



The Parameter Estimation of AR(1) Model with Change Point and its Application in Annual Inflation Rate Modeling

Rahmanpour, A.¹ , Waghei, Y.¹  Mohtashami Borzadaran, G.R.² 

¹Faculty of Mathematical Sciences and Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.

²Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Corresponding author: Y.Waghei, ywaghei@birjand.ac.ir

Received: 30/9/2024 Revised: 24/1/2025 Accepted and Published Online: 25/1/2025.

Introduction

In a time series, there may be points where the characteristics of the random process governing the time series change. For example, the country's economic policies can suddenly alter the annual inflation rate in response to political and social crises. In this article, the following autoregressive model is considered for modeling change points in the time series

$$Y_t = \begin{cases} \delta_0 + \phi_0 Y_{t-1} + \varepsilon_t & t = 1, \dots, \tau \\ \delta_1 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t & t = \tau + 1, \dots, n \end{cases}$$

where all parameters, including drift, model coefficient, and process variance, are considered to be different before and after the change point, and they are estimated using the method of conditional maximum likelihood.

Material and Methods

In this article, assuming that the error term (ε_t) be a white noise process, the likelihood function was obtained and by derivation of its logarithm (concerning individual parameter, except τ) and set them equal to zero, the MLE of parameters were obtained. The parameter τ , is often unknown and needs to be estimated; however, due to the discrete nature of this parameter, it can not be estimated using differentiation methods. To estimate the parameter τ , the logarithm of the likelihood function has been calculated for various values ranging from 2 to $n - 1$. The value that maximizes the logarithm of

the likelihood function is taken as the MLE of τ . Next, the AR(1) model was fitted to the time series of Iran annual inflation rate, and the model parameters were estimated using a specialized program developed for this purpose. Finally, the inflation rates for 2023 and 2024 were forecasted.

Results and Discussion

In order to check the efficiency of the obtained estimates, a simulation study was conducted with some different values for n and τ . The simulation study results indicate that as the length of the time series (n) increases, the mean square error (MSE) values approach zero, demonstrating the consistency of the obtained estimators. Although the location of the change point (τ) is not within our control, when it is close to the center of the time series ($n/2$), the MSE of estimators is reduced. In this situation, the estimates clearly converge to the values of the parameters by increasing n .

Conclusion

While some researchers, such as Timmer and Pignatiello(2003), considered simpler models where only one parameter changes, this article presents a more flexible model in which all three model parameters jump or change after the change point; this subject increases the flexibility of the model in fitting time series data. The simulation study indicates that when the change point is small, the estimation error of the parameters increases. Similarly, even if the change point is large (close to n), such problems are also likely. In fitting an AR(1) model with a change point to the time series of Iran's inflation rate from 1944 to 2022, the change point was estimated as 2017, which is slightly close to 2022. Therefore, the estimation of the model parameters may not be highly accurate. However, the predicted values of inflation rate for 2023 and 2024 are reasonable and match the current inflation conditions in the Islamic Republic of Iran.

Keywords: Autoregressive Model, Change Point, Parameter Estimation, Time Series.

Mathematics Subject Classification (2010): 62M10, 62F19.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

برآورد پارامترهای مدل اتورگرسیو مرتبه اول با نقطه تغییر و کاربرد آن در مدل سازی نرخ تورم سالانه

آرزو رحمانپور^۱، یدالله واقعی^۱، غلامرضا محتشمی برزادران^۲

^۱ دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند

^۲ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

نویسنده مسئول: یدالله واقعی، ywaghei@birjand.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۷/۹ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۱۱/۵ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۳/۱۱/۶

چکیده: موضوع تشخیص نقطه تغییر یکی از چالش برانگیزترین مسایل آماری است، زیرا تعداد و موقعیت زمانی این نقاط ناشناخته هستند. در این مقاله ابتدا به معرفی مفهوم نقطه تغییر پرداخته و سپس برآورد پارامترها در مدل اتورگرسیو مرتبه اول $AR(1)$ بررسی می شود. به منظور بررسی دقت برآوردهای بدست آمده یک مطالعه شبیه سازی انجام داده و در ادامه دقت و سازگاری برآوردها به کمک MSE مورد بررسی قرار می گیرد. نتایج شبیه سازی نشان دهنده سازگاری برآوردها پارامترهای مدل است، به این معنا که با افزایش حجم نمونه میانگین مربع خطای برآورد پارامترهای مختلف به صفر میل می کند. در ادامه مدل $AR(1)$ با نقطه تغییر به داده های نرخ تورم سالانه (از سال ۱۳۲۳ تا ۱۴۰۱) برازش داده و به کمک آن نرخ تورم برای سال ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳ پیش بینی می شود.

واژه های کلیدی: برآورد پارامترها، سری های زمانی اقتصادی، مدل اتورگرسیو، نرخ تورم، نقطه تغییر
کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62F19, 62M10.

۱ مقدمه

بسیاری از متغیرهای کلان اقتصادی مانند نرخ ارز، نرخ تعرفه، نرخ تورم و جمعیت می تواند در مقاطعی از زمان، تحت تاثیر سیاستهای اقتصادی یا اجتماعی دولت قرار گیرند که این می تواند سبب ایجاد تغییرات اساسی در داده ها



©نویسندگان). ناشر انجمن آمار ایران است.

این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

و در نتیجه تغییرات ناگهانی در روند داده‌ها یا مدل حاکم بر آنها شود. آگاهی از این تغییرات می‌تواند به مردم برای تصمیم‌گیری بهتر و مدیریت مشکلات ایجاد شده کمک کند تا بتوانند بهتر تصمیم بگیرند (سوفرونوف و ما، ۲۰۱۷). تشخیص نقطه تغییر ارتباط نزدیکی با مسئله معروف برآورد نقطه تغییر (CPE) یا تشخیص نقطه تغییر (CPD) دارد. در عین حال برآورد نقطه تغییر برخلاف CPD سعی می‌کند تغییرات شناخته شده در سری‌های زمانی را مدل‌سازی و تفسیر کند. سری‌زمانی مجموعه‌ای از مشاهدات است که بر حسب زمان (یا یک کمیت دیگر) جمع آوری شده باشند. مشاهدات سری‌زمانی یک توالی زمانی داشته و معمولاً به صورت پیاپی به یکدیگر وابسته هستند (کرایر و چان، ۲۰۰۸). کسب وکار، امور مالی، بورس، هواشناسی، اقتصاد، مهندسی صنایع و... از جمله علومی هستند که سری‌زمانی در آن کاربرد فراوان دارد. یکی از پرکاربردترین مدل‌های سری‌زمانی مدل اتورگرسیو است. مدل‌های اتورگرسیو، چنانکه از نام آنها برمی‌آید، نوعی مدل رگرسیونی هستند که Y_t برحسب مشاهدات گذشته خودشان (بصورت برگشتی) مدل‌سازی می‌شوند. مدل اتورگرسیو مرتبه p به صورت

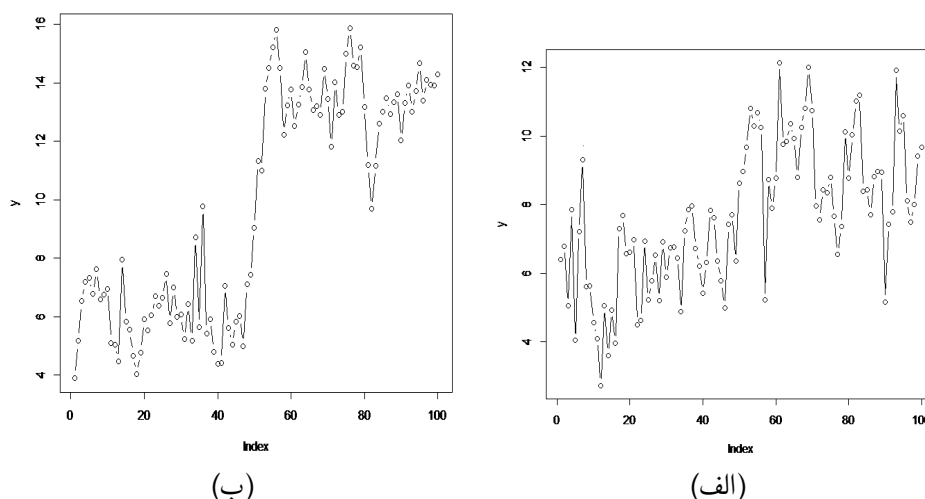
$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

است، که در آن δ پارامتر رانش و برابر $(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)\mu$ است. مدل اتورگرسیو مرتبه اول $AR(1)$ به صورت

$$Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

است. برای برقراری شرط مانایی لازم است که در مدل (۱)، $|\phi| < 1$ باشد (کرایر و چان، ۲۰۰۸). در یک سری‌زمانی اقتصادی ممکن است نقاط زمانی وجود داشته باشند که در آن نقاط، خصوصیات آماری دستخوش تغییر شوند. مثلاً سیاست‌های اقتصادی در یک کشور می‌تواند نرخ تورم ماهانه یا سالانه آن کشور را دچار تغییر ناگهانی کند. در حالت کلی، فرض کنید $y_1 \dots y_T$ مشاهداتی از F_0 باشند و $y_n \dots y_{T+1}$ مشاهداتی از F_1 باشند، در این حالت T را نقطه تغییر می‌گویند.

در برخی منابع مانند پیچ (۱۹۵۴) و نوفرستی (۱۳۹۵) بجای نقطه تغییر از واژه شکست ساختاری استفاده کرده‌اند. در بسیاری از مواقع که داده‌ها در طول زمان جمع آوری می‌شوند، اغلب ویژگی‌های آماری آن‌ها مانند میانگین یا واریانس در طول زمان تغییر می‌کند. نقطه تغییر زمانی اتفاق می‌افتد که ویژگی‌های آماری، به‌عنوان مثال، میانگین یا واریانس مشاهدات، ناگهان تغییر کند. به‌منظور مشاهده تغییراتی که در یک سری‌زمانی ممکن است رخ بدهد. شکل ۱-الف سری‌زمانی شبیه‌سازی شده از مدلی با نقطه تغییر که در آن فقط پارامتر رانش دستخوش تغییر می‌شود را نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌شود که رفتار مدل حدوداً از نقطه 5° به بعد تغییر می‌کند. این تغییر در مقدار ثابت (پارامتر رانش) رخ می‌دهد و از نقطه 5° به بعد افزایش می‌یابد. شکل ۱-ب نیز سری‌های زمانی شبیه‌سازی شده از مدلی با تغییر در ضریب اتورگرسیو را نشان می‌دهد. این شکل نشان دهنده بروز یک تغییر ناگهانی در رفتار مدل است که احتمالاً ناشی از بروز یک افزایش در ضریب اتورگرسیو در نقطه زمانی 5° است.



شکل ۱. الف- یک سری زمانی با تغییر پارامتر رانش و ب- یک سری زمانی با تغییر ضریب اتورگرسیو

۲ پیشنهاد تحقیق

بیشتر تحقیقات انجام شده در زمینه نقطه تغییر مربوط به کشف نقطه تغییر در یک دنباله از داده‌ها یا یک سری زمانی بوده‌اند از جمله تحلیل سری‌های زمانی مالی، اقتصادسنجی **سوفرونوف و همکاران (۲۰۱۲)** که به تشخیص دنباله نقاط تغییر از طریق آنتروپی متقابل می‌پردازد. در تحقیقی دیگر با عنوان یک روش متقابل آنتروپی اصلاح شده برای تشخیص نقاط تغییر در بازار سهام سریلانکا به پردازش سیگنال پرداخته شد (**سونروف و پریادارشان، ۲۰۱۲**). همچنین در پژوهشی دیگر به تشخیص نقطه تغییر در علوم رباتیک، اقتصاد، جمعیت‌شناسی، داروشناسی، روانشناسی، زمین‌شناسی، کنترل فرایند پرداخته شد (**پیچ، ۱۹۵۴**). مطالعات محدودی نیز در زمینه مدل‌های $AR(1)$ با نقطه تغییر انجام شده است که از جمله می‌توان به برآورد تغییر تدریجی پارامتر در فرایند $AR(1)$ (**هوسکوا، ۲۰۲۰**)، آزمون برای نقطه تغییر در سری زمانی (**شائو و ژانگ، ۲۰۱۰**)، مقایسه تفاوت در روش‌ها برای کشف نقطه تغییر در سری‌های زمانی آب اقلیمی (**ژی و همکاران، ۲۰۰۵**) اشاره نمود. **گمبی (۲۰۰۸)** نیز در مقاله‌ای، به کشف نقطه تغییر در سری زمانی اتورگرسیو مرتبه p به روش بردار امتیاز پرداخت. **آکاشی و همکاران (۲۰۱۸)** در مقاله‌ای با عنوان "کشف نقطه تغییر در مدل‌های اتورگرسیو بدون فرض داشتن گشتاور" یک آزمون نسبت درستی برای وجود نقطه تغییر پیشنهاد دادند و خواص مجانبی آن را بررسی کردند. آنها در تحلیل‌های خود روش‌های رگرسیون چندکی و روش‌های درستیابی تجربی را با هم ترکیب کردند. **دوکومنتو و هیندمان (۲۰۲۲)** در تشخیص نقطه تغییر از روش تجزیه فصلی-روند با رگرسیون یا STR استفاده کردند. این روش با کمک متغیر کمکی به پیش‌بینی می‌پردازد و برای مدل سری زمانی به کار می‌رود که می‌توان آن را به‌طور افزایشی تجزیه کرد به این صورت که در بخشی از مدل یک روند همواره در حال تغییر است. قسمت دیگر مدل مولفه‌های فصلی هستند که بسیار آهسته تغییر می‌کنند و در نهایت

آخرین قسمت مدل شامل متغیرهای کمکی است که ممکن است با زمان تغییر کنند. لازمه استفاده از این روش آن است که علاوه بر متغیر اصلی که داده‌های سری‌زمانی را تولید می‌کند متغیرهای کمکی دیگری وجود داشته باشند. در یک مدل اتورگرسیو مرتبه اول مانا، گاهی ممکن است فقط یکی از این پارامترها دچار تغییر شوند. در زمینه برآورد نقطه تغییر نیز تحقیقاتی انجام شده است از جمله [هریشنیا و میا \(۱۹۸۸\)](#) که در تحقیقی تحت عنوان بررسی برآورد نقطه تغییر به برآورد پارامترهای مدل‌های رگرسیون خطی با روش ماکسیمم درست‌نمایی پرداختند. در تحقیقی دیگر [چاکار و همکاران \(۲۰۱۷\)](#) به برآورد میانگین مدل اتورگرسیو مرتبه اول با نقطه تغییر پرداختند. [تیمر و پیگناتیلو \(۲۰۰۳\)](#) سه مدل $AR(1)$ با نقطه تغییر در نظر گرفتند که در هر کدام فقط یکی از سه پارامتر مدل (ضریب، رانش یا واریانس خطا) دچار تغییر می‌شود و در هر مدل که با احتساب نقطه تغییر پنج پارامتر داشت فقط برآورد دو پارامتر را بدست آوردند، ولی در این مقاله یک مدل کلی‌تر در نظر گرفته می‌شود که هر سه پارامتر امکان تغییر دارند. در واقع در این مقاله مدل به داده‌ها اجازه می‌دهد هر سه پارامتر همزمان تغییر کنند و بنابراین با احتساب نقطه تغییر هفت پارامتر برآورد می‌شود، زیرا آن چه در داده‌های واقعی رخ می‌دهد ممکن است تغییر در بیش از یک پارامتر (ضریب، رانش یا واریانس خطا) باشد.

۳ برآورد پارامترهای مدل $AR(1)$

در عمل احتمال اینکه در یک سری‌زمانی دو یا هر سه پارامتر همزمان تغییر کنند وجود دارد. لذا یک مدل کلی که هر سه پارامتر در آن تغییر می‌کند بصورت

$$Y_t = \begin{cases} \delta_0 + \phi_0 Y_{t-1} + \varepsilon_t & t = 1, \dots, \tau \\ \delta_1 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t & t = \tau + 1, \dots, n \end{cases} \quad (2)$$

است، که فرض می‌شود واریانس داده‌ها تا قبل از نقطه تغییر $\sigma_{\varepsilon_0}^2$ و بعد از آن $\sigma_{\varepsilon_1}^2$ باشد. برای برآورد کردن پارامترها به روش ماکسیمم درست‌نمایی، با فرض نرمال بودن و استقلال توزیع خطاها داریم

$$Y_t | y_1, \dots, y_{t-1} \sim \begin{cases} N(\delta_0 + \phi_0 y_{t-1}, \sigma_{\varepsilon_0}^2) & t = 1, \dots, \tau \\ N(\delta_1 + \phi_1 y_{t-1}, \sigma_{\varepsilon_1}^2) & t = \tau + 1, \dots, n \end{cases}$$

بنابراین توزیع شرطی توام در حضور نقطه تغییر به صورت

$$f(y_1, \dots, y_n | y_1) = f(y_2 | y_1) f(y_3 | y_2) \dots f(y_n | y_{n-1})$$

است و بر اساس آن لگاریتم تابع درستنمایی به صورت

$$\begin{aligned} \ell(\phi_0, \phi_1, \delta_0, \delta_1, \sigma_{\varepsilon_0}^2, \sigma_{\varepsilon_1}^2) = & -\frac{\tau-1}{2} \ln(\pi \sigma_{\varepsilon_0}^2) \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\varepsilon_0}^2} \sum_{t=2}^{\tau} [y_t - (\delta_0 + \phi_0 y_{t-1})]^2 \right\} \\ & -\frac{n-\tau}{2} \ln(\pi \sigma_{\varepsilon_1}^2) \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\varepsilon_1}^2} \sum_{t=\tau}^n [y_t - (\delta_1 + \phi_1 y_{t-1})]^2 \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

بدست می‌آید. با فرض اینکه

$$a = \sum_{t=2}^{\tau} y_t, \quad b = \sum_{t=1}^{\tau-1} y_t, \quad c = \sum_{t=1}^{\tau-1} y_t^2, \quad d = \sum_{t=2}^{\tau} y_{t-1} y_t$$

با مشتق گیری از (۳) نسبت به δ_0 برآورد آن به صورت $\hat{\delta}_0 = \frac{1}{\tau-1} \frac{(a - \frac{db}{c})}{(1 - \frac{1}{\tau-1} \frac{b^2}{c})}$ خواهد شد. با فرض اینکه

$$a' = \sum_{t=\tau+1}^n y_t, \quad b' = \sum_{t=\tau}^{n-1} y_t, \quad c' = \sum_{t=\tau+1}^n y_t^2, \quad d' = \sum_{t=\tau+1}^n y_{t-1} y_t$$

برآورد δ_1 به صورت $\hat{\delta}_1 = \frac{1}{n-\tau} \frac{(a' - \frac{d'b'}{c'})}{(1 - \frac{1}{n-\tau} \frac{b'^2}{c'})}$ بدست می‌آید. پس از مشتق گیری از ℓ به ترتیب نسبت به ϕ_0 و ϕ_1 و برابر صفر قرار دادن آنها و قرار دادن مقادیر بدست آمده برای $\hat{\delta}_0$ و $\hat{\delta}_1$ در روابط

$$\hat{\phi}_0 = \frac{\sum_{t=2}^{\tau} y_{t-1} (y_t - \hat{\delta}_0)}{\sum_{t=2}^{\tau} y_{t-1}^2}, \quad \hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=\tau+1}^n y_{t-1} (y_t - \hat{\delta}_1)}{\sum_{t=\tau+1}^n y_{t-1}^2}$$

برآوردهای $\hat{\phi}_0$ و $\hat{\phi}_1$ بدست می‌آیند. در نهایت با مشتق گرفتن از ℓ به ترتیب نسبت به $\sigma_{\varepsilon_0}^2$ و $\sigma_{\varepsilon_1}^2$ مساوی صفر قرار دادن آنها برآوردهای $\hat{\sigma}_{\varepsilon_0}^2$ و $\hat{\sigma}_{\varepsilon_1}^2$ نتیجه می‌شوند. بدیهی است که برای محاسبه برآورد این پارامترها ابتدا $\hat{\delta}_0$ و $\hat{\delta}_1$ و سپس $\hat{\phi}_0$ و $\hat{\phi}_1$ در عبارات

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon_0}^2 = \frac{1}{\tau-1} \sum_{t=2}^{\tau} [y_t - (\hat{\delta}_0 + \hat{\phi}_0 y_{t-1})]^2, \quad \hat{\sigma}_{\varepsilon_1}^2 = \frac{1}{n-\tau} \sum_{t=\tau+1}^n [y_t - (\hat{\delta}_1 + \hat{\phi}_1 y_{t-1})]^2,$$

جایگذاری می‌شود. دقت شود که برآورد همه پارامترهای فوق به τ وابسته است. اگر τ نامعلوم باشد، پس از قرار دادن برآوردهای فوق در (۳)، این عبارت تنها شامل پارامتر τ خواهد بود. بنابراین مقادیر مختلف τ را از ۲ تا $n-1$ در عبارت (۳) قرار داده و مقداری که ℓ را ماکسیم می‌کند به دست می‌آید.

۴ بررسی دقت و سازگاری برآوردگرها

در آمار میزان دقت یک برآورد با شاخص‌هایی چون اریبی و واریانس و نیز میانگین مربعات خطای آنها سنجیده می‌شود. هر چه اریبی و واریانس و در نتیجه میانگین مربعات خطا کمتر باشد آن برآورد بهتر خواهد بود. یک ویژگی دیگر یک برآوردگر خوب سازگاری آن است. خاصیت سازگاری یک معیار مجانبی است که رفتار برآوردگر را وقتی که اندازه نمونه بزرگ باشد بررسی و ارزیابی می‌کند. یکی از نتایج سازگاری این است که با افزایش مشاهدات برآوردگر مورد نظر به سمت مقدار واقعی پارامتر میل می‌کند. برای بررسی دقت و سازگاری برآوردگرها، از مدل (۲) به ازای n و k ‌های مختلف، ۱۰۰۰ مجموعه داده متفاوت شبیه‌سازی شده است. سپس میانگین برآورد پارامترها در تکرارهای مختلف محاسبه شده که در جدول با $\bar{\theta}$ نشان داده شده است. در مجموعه داده‌های سری زمانی k با n رابطه‌ای ندارند زیرا نقطه تغییر هر جایی از سری ممکن است رخ بدهد. اما در شبیه‌سازی، برای اینکه از ازدیاد نتایج جلوگیری شود مقدار k یکبار کمتر از $\frac{n}{4}$ و یکبار نزدیک به $\frac{n}{4}$ در نظر گرفته می‌شود و انتظار می‌رود در نزدیکی $\frac{n}{4}$ نتایج بهتر باشد. همچنین میانگین مجذور خطا و میزان اریبی برآوردگرها به ترتیب به صورت $MSE(\hat{\theta}) = E(\theta - \hat{\theta})^2$ و $B(\hat{\theta}) = \theta - \bar{\theta}$ محاسبه شده است. همان‌طور که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود، برای n ‌های ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ اگر نقطه تغییر k ، عدد کوچکی باشد برآورد پارامترها اریبی قابل توجهی دارد. اما اگر نقطه تغییر بزرگ (وسط سری زمانی) باشد برآورد پارامترها به خود پارامتر نزدیک‌تر خواهد شد. اما وقتی $n = 500$ در نظر گرفته می‌شود مقدار اریبی برای نقطه تغییر کوچک و بزرگ تفاوت زیادی با هم ندارند. همچنین مقایسه اریبی‌ها و MSE ‌ها برای n ‌های مختلف نشان می‌دهد هر چه n بیشتر می‌شود هم برای نقطه تغییر کوچک و هم متوسط اریبی برآوردگرها کم می‌شود و مقادیر MSE به صفر همگرا می‌شود که نشان دهنده سازگاری برآوردگرهاست. در n ‌های ۵۰ و ۱۰۰ برای نقطه تغییر کوچک مقدار اریبی برای پارامتر ϕ_0 و $\sigma_{\varepsilon_0}^2$ بیشتر از نقطه تغییر متوسط است. این نشان می‌دهد اگر نقطه تغییر کوچک باشد برآورد پارامترهای بعد از نقطه تغییر به مقدار واقعی نزدیک‌تر هستند. اما هر چه n بیشتر می‌شود مقادیر اریبی پارامترها برای نقطه تغییر کوچک قبل و بعد از تغییر تفاوت زیادی با هم ندارند. شکل ۲، MSE برآوردگرها را برای نقطه تغییر کوچک و شکل ۳، MSE برآوردگرها را برای نقطه تغییر متوسط به ازای n ‌های منتخب نشان می‌دهند.

۵ مدل‌سازی سری زمانی نرخ تورم سالانه ایران

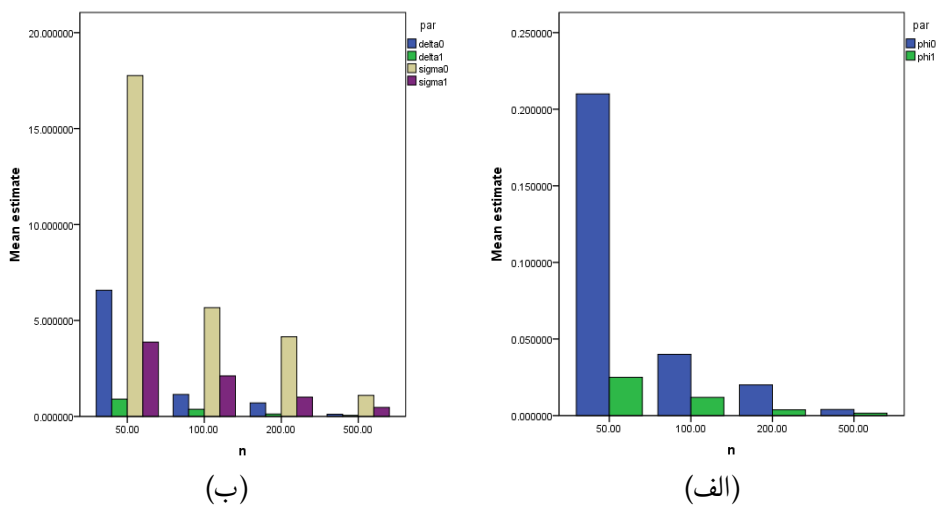
محاسبه و اعلام نرخ تورم، بر عهده بانک مرکزی هر کشور است. در حال حاضر بیشتر اقتصاددانان بر این باورند که سیاست پولی توسط بانک مرکزی وقتی به بهترین وجه اجرا می‌شود که کاملاً مستقل از دخالت‌های سیاسی باشد و از قواعد سیاستی به‌روشنی انعطاف‌پذیری تبعیت کند، بطوری که بتواند به شوک‌ها عکس‌العمل نشان دهد. هدف نهایی این قواعد بایستی کاهش میزان تورم و نوسان آن، از طریق مدیریت انتظارات تورمی خانوارها و شرکت‌ها باشد. برای محاسبه نرخ تورم در فاصله دو مقطع زمانی شاخص قیمت مصرف کننده در مقطع زمانی دوم را از شاخص قیمت در

جدول ۰۱. برآورد، اربیی و میانگین مربع خطای برآورد پارامترها برای مقادیر مختلف پارامتر رانش

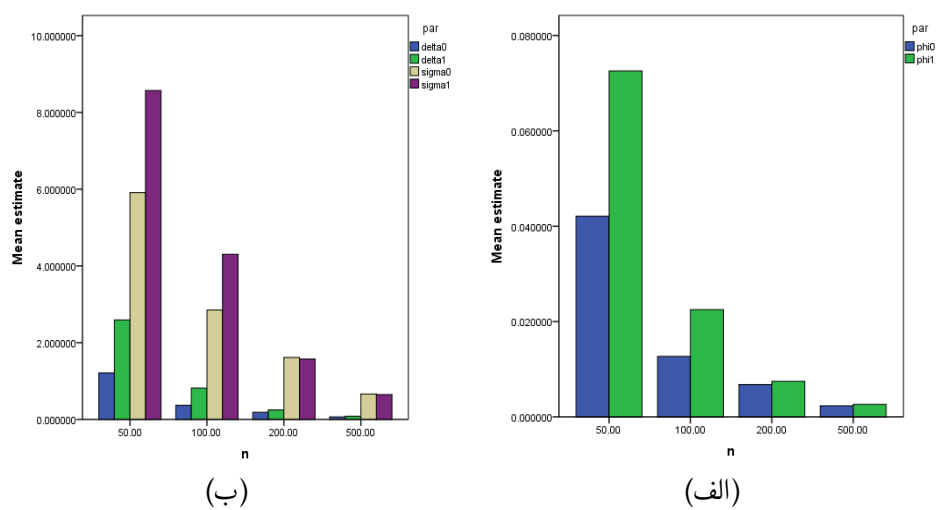
n	k	برآورد	$\phi_0 = 0.7$	$\phi_1 = 0.7$	$\delta_0 = 1$	$\delta_1 = 1/2$	$\sigma_{\varepsilon_0}^2 = 9$	$\sigma_{\varepsilon_1}^2 = 9$
۵۰	۱۰	$\bar{\theta}$	۰.۳۸	۰.۶۲	۲.۱۲	۱.۵۴	۶.۶۵	۸.۶۰
		$B(\hat{\theta})$	۰.۳۲	۰.۰۸	۱.۱۲	۰.۳۴	۲.۳۵	۰.۴۰
		$MSE(\hat{\theta})$	۰.۲۱	۰.۰۳	۰.۵۸	۰.۹۱	۱.۷۷	۳.۸۷
۲۸	۲۸	$\bar{\theta}$	۰.۵۸	۰.۵۷	۱.۴۰	۱.۷۳	۸.۲۵	۸.۲۸
		$B(\hat{\theta})$	۰.۱۲	۰.۱۳	۰.۴۰	۰.۵۳	۰.۷۵	۰.۷۲
		$MSE(\hat{\theta})$	۰.۰۴	۰.۰۷	۱.۲۱	۲.۵۹	۵.۹۱	۸.۵۷
۱۰۰	۳۰	$\bar{\theta}$	۰.۵۹	۰.۶۵	۱.۳۸	۱.۳۸	۸.۴۴	۸.۸۰
		$B(\hat{\theta})$	۰.۱۱	۰.۰۵	۰.۳۸	۰.۱۸	۰.۵۶	۰.۲۰
		$MSE(\hat{\theta})$	۰.۰۴	۰.۰۱	۱.۱۴	۰.۳۷	۵.۶۸	۲.۱۱
۶۰	۶۰	$\bar{\theta}$	۰.۶۵	۰.۶۳	۱.۱۷	۱.۴۶	۸.۶۹	۸.۶۱
		$B(\hat{\theta})$	۰.۰۵	۰.۰۷	۰.۱۷	۰.۲۶	۰.۳۱	۰.۳۹
		$MSE(\hat{\theta})$	۰.۰۱	۰.۰۲	۰.۳۸	۰.۸۲	۲.۸۵	۴.۳۰
۲۰۰	۴۰	$\bar{\theta}$	۰.۶۲	۰.۶۸	۱.۲۹	۱.۲۸	۸.۳۶	۸.۹۳
		$B(\hat{\theta})$	۰.۰۸	۰.۰۲	۰.۲۹	۰.۱۸	۰.۶۴	۰.۰۷
		$MSE(\hat{\theta})$	۰.۰۲	۰.۰۱	۰.۷۰	۰.۱۳	۴.۱۵	۱.۰۱
۱۰۰	۱۰۰	$\bar{\theta}$	۰.۶۷	۰.۶۷	۱.۰۹	۱.۳۲	۸.۸۲	۸.۸۲
		$B(\hat{\theta})$	۰.۰۳	۰.۰۳	۰.۰۹	۰.۱۲	۰.۱۸	۰.۱۸
		$MSE(\hat{\theta})$	۰.۰۱	۰.۰۱	۰.۱۹	۰.۲۵	۱.۶۱	۱.۵۸
۵۰۰	۱۵۰	$\bar{\theta}$	۰.۶۸	۰.۶۹	۱.۰۷	۱.۲۵	۸.۹۰	۸.۹۵
		$B(\hat{\theta})$	۰.۰۲	۰.۰۱	۰.۰۷	۰.۰۵	۰.۱۰	۰.۰۵
		$MSE(\hat{\theta})$	۰.۰۱	۰.۰۱	۰.۱۱	۰.۰۵	۱.۱۰	۰.۴۷
۲۵۰	۲۵۰	$\bar{\theta}$	۰.۶۹	۰.۶۸	۱.۰۴	۱.۲۷	۸.۹۳	۸.۹۲
		$B(\hat{\theta})$	۰.۰۱	۰.۰۲	۰.۰۴	۰.۰۷	۰.۰۷	۰.۰۸
		$MSE(\hat{\theta})$	۰.۰۲	۰.۰۳	۰.۰۷	۰.۰۸	۰.۶۶	۰.۶۵

مقطع زمانی اول کم کرده و حاصل بر شاخص قیمت مصرف کننده در زمان مبدأ تقسیم می شود برای بررسی کاربرد مدل و برآوردهای ارائه شده در بخش ۳ داده های سری زمانی مربوط به شاخص تورم سالانه از سال ۱۳۲۳ تا سال ۱۴۰۱ که توسط بانک مرکزی ایران اعلام شده از سایت https://www.cbi.ir/Inflation/Inflation_FA.aspx تهیه شده است. شکل ۴ نمودار سری زمانی نرخ تورم سالانه ایران را نشان می دهد. آنچه در نمودار مشاهده می شود تغییر قابل ملاحظه ای در پارامتر رانش و ضریب اتورگرسیو بعد از سال ۱۳۹۷ نشان می دهد. بنابراین می توان نقطه تغییر را از روی نمودار، سال ۱۳۹۷ در نظر گرفت. اما برای بررسی دقیق تر، نقطه تغییر با روش ماکسیم درست نمایی (و به کمک یک برنامه محاسباتی) برآورد می شود. این برنامه نقطه تغییر را ۷۴ امین داده تشخیص داد که مقارن با سال ۱۳۹۶ است. برآورد واریانس قبل از نقطه تغییر ۶۵/۱۴ و بعد از آن ۱۵/۱۸ بدست آمد. اکنون با توجه به

۹۰ برآورد پارامترهای مدل اتورگرسیو مرتبه اول با نقطه تغییر



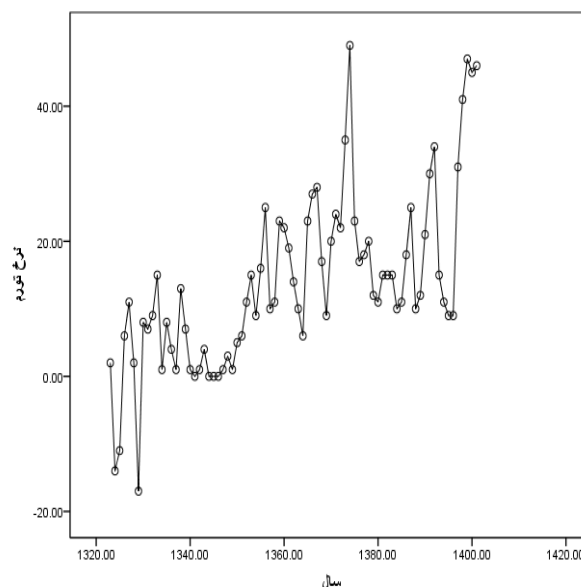
شکل ۲. MSE برآوردگرهای الف- ϕ_0 ، ϕ_1 و ب- δ_0 ، δ_1 ، σ_{ε_0} ، σ_{ε_1} برای نقطه تغییر کوچک



شکل ۳. MSE برآوردگرهای الف- ϕ_0 و ϕ_1 و ب- δ_0 ، δ_1 ، σ_{ε_0} ، σ_{ε_1} برای نقطه تغییر متوسط

پارامترهای برآورد شده، مدل (۲) به صورت

$$\hat{Y}_t = \begin{cases} ۴۱۳ + ۰/۶۷۴Y_{t-1} & t = ۱, \dots, ۷۴ \\ ۳۷/۶۸ + ۰/۱۶۹Y_{t-1} & t = ۷۵, \dots, ۷۹ \end{cases} \quad (۲)$$



شکل ۴. شاخص تورم از سال ۱۳۲۳ تا سال ۱۴۰۱

بازنویسی می‌شود. که در آن مقدار پارامتر رانش و ضریب اتورگرسیو برآورد شده، قبل و بعد از نقطه تغییر تفاوت قابل ملاحظه‌ای با هم دارند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که وجود نقطه تغییر پارامتر رانش و ضریب اتورگرسیو را دستخوش تغییر قرار داده است. حال با استفاده از مدل (۴) نرخ تورم برای سال 1402 $\hat{Y}_{1402} = 37.68 + 0.169(46.5) \simeq 45.54$ پیش‌بینی می‌شود. با قرار دادن مقدار تورم سال 1402 در این مدل می‌توان تورم سال 1403 را به صورت $\hat{Y}_{1403} = 37.68 + 0.169(45.54) \simeq 45.38$ پیش‌بینی کرد.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

آنچه که در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفت رفتار سری‌های زمانی در حضور نقطه‌ی تغییر بود. نقطه تغییر ممکن است تمام پارامترهای مدل را تغییر دهد. بنابراین در این پژوهش مدلی با ۶ پارامتر در نظر گرفته شد. به کمک فرمول‌های ریاضی و برنامه‌های محاسباتی در نرم افزار R برآورد پارامترها بدست آمد. سپس به کمک شبیه‌سازی دقت برآوردها مورد بررسی قرار گرفت. نتایج جدول ۱ و نمودارها نشان دادند که با بیشتر شدن مقدار n دقت برآوردها بیشتر و سازگاری آن‌ها تایید می‌شود. همچنین کوچک بودن نقطه تغییر سبب می‌شود که مقادیر برآوردها از پارامترها فاصله پیدا کند در حالیکه برای نقاط تغییری که نزدیک به وسط سری‌های زمانی باشند برآوردهایی نزدیک به مقدار پارامتر

بدست می‌آید. دلیل این امر هم این است که وقتی نقطه تغییر کوچک است تعداد داده‌های قبل از نقطه تغییر کم و داده‌های بعد از نقطه تغییر زیاد است و بنابراین وقتی داده‌ها کم باشد نمی‌توانند برآوردهای مناسبی برای پارامترها ارائه دهند. در نتیجه وقتی نقطه تغییر تقریباً در وسط داده‌ها باشد قبل و بعد از نقطه تغییر تعداد داده‌های تقریباً برابری دارند و نتایج در هر دو طرف بهتر خواهند شد. با استفاده از داده‌های مربوط به نرخ تورم سالانه در ایران پارامترهای مدل (۲) برآورد شد. نتایج نشان داد برای داده‌های نرخ تورم نقطه تغییر پارامتر رانش و ضریب اتورگرسیو را دستخوش تغییر قرار داده است. البته نقطه تغییر در اواخر سری زمانی رخ داد که بعد از آن تنها ۵ مشاهده وجود دارد و این دقت پیش‌بینی را کاهش می‌دهد. در تبیین زمان رخ دادن نقطه تغییر می‌توان چنین گفت که افزایش قیمت‌های جهانی کالاهای غیر سوختی از نیمه دوم سال ۱۳۹۵ و در نتیجه افزایش شاخص قیمت وارداتی و رشد نقدینگی و کاهش سهم شبه پول از رشد نقدینگی و همچنین کاهش محدود در نرخ سود بانکی از جمله عوامل تأثیرگذار بر افزایش تورم از نیمه دوم سال ۱۳۹۵ و تداوم این روند در سال ۱۳۹۶ بوده است. در آذرماه ۱۳۹۶ قیمت دلاری و ریالی کالاهای وارداتی ایران نیز در بالاترین مقدار خود از بعد سال ۱۳۹۴ بوده است. این عوامل را می‌توان در نرخ تورم بالای سال ۱۳۹۶ تأثیرگذار دانست. همین موضوع سبب شده که رفتار سری زمانی نرخ تورم در سال ۱۳۹۶ دچار تغییر ناگهانی شود و مدل داده‌ها از این سال به بعد دچار تغییر شود. در پایان نرخ تورم برای سال ۱۴۰۲ پیش‌بینی شد. نتایج نشان داد که نرخ تورم برای سال ۱۴۰۲ برابر با ۴۵/۵۴ است که نسبت به سال ۱۴۰۱ کاهش اندکی دارد. نرخ تورم سال ۱۴۰۲ تاکنون بطور رسمی از سایت بانک مرکزی اعلام نشده است که امکان مقایسه نتایج بدست آمده با واقعیت وجود داشته باشد. پیش‌بینی تورم برای سال ۱۴۰۳ با مدل بدست آمده نیز ۴۵/۳۸ است که اندکی از سال ۱۴۰۲ کمتر است و نشان می‌دهد نرخ تورم هرچند بسیار بزرگ است ولی رو به ثبات است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات و پیشنهادهای داوران، سردبیر، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله که در ارتقا و ارائه بهتر مقاله موثر بود کمال تشکر را دارند.

مراجع

نوفروستی، م. (۱۳۹۵)، ریشه واحد و همجمعی در اقتصادسنجی، انتشارات مؤسسه خدمات فرهنگی رسا.

Akashi, F., Dette, H. and Liu, Y. (2018), Change Point Detection in Autoregressive Models with No Moment Assumptions, *Journal of Time Series Analysis*, 763-786.

Chakar, S., Lebarbier, E., Levy-Leduc, C. and Robin, S. (2017), A Robust Approach

- for Estimating Change-points in the Mmean of an AR(1) Process, *Bernoulli*, **23**(2), 1408-1447.
- Cryer, J. and Chan, K. S. (2008), *Time Series Analysis with Applications in R*, Springer, New York.
- Dokumentov, A., and Hyndman, R. J. (2022), STR: Seasonal-trend decomposition using regression. *Informs Journal on Data Science*, **1**(1), 50-62.
- Gombay, E. (2008), Change Detection in Autoregressive Time Series, *Journal of Multivariate Analysis*, **99**(3), 451-464.
- Hrishnaiah, P. R., and Miao, B. Q. (1988), Review About Estimation of Change point, Handbook in Statistics. *Quality Control and Reliability, North-Holland*, 375-402.
- Huskova, M., Praskova, Z. and Steinebach, J. G. (2020), Estimating a Gradual Parameter Change in an AR(1)-Process, *Śląski Przegląd Statystyczny*, **18**(24), 254-262.
- Pang, T., Zhang, D. and Chong, T. L. (2014), Asymptotic Inferences for An AR(1) Model with A Change Point: Stationary and Nearly Non-stationary Cases, *Journal of Time Series Analysis*, **35**(2), 133-150.
- Page, E.S. (1954). Continuous Inspection Schemes, *Biometrika*, **1**, 100-115.
- Priyadarshana, M. and Sofronov, G. (2012), A modified Cross-Entropy Method for Detecting Change-Points in the Sri-Lankan Stock market, *In Proceedings of the IASTED International Conference on Engineering and Applied Science, EAS 2012*, 319–326.
- Sofronov, G., Polushina, T. and Priyadarshana, M. (2012), Sequential Change-Point Detection Via the Crossentropy Method, *In B. Reljin and S. Stankovic (Eds.), The 11th Symposium on Neural Network Applications in Electrical Engineering*, 185–188.

Sofronov, G. and Ma, L. (2017), Change-Point Detection in Time Series Data via the Cross-Entropy Method, *In Proceedings of the 22nd International Congress on Modelling and Simulation*, Tasmania, Australia, 8 December 2017; pp. 195–201.

Shao, X. and Zhang, X. (2010), Testing for Change Points in Time Series, *Journal of the American Statistical Association*, **105**(491), 1228–1240.

Timmer, D. H. and Pignatiello Jr, J. J. (2003), Change Point Estimates for the Parameters of an AR(1) Process, *Quality and Reliability Engineering International*, **19**(4), 355–369.

Xie, X., Brown, J.S., Bush, D. and Eckert, C.A. (2005), Bubble and Dew point Measurements of the Ternary System Carbon Dioxide + Methanol + Hydrogen at 313.2 K. *Journal of Chemical & Engineering Data*, **50**(3), 780–783.

پیوست: برنامه‌های R

```
#.....
# data.sim(): simulates the AR(1) model with change point
#           Model (3) in the article
# .....
data.sim=function(n,delta0,delta1,phi0,phi1, sig0,sig1 ,tau){
# sig0 = Standard Deviation of the first epsilon_i, (i = 1,...,tau)
# sig1 = Standard Deviation of other epsilon_i, (i = tau+1,...,n)
y = rep(NA ,n)
MEANy1 = delta0/(1 - phi0)
SDy1 = sig0*sqrt(1/(1-phi0^2))
y[1] = rnorm(1, MEANy1 ,SDy1)
for( t in 2:tau)
y[t] = delta0 + phi0*y[t[1- + rnorm(1 , 0 , sig0)
for( t in (tau+1):n)
y[t] = delta1 + phi1*y[t[1- + rnorm(1 , 0 , sig1)
plot(y,type="l" , col = 2)
return(y)
}
#.....
#estimate(): At first simulates a time series from AR(1) model
```

```

#           with change point, then calculates the parameter
#           estimation of model (3) using conditional ML Method.
#           This function also can calculate the parameter
#           estimation for real time series data.
# .....
estimate = function(y) {
y=data.sim(n=46,delta0=4.5,delta1=6.075,phi0=0.3,phi1=0.8,
sig0 23.1=sig1=1.27,tau=15)
n = length(y)
delta0=deltaa0=delta1=phi0=phi1=sigma1.2=sigma0.2=logL=rep(NA,n)
for(k in 4:(n - 3)){
a=sum(y[2:k])
b=sum( y[1:(k - 1)])
c=sum(y[1:(k - 1)]^2)
d=sum(y[1:(k - 1)]*y[2:k])
a1=sum(y[(k + 1):n])
b1=sum(y[k:(n - 1)])
c1=sum(y[(k + 1):n]^2)
d1=sum(y[k:(n - 1)]*y[(k+1):n])
delta0[k] = (1/(k - 1))*(a-d*b/c)/(1-(b^2/((k - 1)*c)))
delta1[k] = (1/(n - k))*(a1-d1*b1/c1)/(1 - (b1^2/((n - k)*c1)))
phi0[k]=(d-sum(y[1:(k - 1)])*delta0[k])/c
phi1[k]=(d1-sum(y[k:(n - 1)])*delta1[k])/(sum(y[k:(n - 1)]^2)) # c1
sigma0.2[k]=sum((y[2:k]-(delta0[k]+phi0[k]*y[1:(k - 1)]))^2)/(k - 1)
sigma1.2[k]=sum((y[(k+1):n]-(delta1[k]+phi1[k]*y[k:(n - 1)]))^2)/(n - k)
logL[k]= -((k - 1)/2)*log(2*pi*sigma0.2[k])-((n - k)/2)
*log(2*pi*sigma1.2[k])-(n - 1)/2
deltaa0[k] = (1/(k - 1))*(a-d*b/c)/(1-(b^2/((k - 1)*c)))
}
k = c(1:n)
mat=round(cbind(k,delta0, delta1,phi0 ,phi1 ,sigma0.2, sigma1.2,logL),3)
tau.hat=which.max(logL)
par.est=mat[tau.hat,]
plot(logL)
return(list(mat,par.est))}
#.....
# PE(): for each of 1000 simulated time series from AR(1) model
# (with change point) calculate the average of parameter
# estimations and MSE, which will be used for the entries of Table 1.
#.....
PE=function(n=50,k=10,phi00=0.7,phi11=0.7,delta00=1,delta11=1.2,
sig00 =3,sig11=3, m=1000){
phi0 = delta0 = sigma0.2=phi1 = delta1 = sigma1.2=rep(NA,m)

```

```

par(ask=F)
for(j in 1:m){
y=data.sim(n=n ,delta0=delta00,delta1=delta11,phi0=phi00,
phi1=phi11,sig0 =sig00,sig1=sig11,tau=k)
a = sum(y[2:k])
b = sum(y[1:(k - 1)])
c = sum(y[1:(k - 1)]^2)
d=sum(y[1:(k - 1)]*y[2:k])
a1=sum(y[(k + 1):n])
b1=sum(y[k:(n - 1)])
c1=sum(y[(k + 1):n]^2)
d1=sum(y[k:(n - 1)]*y[(k + 1):n])
delta0[j] = (1/(k - 1))*(a-d*b/c)/(1-(b^2/((k - 1)*c)))
delta1[j] = (1/(n - k))*(a1-d1*b1/c1)/(1 - (b1^2/((n - k)*c1)))
phi0[j]=(d-sum(y[1:(k - 1)]*delta0[j])/c
phi1[j]=(d1-sum(y[k:(n - 1)]*delta1[j])/c1
sigma0.2[j]=sum((y[2:k]-(delta0[j]+phi0[j]*y[1:(k - 1)]))^2)/(k - 1)
sigma1.2[j]=sum((y[(k + 1):n]-(delta1[j]+phi1[j]*y[k:(n - 1)]))^2)/(n - k)
}
MSE.phi0=mean((phi0 - phi00)^2)
MSE.phi1=mean((phi1 - phi11)^2)
MSE.delta0=mean((delta0 - delta00)^2)
MSE.delta1=mean((delta1 - delta11)^2)
MSE.sig0=mean((sigma0.2 - sig00^2)^2)
MSE.sig1=mean((sigma1.2 - sig11^2)^2)
par(ask = T)
plot(phi0)
lines(c(1,1000),c(phi00,phi00) ,col=2)
plot(phi1)
plot(delta0)
result= list(phi0.bar=mean(phi0),MSE.phi0 = MSE.phi0 ,
MSE.phi1 = MSE.phi1,MSE.delta0 = MSE.delta0,MSE.delta1 = MSE.delta1,
MSE.sig0 = MSE.sig0,MSE.sig1 =MSE.sig1, delat0.bar=
mean(delta0),sigma0.2.bar = mean(sigma0.2),
phi1.bar= mean(phi1),
delta1.bar = mean(delta1), sigma1.2.bar = mean(sigma1.2))
return(result)
}

```