}$	۰/۳۹۷	۰/۵۶۱	۰/۴۵۷	۰/۷۴۰	۰/۶۸۵	۰/۶۷۸	۰/۷۹۲
$\{۲\}$	۰/۴۷۹	۰/۶۱۲	۰/۵۰۸	۰/۷۷۳	۰/۷۲۴	۰/۷۲۱	۰/۸۱۹
$\{۳\}$	۰/۶۸۳	۰/۷۴۹	۰/۶۵۹	۰/۸۵۸	۰/۸۲۵	۰/۸۳۰	۰/۸۸۹
$\{۱,۲\}$	—	۰/۲۹۹	۰/۲۲۵	۰/۵۶۴	۰/۴۹۱	۰/۴۲۸	۰/۶۳۳
$\{۱,۳\}$	۰/۱۱۹	۰/۴۰۰	۰/۳۰۹	۰/۶۳۴	۰/۵۶۵	۰/۵۳۱	۰/۶۹۸
$\{۲,۳\}$	۰/۳۴۴	۰/۵۲۸	۰/۴۲۶	۰/۷۱۹	۰/۶۶۱	۰/۶۵۰	۰/۷۷۴

به کاهش کمتری نیاز دارد. چنانچه روش کاهش روی دو مولفه از سیستم مجاز باشد نیز مولفه‌های ۱ و ۲ در اولویتند.



شکل ۶. مقادیر توابع بقاء سیستم اصلی (خط)، سیستم با اعمال روش کاهش روی سه مولفه (خط-چین) و سیستم با افزونگی فعال روی مولفه ۱ (نقطه چین) مربوط به ساختار ارائه شده در شکل ۴.

بحث و نتیجه‌گیری

روش‌های مختلفی برای بهبود عملکرد سیستم‌ها وجود دارد که افزونگی و کاهش از مهم‌ترین آن‌هاست. روش‌های افزونگی در تحقیقات مختلفی مورد بررسی قرار گرفته‌اند، درحالی‌که روش کاهش کمتر مورد توجه بوده‌است. در روش کاهش مولفه(های) اصلی سیستم توسط مولفه‌ای(هایی) با کیفیت بالاتر و گران‌تر جایگزین می‌شود. هم‌ارزی روش‌های کاهش و افزونگی برای انتخاب سیاست مناسب در ارتقاء عملکرد سیستم مفید است. در تحقیقات گذشته عوامل هم‌ارزی به روش‌های عددی محاسبه شده است. در این مقاله یک شکل بسته برای محاسبه عامل هم‌ارزی بقاء به‌دست آمد و ثابت شد اندازه اهمیت مولفه بیرنبام نقش مهمی در انتخاب مولفه مناسب برای اعمال روش کاهش یا افزونگی ایفا می‌کند. تعمیم نتایج این مقاله وقتی بیش از یک مولفه افزونه در اختیار داریم با در نظر گرفتن تابع هزینه می‌تواند در آینده مد نظر قرار گیرد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات و پیشنهادات داوران محترم، رهنمودهای ارزنده و ویرایش ادبی سردبیر محترم و هیئت تحریریه مجله که باعث ارتقا کیفی مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

اسدی، م. (۱۳۹۲)، آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد، تهران، مرکز نشر دانشگاهی.

صفائی، ف. و احمدی، ج. (۱۳۹۴)، مقایسه زمان جایگذاری بهینه در سیستم‌های قابل تعمیر براساس توابع نرخ خرابی و احتمال تعمیر مینیمال، مجله علوم آماری ایران، ۹، ۶۱-۷۶.

کامرانفر، ه.، اطمینان، ج. و چهکندی، م. (۱۳۹۹)، تحلیل داده‌های طول عمر وایبول تحت تعمیر ناقص، مجله علوم آماری ایران، ۱۴، ۴۸۷-۵۰۴.

Alghamdi, S. M. (2015), New and Modified Methods for Assessing Reliability Equivalence, PhD thesis, University of Salford.

Alghazo, J. M., Mustafa, M. and El-Faheem, A. A. (2020), Availability Equivalence Analysis for the Simulation of Repairable Bridge Network System, *Complexity*, vol. 2020, Article ID 4907895, 8 pages, https://doi.org/10.1155/2020/4907895.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt, Rinehart and Winston, New York.

Birnbaum Z. W. (1969), On the Importance of Different Components in a Multicomponent System. *In Multivariate Analysis II (Edited by P. R. Krishnaiah)*, 581-592, Academic Press, New York.

Cha, J. H., Mi, J. and Yun, W. Y. (2008), Modelling a General Standby System and Evaluation of Its Performance, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **24**, 159–169.

Eryilmaz, S. (2014), A Study on Reliability of Coherent Systems Equipped with a Cold Standby Component, *Metrika*, **77**, 349–359.

Eryilmaz, S. and Erkan, E. (2018), Coherent System with Standby Components, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **34**, 395–406.

Hu, L., Yue, D. and Tian, R. (2016), Availability Equivalence Analysis of a Repairable Multi-State Parallel-Series System with Different Performance Rates, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 2016, Article ID 3175269, 9 pages, https://doi.org/10.1155/2016/3175269.

Jeddi, H. and Doostparast, M. (2020), Allocation of Redundancies in Systems: A General Dependency-Base Framework, *Annals of Operations Research*, https://doi.org/10.1007/s10479-020-03795-2.

Mustafa, A. (2020), Improving the Bridge Structure by Using Linear Failure Rate Distribution, *Journal of Applied Statistics*, **47**, 1423-1438.

Mustafa, A., El-Desouky, B. S. and Taha, A. (2016), Evaluating and Improving System Reliability of Bridge Structure using Gamma Distribution, *International Journal of Reliability and Applications*, **17**, 121–135.

Nanda, A. K. and Hazra, N. K. (2013), Some Results on Active Redundancy at Component Level versus System Level, *Operations Research Letters*, **41**, 241–245.

Ṙade, L. (1993a), Reliability Equivalence, *Microelectrons Reliability*, **33**, 323–325.

Ṙade, L. (1993b), Reliability Survival Equivalence, *Microelectrons Reliability*, **33**, 881–894.

Sarhan, A. M. (2002), Reliability Equivalence with a Basic Series/Parallel System, *Applied Mathematics and Computation*, **132**, 115–133.

Sarhan A. M. and Mustafa, A. (2013), Availability Equivalence Factors of a General Repairable Series-Parallel System, *International Journal of Reliability and Applications*, **14**, 11–26.

Sarhan, A., Tadj, L., Al-Khedhairi, A. and Mustafa, A. (2008), Equivalence Factors of a Parallel-Series System, *Applied Sciences*, **10**, 219–230.

Shen, K. and Xi, M. (1989), The Increase of Reliability of k-out-of-n Systems through Improving a Component, *Reliability Engineering and System Safety*, **26**, 189-195.

Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2021
Vol. 15, No. 1, pp 61-80
DOI: 10.29252/jss.15.1.79

On Equivalence of Reliability in Reduction and Redundancy Methods

Chahkandi, M., Etminan, J. and Khanjari Sadegh, M.
Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.

Abstract: Redundancy and reduction are two main methods for improving system reliability. In a redundancy method, system reliability can be improved by adding extra components to some original components of the system. In a reduction method, system reliability increases by reducing the failure rate at all or some components of the system. Using the concept of reliability equivalence factors, this paper investigates equivalence between the reduction and redundancy methods. A closed formula is obtained for computing the survival equivalence factor. This factor determines the amount of reduction in the failure rate of a system component(s) to reach the reliability of the same system when it is improved by a redundancy method. The effect of component importance measure is also studied in our derivations.

Keywords: Component importance measure, Redundancy method, Reduction method, Reliability equivalence factor.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N05.