بسمه تعالی

# مجموعه مقالات فارسی

## هفتمین سمینار تخصصی

# نظریه قابلیت اعتماد و کاربردهای آن

گروه آمار، دانشگاه بیرجند

بیرجند، ایران

۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۴۰۰

# قابلیت اعتماد تنش و مقاومت $P(X_{(r)} < Y_{(k)})$ در توزیع وایبل

رستمی، ع.[۱] ، خنجری، م.[2] و خراشادی‌زاده، م.[2]

[1] گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نیشابور

[2] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند

**چکیده:** در برخی موارد بطور همزمان بر یک سیستم چند تنش وارد می‌شود و سیستم در صورتی سالم می‌ماند که مقاومت آن از تنش‌های وارد شده بیشتر باشد. در این مقاله توزیع متغیرهای تنش و مقاومت را وایبل در نظر می‌گیریم و برای پارامتر قابلیت اعتماد تنش و مقاومت، برآوردگر درستنمایی ماکزیمم را بدست می‌آوریم همچنین توزیع مجانبی آنرا بررسی می‌کنیم و یک روش بیز تقریبی را برای آن بدست می‌آوریم.

**واژه‌های کلیدی:** برآوردگر درستنمایی ماکزیمم، توزیع مجانبی، روش تقریبی برآوردگر بیز.

## ۱ پیش‌گفتار

در سالهای اخیر قابلیت اعتماد تنش - مقاومت در توزیع‌های مختلف و هم‌چنین در سیستم‌های چند مولفه‌ای بررسی شده است. قابلیت اعتماد تنش - مقاومت را رستمیان و نعمت‌الهی (2019) در توزیع گوسین برای داده‌های سانسور شدهٔ نوع $II$ فزاینده و کهنسال (2019) در توزیع بر نوع $XII$ برای داده‌های سانسور شدهٔ فزاینده بررسی کرده‌اند و هم‌چنین قابلیت اعتماد در مدل تنش - مقاومت چند مؤلفه‌ای را پاندیت و جوشی (2018) در توزیع پارتو تعمیم یافته و کیزیلاسلان و نادر (2018) در توزیع کوماراساوی دو متغیره بررسی کرده‌اند.

بر یک سیستم با $n_2$ مولفه به هر مولفه، بطور همزمان $n_1$ تنش $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ وارد می‌شود و مولفه‌ها مقاومت‌های $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ دارند، که به این مدل $n_1$ تنش - $n_2$ مقاومت می‌گوییم. سیستم در صورتی سالم می‌ماند که مقاومت سیستم از تنش‌های وارد شده بیشتر باشد. بطور مثال بر یک قطعه همزمان سه تنش فشاری (Compression)، کششی (tension) و برشی (chear) وارد می‌شود و برای اینکه قطعه تغییر شکل نیابد باید مقاومت آن ( مقاومت ابعاد یا شکل) از این سه تنش بیشتر باشد، یا در هنگام بحرانی مانند زلزله، افراد تماس‌های تلفنی بسیار زیادی در زمان کوتاه بلافاصله بعد از زلزله می‌گیرند و برای اینکه این تعداد تماس بسیار زیاد برقرار شوند باید امکانات سخت افزاری مخابرات توانایی برقراری این تعداد تماس را داشته باشند. به طور مثال در سیستم $k$ از $n_2$ از نوع خرابی، سیستم در صورتی سالم

[۱] رستمی، ع.: *ali.rostami@iau.neyshabur.ac.ir*

می‌ماند که $X_{(n_1)} < Y_{(k)}$، که $X_{(i)}$ آمارهٔ مرتب مرتبهٔ $i$ ام است، باشد. همچنین در حالت خاص سیستم سری، سیستم در صورتی سالم می‌ماند که $X_{(n_1)} < Y_{(1)}$ و در حالت خاص سیستم موازی، سیستم در صورتی سالم می‌ماند که $X_{(n_1)} < Y_{(n_2)}$ باشد. پاکدامن و احمدی (2013) برای توزیع نمایی و مرواحسن (2017) برای توزیع لیندلی، سیستم تنش از مرتبهٔ $n_1$ و مقاومت از مرتبهٔ $n_2$ را بررسی کرده‌اند. ما این مدل را برای توزیع وایبل با پارامتر شکل معلوم بررسی می‌کنیم. اگر $X$ دارای توزیع وایبل با پارامتر شکل معلوم $\gamma_0$ باشد داریم:

$$X \sim W(\gamma_0, \alpha),$$
$$f(x) = \alpha\gamma_0 x^{\gamma_0 - 1} e^{-\alpha x^{\gamma_0}} \qquad x, \alpha, \gamma_0 > 0.$$

دلیل بررسی این مدل برای توزیع وایبل، هم به خاطر این است که نرخ شکست این توزیع ثابت نیست، بطوریکه به ازای $\gamma_0 < 1$ نزولی $(DFR)$ و به ازای $\gamma_0 > 1$ صعودی $(IFR)$ است و هم به خاطر این است که توزیع برخی از داده‌های تحلیل بقا و داده‌های تنش - مقاومت از توزیع وایبل با پارامتر شکل معلوم مانند توزیع رایلی $R(\alpha) = W(2, \alpha)$ پیروی می‌کنند. در این مقاله موارد زیر انجام می‌شود. به دلیل اینکه در برخی موارد تنش‌های بسیار زیادی در زمان کوتاه به سیستم وارد می‌شوند، مانند مثال زلزله که بیان کردیم، توزیع‌های مجانبی برآوردگرهای $\beta$ و $\alpha$ و فاصله اطمینان‌های مجانبی آنها را بدست می‌آوریم و نحوهٔ بدست آوردن توزیع مجانبی برآورد قابلیت اعتماد تنش و مقاومت و فاصله اطمینان مجانبی آنرا بیان می‌کنیم. هم‌چنین برآوردگر بیز تقریبی که تیرنی و کادانه (1986) ارائه کرده‌اند را بدست می‌آوریم.

## ۲ دست آوردهای پژوهش

سیستم تنش از مرتبهٔ $n_1$ و مقاومت از مرتبهٔ $n_2$ که تنش‌ها مستقل و مقاومت‌ها مستقل و تنش‌ها و مقاومت‌ها نیز مستقل هستند را در نظرمی‌گیریم.

**قضیه ۱.۲.** در سیستم تنش از مرتبهٔ $n_1$ و مقاومت از مرتبهٔ $n_2$ که متغیرهای تنش مستقل و متغیرهای مقاومت مستقل و متغیرهای تنش و مقاومت نیز مستقل هستند، احتمال $R_{r,k} = P(X_{(r)} < Y_{(k)})$ بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} R_{r,k} &= P(X_{(r)} < Y_{(k)}), \\ &= k\binom{n_2}{k}\sum_{j=r}^{n_1}\binom{n_1}{j}\int F_X^j(y)\Big[1 - F_Y(y)\Big]^{n_1-j} F_Y^{k-1}(y)\Big[1 - F_Y(y)\Big]^{n_2-k} f_Y(y)dy. \end{aligned}$$

برهان.

$$R_{r,k} = P(X_{(r)} < Y_{(k)}),$$

بنا بر قانون احتمال کل داریم:

$$= \int P(X_{(r)} < Y_{(k)}, Y_{(k)} = y),$$

$$= \int P(X_{(r)} < Y_{(k)} | Y_{(k)} = y) f_{Y(k)}(y) dy,$$

بنا بر استقلال متغیرهای تنش و مقاومت داریم:

$$\begin{aligned}
&= \int P(X_{(r)} < y) f_{Y(k)}(y) dy, \\
&= \int F_{X_{(r)}}(y) f_{Y(k)}(y) dy, \\
&= \int F_{X_{(r)}}(y) k \binom{n_2}{k} F_Y^{k-1}(y) \Big[1 - F_Y(y)\Big]^{n_2-k} f_Y(y) dy, \\
&= k \binom{n_2}{k} \int F_{X_{(r)}}(y) F_Y^{k-1}(y) \Big[1 - F_Y(y)\Big]^{n_2-k} f_Y(y) dy, \\
&= k \binom{n_2}{k} \int \sum_{j=r}^{n_1} \binom{n_1}{j} F_X^j(y) \Big[1 - F_X(y)\Big]^{n_1-j} F_Y^{k-1}(y) \Big[1 - F_Y(y)\Big]^{n_2-k} f_Y(y) dy, \\
&= k \binom{n_2}{k} \sum_{j=r}^{n_1} \binom{n_1}{j} \int F_X^j(y) \Big[1 - F_X(y)\Big]^{n_1-j} F_Y^{k-1}(y) \Big[1 - F_Y(y)\Big]^{n_2-k} f_Y(y) dy.
\end{aligned}$$

در صورتی که سیستم $k$ از $n_2$ از نوع خرابی باشد، یعنی $k = k$ و $r = n_1$باشد، احتمال $R_{r,k} = P(X_{(r)} < Y_{(k)})$ قابلیت اعتماد تنش - مقاومت است و بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
R_{r,k} &= P(X_{(n_1)} < Y_{(k)}), \\
&= k \binom{n_2}{k} \int F_X^{n_1}(y) F_Y^{k-1}(y) \Big[1 - F_Y(y)\Big]^{n_2-k} f_Y(y) dy,
\end{aligned}$$

همچنین در حالت خاص سری داریم:

$$\begin{aligned}
&k = 1, \\
&R_{n_1,1} = n_2 \int F_X^{n_1}(y) \Big[1 - F_Y(y)\Big]^{n_2-1} f_Y(y) dy,
\end{aligned}$$

و در حالت خاص موازی داریم:

$$\begin{aligned}
&k = n_2, \\
&R_{n_1,n_2} = n_2 \int F_X^{n_1}(y) F_Y^{n_2-1}(y) f_Y(y) dy.
\end{aligned}$$

در صورتی که هر کدام از متغیرهای تنش، توزیع وایبل با پارامترهای شکل معلوم $\gamma_0$ و مجهول $\alpha$ داشته باشند و هرکدام از متغیرهای مقاومت توزیع وایبل با پارامترهای شکل معلوم $\gamma_0$ و پارامتر مقیاس مجهول $\beta$ داشته باشند:

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha\gamma_0 x^{\gamma_0-1}e^{-\alpha x^{\gamma_0}} \qquad , F(x) = 1 - e^{-\alpha x^{\gamma_0}}, \\ f(y) &= \beta\gamma_0 x^{\gamma_0-1}e^{-\beta y^{\gamma_0}} \qquad , F(y) = 1 - e^{-\beta y^{\gamma_0}}, \end{aligned}$$

بنابر قضیه ۱.۲ و دو بار استفاده از بسط دو جمله‌ای داریم:

$$R_{r,k} = K\binom{n_2}{k}\sum_{j=r}^{n_1}\sum_{i=0}^{j}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n_1}{j}\binom{j}{i}\binom{k-1}{\ell}(-1)^{i+\ell}\frac{\beta}{\alpha A+\beta B}, \qquad (۱)$$

که $A = i + n_1 - j$ و $B = l + n_2 - k + 1$ را در نظر می‌گیریم. □

**برآوردگر درستنمایی ماکزیمم:**

فرض کنیم $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ و $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ به ترتیب نمونه های تصادفی $n_1$تایی از توزیع تنش‌ها و $n_2$تایی از توزیع مقاومت‌ها باشند و این دو نمونه مستقل از هم باشند. برآوردگر درستنمایی ماکزیمم بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} &L(\alpha,\beta) \propto \alpha^{n_1}e^{-\alpha\sum_{i=1}^{n_1}x_i^{\gamma_0}}\beta^{n_2}e^{-\beta\sum_{i=1}^{n_2}y_i^{\gamma_0}}, \\ &\ell(\alpha,\beta) = \log L(\alpha,\beta) \propto n_1\log\alpha - \alpha\sum_{i=1}^{n_1}x_i^{\gamma_0} + n_2\log\beta - \beta\sum_{i=1}^{n_2}y_i^{\gamma_0}, \\ &\quad \frac{\partial\ell}{\partial\alpha} = \frac{n_1}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n_1}x_i^{\gamma_0} = 0 \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{1}{\overline{x^{\gamma_0}}}, \\ &\quad \frac{\partial\ell}{\partial\beta} = \frac{n_2}{\beta} - \sum_{i=1}^{n_2}y_i^{\gamma_0} = 0 \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{1}{\overline{y^{\gamma_0}}}, \end{aligned}$$

به دلیل ویژگی پایایی برآوردگر درستنمایی ماکزیمم داریم:

$$R_{r,k} = K\binom{n_2}{k}\sum_{j=r}^{n_1}\sum_{i=0}^{j}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n_1}{j}\binom{j}{i}\binom{k-1}{\ell}(-1)^{i+\ell}\frac{\overline{x^{\gamma_0}}}{A\overline{y^{\gamma_0}}+B\overline{x^{\gamma_0}}}.$$

**قضیه ۲.۲.** در سیستم تنش از مرتبهٔ $n_1$ و مقاومت از مرتبهٔ $n_2$ که متغیرهای تنش مستقل و دارای توزیع وایبل با پارامتر شکل معلوم $\gamma_0$ و پارامتر مقیاس مجهول $\alpha$ هستند: $W(\gamma_0, \alpha)$ و متغیرهای مقاومت مستقل و دارای توزیع وایبل با پارامتر شکل معلوم و مشترک $\gamma_0$ و پارامتر مقیاس مجهول $\beta$ هستند:

$W(\gamma_0,\beta)$ و متغیرهای تنش و مقاومت نیز مستقل هستند، داریم:

$$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}\\ \hat{\beta}\end{pmatrix} \xrightarrow{d} N_2\left(\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{\alpha}^2 & 0\\ 0 & \hat{\beta}^2\end{pmatrix}\right).$$

برهان. ابتدا ماتریس هسین را به دست می‌آوریم:

$$H=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\ell}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\alpha\partial\beta}\\ \frac{\partial^2\ell}{\partial\beta\partial\alpha} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\beta^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-n_1}{\alpha^2} & 0\\ 0 & \frac{-n_2}{\beta^2}\end{bmatrix},$$

و ماتریس اطلاع فیشر را بدست می‌آوریم:

$$I=\begin{bmatrix}-E(h_{11}) & -E(h_{12})\\ -E(h_{21}) & -E(h_{22})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{n_1}{\alpha^2} & 0\\ 0 & \frac{n_2}{\beta^2}\end{bmatrix},$$

سپس ماتریس کوواریانس را با استفاده از $I_{ij}$ ها که درآیه‌های ماتریس اطلاع فیشر هستند، بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}&\lim_{n_1,n_2\to\infty}\frac{1}{n_1}I_{11}=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\frac{1}{n_1}\frac{n_1}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2},\\ &\lim_{n_1,n_2\to\infty}\frac{1}{n_2}I_{22}=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\frac{1}{n_2}\frac{n_2}{\beta^2}=\frac{1}{\beta^2},\\ &\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{1}{\alpha^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{\beta^2}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \beta^2\end{bmatrix},\end{aligned}$$

بنابراین داریم $\hat{\sum}=\begin{bmatrix}\hat{\alpha}^2 & 0\\ 0 & \hat{\beta}^2\end{bmatrix}$. بنابر توزیع مجانبی $\begin{bmatrix}\hat{\alpha}\\ \hat{\beta}\end{bmatrix}$ فاصله‌های اطمینان $\hat{\beta}$ و $\hat{\alpha}$ بصورت زیر است:

$$\hat{\alpha}\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{n_1}} \qquad \text{و} \qquad \hat{\beta}\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\beta}}{\sqrt{n_2}},$$

چون $R_{r,k}$ تابعی از $\alpha$ و $\beta$ است، با استفاده از روش دلتا، که در آن بعد از بدست آوردن $Var(\hat{R})$ و محاسبهٔ مقدار آن در نقطهٔ $\hat{R}$ یعنی $\hat{Var}(\hat{R})$ و استفاده از $\hat{R}-R \xrightarrow{d} N(0,\hat{Var}(\hat{R}))$، می‌توان توزیع مجانبی $R_{r,k}$ و لذا فاصله اطمینان مجانبی را برای آن بدست آورد.

**برآوردگر تقریبی بیز به روش $T-K$:**

توزیع‌های پیشین مستقل $\beta$ و $\alpha$ را به ترتیب $\Gamma(\mu,\gamma)$ و $\Gamma(\nu,\lambda)$ در نظر می‌گیریم و لذا داریم:

$$\pi(\alpha,\beta)\propto\alpha^{\mu-1}e^{-\gamma\alpha}\cdot\beta^{\nu-1}e^{-\lambda\beta},$$

و توزیع پسین $\alpha$ و $\beta$ عبارت است از:

$$\pi(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})=\frac{(n_1\overline{x^{\gamma_0}}+\gamma)^{n_1+\mu}(n_2\overline{y^{\gamma_0}}+\lambda)^{n_2+\nu}}{\Gamma(n_1+\mu)\Gamma(n_2+\nu)} \alpha^{n_1+\mu-1}e^{-\alpha(n_1\overline{x^{\gamma_0}}+\gamma)}\beta^{n_2+\nu-1}e^{-\beta(n_2\overline{y^{\gamma_0}}+\lambda)}.$$

در رابطهٔ (۱) در صورتی که $j=n_1$ و $i=0$ باشد، $A=i+n_1-j=0$ است که این حالت را جداگانه در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}R_{r,k}&=k\binom{n_2}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}(-1)^l\frac{1}{B},\\&+k\binom{n_2}{k}\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n_1,}{i}\binom{k-1}{l}(-1)^{i+l}\frac{\beta}{\alpha i+\beta B},\\&+k\binom{n_2}{k}\sum_{j=r}^{n_1-1}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n_1}{j}\binom{k-1}{l}(-1)^l\frac{\beta}{\alpha(n_1-j)+\beta B},\\&+k\binom{n_2}{k}\sum_{j=r}^{n_1-1}\sum_{i=1}^{j}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n_1}{j}\binom{j}{i}\binom{k-1}{l}(-1)^{i+l}\frac{\beta}{\alpha A+\beta B},\end{aligned}\qquad (۲)$$

که عبارت اول به ازای $j=n_1$ و $i=0$، عبارت دوم به ازای $j=n_1$ و برای $i>0$، عبارت سوم برای $j<n_1$ و به ازای $i=0$ و عبارت چهارم برای $j<n_1$ و $i>0$ است. در صورتی که سیستم $k$ از $n_2$ از نوع خرابی باشد یعنی $k=k$ و $r=n_1$ باشد. چون $j=n_1$ است عبارت‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند و در حالت خاص سری با جایگذاری $\ell=0$ و $j=n_1$ و $k=k$ و $r=n_1$ و همچنین در حالت خاص موازی با جایگذاری $j=n_1$ و $k=n_2$ و $r=n_1$، برآوردگر بیز بصورت‌های ساده‌ای تبدیل می‌شوند. برای برآوردگر بیز تحت تابع زیان درجه دو، یک روش تقریبی را تیرلی و کاداک (1986) با استفاده از بسط تیلور و تابع چگالی احتمال نرمال چند متغیره به دست آورده‌اند. در این روش، برآوردگر تقریبی بیز عبارت است از:

$$E(g(\theta)|x)\simeq\sqrt{\frac{\left|\sum^{*}\right|}{\left|\sum\right|}}e^{n(L^*(\hat\theta^*)-L(\hat\theta))},$$

که در آن:

$$L(\theta)=\frac{1}{n}(\log f(x|\theta)+\log\pi(\theta)),$$

و $\sum$ معکوس منفی ماتریس هسین است که در نقطه ماکزیمم $L(\theta)$ که آن را با $\hat{\theta}$ نشان می‌دهیم محاسبه می‌شود، همچنین:

$$L^*(\theta) = L(\theta) + \frac{1}{n}\log g(\theta),$$

و $\sum^*$ معکوس منفی ماتریس هسین است که در نقطهٔ ماکزیمم $L^*(\theta)$ که آن را با $\hat{\theta}^*$ نشان می‌دهیم محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\log L(\alpha,\beta) \propto n_1 \log\alpha - \alpha\sum_{i=0}^{n_1} x_i^{\gamma_0} + n_2\log\beta - \beta\sum_{i=1}^{n_2} y_i^{\gamma_0},\\
&\log \pi(\alpha,\beta) \propto (\mu-1)\log\alpha - \gamma\alpha + (\nu-1)\log\beta - \lambda\beta,\\
&L(\alpha,\beta) \propto \frac{1}{n_1+n_2}\Bigg[(n_1+\mu-1)\log\alpha - \alpha(n_1\overline{x^{\gamma_0}}+\gamma) + (n_2+\nu-1)\\
&\log\beta - \beta(n_2\overline{y^{\gamma_0}}+\lambda)\Bigg],\\
&\frac{\partial L}{\partial\alpha} = \frac{1}{n_1+n_2}\left[\frac{n_1+\mu-1}{\alpha} - (n_1\overline{x^{\gamma_0}}+\gamma)\right] = 0 \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{n_1+\mu-1}{n_1\overline{x^{\gamma_0}}+\gamma},\\
&\frac{\partial L}{\partial\beta} = \frac{1}{n_1+n_2}\left[\frac{n_2+\nu-1}{\beta} - (n_2\overline{y^{\gamma_0}}+\lambda)\right] = 0 \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{n_2+\nu-1}{n_2\bar{y}^{\gamma_0}+\lambda},\\
&L(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \frac{1}{n_1+n_2}\Bigg[[(n_1+\mu-1)\log\frac{n_1+\mu-1}{n_1\overline{x^{\gamma_0}}+\gamma} - (n_1\overline{x^{\gamma_0}}+\gamma)\\
&+(n_2+\nu-1)\log\frac{n_2+\nu-1}{n_2\overline{y^{\gamma_0}}+\lambda} - (n_2\overline{y^{\gamma_0}}+\lambda)\Bigg],\\
&H = \begin{bmatrix} \frac{-\partial^2 L}{\partial\alpha^2} & \frac{-\partial^2 L}{\partial\alpha\partial\beta}, \\ \frac{-\partial^2 L}{\partial\beta\partial\alpha} & \frac{-\partial^2 L}{\partial\beta^2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1+n_2}\frac{n_1+\mu-1}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_1+n_2}\frac{n_2+\nu-1}{\beta^2}\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

پس

$$\sum = \begin{bmatrix} \frac{(n_1+n_2)\alpha^2}{n_1+\mu-1} & 0 \\ 0 & \frac{(n_1+n_2)\beta^2}{n_2+\nu-1}\end{bmatrix},$$

و در نقطه $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\left|\sum\right| &= \frac{(n_1+n_2)^2\hat{\alpha}^2\hat{\beta}^2}{(n_1+\mu-1)(n_2+\nu-1)},\\
&= \frac{(n_1+n_2)}{(n_1+\mu-1)(n_2+\nu-1)}\left(\frac{n_1+\mu-1}{n_1\overline{x^{\gamma_0}}+\gamma}\right)^2\left(\frac{n_2+\nu-1}{n_2\overline{y^{\gamma_0}}+\lambda}\right)^2,
\end{aligned}$$

$$= \frac{(n_1+n_2)^2(n_1+\mu-1)(n_2+\nu-1)}{(n_1\overline{x^{\gamma_0}}+\gamma)^2(n_2\overline{y^{\gamma_0}}+\lambda)^2},$$

در رابطهٔ (۲) ابتدا در عبارت چهارم تقریب $T-K$ی امید ریاضی را به دست می‌آوریم و سپس برای عبارت دوم $j=n_1$ و $i>0$ و برای عبارت سوم $j<n_1$ و $i=0$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} g_3(\alpha,\beta) &= \frac{\beta}{\alpha A+\beta B}, \\ L_3^*(\alpha,\beta) = L(\alpha,\beta) &= \frac{1}{n_1+n_2}\log g_3(\alpha,\beta), \\ &\propto \frac{1}{n_1+n_2}\Bigg[(n_1+\mu-1)\log\alpha-\alpha(n_1\overline{x^{\gamma_0}}+\gamma)+(n_2+\nu-1)\log\beta \\ &-\beta(n_2\overline{y^{\gamma_0}}+\lambda)+\log\frac{\beta}{\alpha A+\beta B}\Bigg], \end{aligned}$$

که پس از مشتق‌گیری نسبت به $\alpha$ و $\beta$ و حل دستگاه زیر $\hat{\beta}_3^*$ و $\hat{\alpha}_3^*$ بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} \frac{n_1+\mu-1}{\alpha}-(n_1\overline{x^{\gamma_0}}+\gamma)-\frac{A}{A\alpha+\beta B}=0, \\ \frac{n_2+\nu-1}{\alpha}-(n_2\overline{y^{\gamma_0}}+\lambda)-\frac{B}{A\alpha+\beta B}=0, \end{cases}$$

حال می‌توان $L_3^*(\hat{\alpha}_3^*,\hat{\beta}_3^*)$ را به دست آورد، همچنین داریم:

$$\begin{aligned} -H_3^* &= \begin{bmatrix} \frac{-\partial^2 L_3^*}{\partial\alpha^2} & \frac{-\partial^2 L_3^*}{\partial\alpha\partial\beta} \\ \frac{-\partial^2 L_3^*}{\partial\beta\partial\alpha} & \frac{-\partial^2 L_3^*}{\partial\beta^2} \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1+n_2}\left(\frac{-(n_1+\mu-1)}{\alpha^2}\cdot\frac{A^2}{(A\alpha+\beta B)^2}\right) & \frac{1}{n_1+n_2}\frac{AB}{(A\alpha+\beta B)^2} \\ \frac{1}{n_1+n_2}\frac{AB}{(A\alpha+\beta B)^2} & \frac{1}{n_1+n_2}\left(\frac{-(n_2+\nu-1)}{\beta^2}\cdot\frac{B^2}{(A\alpha+\beta B)^2}\right) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

و لذا $\sum_3^* = [-H]^{-1}$ و همچنین $\sum_3^*$ را در نقطهٔ $(\hat{\alpha}_3^*,\hat{\beta}_3^*)$ بدست می‌آوریم. بنابراین:

$$E\Big(\frac{\beta}{A\alpha+B\beta}\Big|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}\Big) \simeq \sqrt{\frac{\sum_3^*}{\frac{(n_1+n_2)^2(n_1+\mu-1)(n_2+\nu-1)}{(n_1\overline{x^{\gamma_0}}+\gamma)^2(n_2\overline{y^{\gamma_0}}+\lambda)^2}}}$$

$$\cdot\, e^{(n_1+n_2)\left\{L_3^*(\hat{\alpha}_3^*,\hat{\beta}_3^*)-\frac{1}{n_1+n_2}\left[(n_1+\mu-1)\log\frac{n_1+\mu-1}{n_1\overline{x^{\gamma_0}}+\gamma}-(n_1+\mu-1)+(n_2+\nu-1)\log\frac{n_2+\nu-1}{n_2\overline{y^{\gamma_0}}+\lambda}-(n_2+\nu-1)\right]\right\}},$$

حال در رابطهٔ (۲) برای عبارت دوم $j = n_1$ و $i > 0$ قرار می‌دهیم و $L_1^*$ و $\sum_1^*$ را بدست می‌آوریم و برای عبارت سوم $j < n_1$ و $i = 0$ قرار می‌دهیم و $L_2^*$ و $\sum_2^*$ را بدست می‌آوریم. بنابراین برآوردگر بیز تقریبی به روش $T-K$ به صورت زیر است:

$$\hat{R}_{r,k} = E(R_{r,k}|\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) \simeq$$
$$k\binom{n_2}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}(-1)^{i+l}\frac{1}{B}$$
$$+ k\binom{n_2}{k}\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n_1}{i}\binom{k-1}{l}(-1)^{i+l}\sqrt{\frac{|\Sigma_1^*|}{|\Sigma|}}e^{(n_1+n_2)\{L_1^*(\hat{\alpha}_1^*,\hat{\beta}_1^*)-L(\hat{\alpha},\hat{\beta})\}}$$
$$+ k\binom{n_2}{k}\sum_{j=r}^{n_1-1}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n_1}{j}\binom{k-1}{l}(-1)^{l}\sqrt{\frac{|\Sigma_2^*|}{|\Sigma|}}e^{(n_1+n_2)\{L_2^*(\hat{\alpha}_2^*,\hat{\beta}_2^*)-L(\hat{\alpha},\hat{\beta})\}}$$
$$+ k\binom{n_2}{k}\sum_{j=r}^{n_1-1}\sum_{i=0}^{j}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n_1}{j}\binom{j}{i}\binom{k-1}{l}(-1)^{i+l}\sqrt{\frac{|\Sigma_3^*|}{|\Sigma|}}e^{(n_1+n_2)\{L_3^*(\hat{\alpha}_3^*,\hat{\beta}_3^*)-L(\hat{\alpha},\hat{\beta})\}}.$$

$\square$

همانگونه که قبلاً بیان کرد در سیستم $k$ از $n_2$ از نوع خرابی و حالت‌های خاص سری و موازی، عبارتهای سوم و چهارم حذف می‌شوند و برآوردگر بصورت ساده‌تری بدست می‌آید.

## مراجع


[1] Crooks, G.E. (2019), *Field guide to continuous probability distributions*, Berkeley Jnstitute for Theoretical Sciences (BITS) (Page 29).

[2] Kizilaslan, F. Nadar, M. (2018), *Estimation of reliability in a multicomponent, Stree-Strength model based on a bivariate kumaraswamy distribution,* Stasts Papers (2018) 59: 307-340.

[3] Kohansul, A. (2019), *Bayesion and classical estimation of $R = P(X < Y)$ based on Burr type $XII$ distribution under hybrod progressive censored samples,* Communications in Statistics-Theory and Methods.

[4] Marwa, Kh. Hassan. (2017), *Estimation a Stress-Strenyth Model for* $P(X_{r:n_1} < Y_{k:n_2})$ *Using the Lindley Distribution*, Revista Colombiana De Estadistica 40 (1), 105-121.

[5] Pakdaman, I. and Ahmadi, J. (2013), *Stress-Strenyth reliability for* $P(X_{r:n_1} < Y_{k:n_2})$ *in the exponeutial case*, Journal of Turkish Statistical Association, 6(3), 92-102.

[6] Parameshvar, V. Pandit and Shubhashree, (2018), *Reliability estimation in multicomp. Stress-Strength model based on generalized pareto distribution,* American Journal of Appled Mathematics and Statistics, 6(5), 210-217.

[7] Rostamian, S. Nematollahi, N. (2019), *Estimation of Stress-Strenyth reliability in the mverse gaussian distribution under proyressively type* $II$ censored data, (2019)3 : 175-191.

[8] Tierney, L. and Kadane, J.B. (1986), *Accurate Approximation For Posterior Moments and Marginal Densities*, journal of American Statistical Association, 81 (393), 82-86.