شبیه سازی جریان‌های آرام و درهم در داخل کانال با انبساط ناگهانی با روش گردابه‌های تصادفی

بهروز ظفرمند
استاد یار علمی - صنعتی مجتمع عالی آموزش و پژوهشی صنعت آب و برق (خراسان)
استاد یار دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

محسن کهرم
دانشیار دانشگاه فردوسی مشهد

محمدرضا کرباس‌فروش طوسی
مربی علمی - صنعتی مجتمع عالی آموزشی و پژوهشی صنعت آب و برق (خراسان)

مجتمع آموزشی و پژوهشی صنعت آب و برق (خراسان) - مشهد -صندوق پستی ۴۳۵-۹۱۷۳۵

چکیده :
این مقاله اختصاص به بررسی جریان‌های آرام و درهم در داخل یک کانال با انبساط ناگهانی با استفاده از روش گردابه‌های تصادفی (Random vortex Method) دارد. در ابتدا به شرح مدل پرداخته می‌شود، آنگاه کاربرد آن در مورد جریان در یک کانال با انبساط ناگهانی بیان می‌گردد. سرعت متوسط، نوسانات سرعت و خطوط جریان به منظور مشخص نمودن مناطق چرخشی محاسبه و رسم شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: روش گردابه‌های تصادفی (RVD) - انبساط ناگهانی، جریان درهم دو بعدی (Turbulent Flow 2-D)

مقدمه:

روش عددی گردابه‌های تصادفی جهت حل معادلات حرکت دوبعدی و تابع زمان سیالات غیرقابل تراکم در جریان‌های آرام و درهم بکار برده می‌شود. در این روش با صفر نمودن سرعت مماسی بر روی دیواره‌ها، تعدادی گردابه با سیرکولاسیون محدود بوجود می‌آید. محاسبات در زمان‌های مختلف با حل معادلهٔ انتقال ورتیسیته در دو مرحلهٔ جابجایی (Convection) و پخش (Diffusion) انجام می‌گیرد.

میدان سرعت لحظه‌ای نیز با انتگرال‌گیری از معادلهٔ پیوستگی و معادلهٔ مربوط به تعریف ورتیسیته (vorticity) حاصل می‌گردد و در نهایت میدان فشار لحظه‌ای نیز از حل معادلهٔ پواسونی که فشار را با مشتقات سرعت لحظه‌ای ربط می‌دهد، بدست می‌آید. به مانند هر روش عددی، روش گردابه‌های تصادفی نیز مزایا و معایبی دارد. از بین مزایای این روش، می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:
۱- هیچ‌گونه ساده‌سازی در معادلات وجود ندارد. ۲- بر خلاف مدلهای معمول مانند K-ε، این روش نیازی به معادلات کمکی ندارد. ۳- این روش در مورد تمام جریانها اعم از آرام و درهم کاربرد دارد. ۴- یکی از مشخصه‌های برجستهٔ این روش حل معادلات تابع زمان است. ۵- از آنجا که در این روش، حرکت ذرات به صورت لاگرانژی بررسی می‌شود، مشکلات مربوط به ترمهای غیرخطی معادلات حرکت ناویر - استوکس مرتفع می‌گردد. این موضوع باعث می‌شود که بتوان سرعت را بسهولت در مناطقی که دارای گرادیان سرعت بزرگ هستند محاسبه نمود. ۶- با این روش می‌توان مناطق بزرگ چرخشی را قابل مشاهده نمود.
علیرغم تمام مزیتهای شمرده شده می‌توان دست کم به دو مورد اشاره نمود که جزء معایب این روش است:
۱- بخاطر طبیعت لاگرانژی این روش، زمان محاسبه طولانی است. ۲- این روش برای جریانهای سه بعدی و جریانهای با تقارن محوری کاربرد ندارد.
در این مقاله به شرح روش گردابه‌های تصادفی و نتایج بدست آمده در یک کانال با انبساط ناگهانی با عدد رینولدز ۵۰ و ۱۰۰۰۰۰ اشاره خواهد شد.

معادلات حاکم

معادلهٔ پیوستگی و معادلات حرکت دوبعدی و تابع زمان بصورت زیر هستند:

$$\nabla . U = 0 \quad (۱)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U.\nabla U = -\nabla P + \frac{1}{Re}\nabla^2 U \quad (۲)$$

که $U= (u,v)$ و $X= (x,y)$ بترتیب بردار سرعت و بردار موقعیت هستند که توسط یک سرعت مرجع (U_0) و یک طول مرجع (H) بی‌بعد شده‌اند، t زمان بی‌بعد شده، P فشار بی‌بعد شده، $Re = \frac{\rho U_0 H}{\mu}$ عدد رینولدز، ρ چگالی و μ لزجت سیال می‌باشد.

شرایط مرزی عبارتند از :

$U = (0,0)$ بر روی دیواره (۳)

$U = (1,0)$ در ورود به کانال (۴)

و شرط اولیه عبارتست از جریان پتانسیل و غیر لزج در تمام کانال.

بمنظور رهایی از جملات غیرخطی معادلهٔ ناویراستوکس، در روش گردابه‌های تصادفی از معادلهٔ انتقال ورتیسیته استفاده می‌شود که بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\omega = \nabla \times U$$

که در دو بعد بصورت زیر در می‌آید:

$$\omega = (0,0,\omega) = (0,0,\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (۵)$$

با گرفتن کرل از معادلات ناویر استوکس و با عنایت به این مطلب که کرل گرادیان فشار و دیورژانس سرعت صفر هستند، خواهیم داشت :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U.\nabla\omega = \frac{1}{Re}\nabla^2\omega \quad (۶)$$

که این معادلهٔ انتقال ورتیسیته می‌باشد. در این روش، معادلهٔ (۶) در دو مرحلهٔ جابجایی و پخش، حل می‌شود:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U.\nabla\omega = 0 \quad (۷)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re}\nabla^2\omega \quad (۸)$$

حل کلی معادلهٔ انتقال با جمع حل‌های معادلات (۷) و (۸) بدست می‌آید.

معادلهٔ (۷) بوسیلهٔ جابجایی لاگرانژی، تعداد زیادی گردابه (که در واقع توزیع ω هستند) حل می‌شود. این حل با کمک تعریف تابع جریان ψ و قانون Biot - Savart بصورت زیر است :

$$U(X) = \iint k(X - X')\,\omega(X')\,dX' \quad (۹)$$

$$k(X) = \frac{-1}{2\pi}\frac{(y,-x)}{r^2}$$

که

k کرنل رابطهٔ پواسون تابع جریان، $dX = dxdy$ و $r^2 = x^2+y^2$ می‌باشد. رابطهٔ (۹) سرعت را به توزیع ورتیسیته ربط می‌دهد. با استفاده از تئوری کلوین - هلمهلتز، می‌توان یک فرم لاگرانژی از معادلهٔ (۷) داشت: اگر $\chi(x_0,t)$ موقعیت یک ذره در لحظهٔ t باشد که از x_0 می‌گذرد و اگر $\omega(x_0)$ توزیع ورتیسیته در لحظه $t= 0$ باشد، معادلهٔ (۷) معادل است با :

$$\omega(\chi(x_0, t)) = \omega(x_0) \quad (۱۰)$$

و χ حل معادلهٔ زیر است :

$$\frac{d\chi}{dt} = U(\chi(x_0,t)) \quad \text{با} \quad \chi(x_0,t=0) = x_0 \quad (۱۱)$$

معادلهٔ (۱۱) در واقع سیستمی متشکل از بینهایت معادله (به تعداد ذرات سیال) دیفرانسیل معمولی است و برای کاهش این سیستم به تعداد محدودی معادلهٔ دیفرانسیل، میدان ورتیسیته به تعدادی المان گردابه تجزیه می‌شود. هر المان از گردابه، سیرکولاسیونی برابر Γ انتقال می‌دهد که از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\Gamma_i = \iint \omega(X)\,dX = \omega(X_i)\,\delta A_i \quad (۱۲)$$

و به منظور حذف نقطهٔ منفرد مرکز هر گردابه، توزیع ورتیسیته در هر المان بر اساس یک تابع (Core function) بیان می‌شود [1]. این تابع می‌تواند فرمهای متفاوتی داشته باشد بقسمی که نقطهٔ منفرد در مرکز گردابه را از بین ببرد. با این تعریف خواهیم داشت :

$$\omega(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i f_\delta(x,y) \quad (۱۳)$$

تابع f تابع شعاعی و متقارن است. با جایگزینی معادلهٔ (۱۳) در معادلهٔ (۹)، سرعت القاء شده توسط میدان ورتیسیته بدست می‌آید:

$$U(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i k_\delta(x-x', y-y') \quad (۱۴)$$

که :

$$k_\delta(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(y,-x)}{r^2}\,\kappa\left(\frac{r}{\delta}\right) \quad (۱۵)$$

و

$$\kappa\left(\frac{r}{\delta}\right) = 2\pi \int_0 rf(r)\,dr \qquad (۱۶)$$

و خلاصه اینکه با استفاده از Core function توزیع ورتیسیته در داخل المان گردابه مشخص شده و سرعت در مرکز هر گردابه مقداری محدود خواهد داشت. فرم تابع f معمولاً بصورت زیر انتخاب می‌شود: (δ شعاع گردابه است)

$$\begin{cases} f(r) = \dfrac{1}{2\pi} & \text{if} \quad r \le \delta \\ f(r) = 0 & \text{if} \quad r > \delta \end{cases} \qquad (۱۷)$$

حال حرکت گردابه‌ها توسط تعداد محدودی از معادلات دیفرانسیل و بصورت لاگرانژی صورت می‌گیرد:

$$\frac{dX_j}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i\, k_\delta (x_j - x_i) \qquad (۱۸)$$

با جایگزینی معادلهٔ (۱۵) در معادلهٔ (۱۸)، سرعت القاء شده بر روی گردابه j‌ام بدست می‌آید. اگر فرض کنیم $w= u+iv$ و $i = \sqrt{-1}$ باشد، فرم فشرده شدهٔ معادلهٔ (۱۸) بصورت زیر خواهد بود:

$$\bar{W}(z_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{-i\Gamma_i |z_j - z_i|}{2\pi . Max(|z_j - z_i|, \delta)} \frac{1}{z_j - z_i} \qquad (۱۹)$$

که $\bar{W} = u - iv$ مزدوج سرعت W است.

برای صفر کردن سرعت عمودی بر روی دیواره، از انتقال همدیس شوراتز - کریستوفل استفاده می‌شود. این انتقال قسمت داخلی کانال را به نیم صفحهٔ بالائی صفحهٔ انتقال t نقش می‌کند و برای از بین بردن سرعت قائم القاء شده گردابه‌ها در داخل کانال، از تصویر گردابه استفاده می‌شود که مؤلفهٔ قائم سرعت موجود بر روی دیواره را از بین می‌بردو اگر U_s سرعت مماسی بر روی دیواره باشد، سیرکولاسیون مورد نیاز جهت از بین بردن این سرعت، عبارتست از :

$$\Gamma = -\oint U_s . ds \qquad (۲۰)$$

که s جهت مماس بر سطح است. بدین ترتیب گردابه‌ها بخاطر صفر شدن سرعت لغزشی روی دیواره، بوجود می‌آیند و توسط پخش از دیواره جدا شده و وارد جریان اصلی می‌شوند و در مرحلهٔ بعد توسط پخش و توسط جابجائی (معادلهٔ ۱۹) به حرکت خود ادامه می‌دهند.

دومین گام انتقال ورتیسیته (معادلهٔ ۸) با جابجائی تصادفی گردابه‌ها بر اساس یک متغیر تصادفی گوسی انجام می‌گیرد. حل یک بعدی معادلهٔ (۸) توسط تابع گرین زیر بیان می‌شود:

$$Gr(x,t) = \left(\frac{Re}{4\pi t}\right)^{1/2} . \exp\left(-\frac{Re}{4t} x^2\right) \qquad (۲۱)$$

که دقیقاً بمانند چگالی تابع احتمال گوسی با متغیر تصادفی η، مقدار متوسط صفر و انحراف از معیار σ می‌باشد :

$$P(\eta) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\eta^2\right) \qquad (۲۲)$$

دو معادلهٔ اخیر کاملاً یکسانند اگر $\sigma = \sqrt{\frac{2t}{Re}}$ باشد.

در دو بعدی نیز همین حکم صادق است. لذا حل مرحلهٔ پخش انتقال ورتیسیته عبارتست از دو جابجائی عمود بر هم که در واقع متغیرهای تصادفی با توزیع گوسی، مقدار متوسط صفر و انحراف از معیار $\sqrt{\frac{2\Delta t}{Re}}$ هستند و Δt گام زمانی محاسبه می‌باشد. بنابراین اگر $z_j(t)$ موقعیت گردابه j‌ام در زمان t باشد، موقعیت آن در زمان $t+\Delta t$ از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$z_j(t + \Delta t) = z_j(t) + W\Delta t + \eta j \qquad (۲۳)$$

که $\eta_j = \eta_x + i\eta_y$، η_x و η_y متغیرهای تصادفی گوسی هستند و W از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\bar{W}(z_j) = \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} W(t_j,t_i) - \sum_{i=1}^{N} (t_j,\bar{t}_i + W_p(t_j)) \right] F(t_j) \qquad (۲۴)$$

جملهٔ اول این رابطه، همان رابطهٔ (۱۹) است؛ جمله دوم، مجموعهٔ سرعتهای القاء شده توسط تصاویر گردابه‌ها بر روی گردابه زام؛ جملهٔ سوم، سرعت پتانسیل عبوری از نقطهٔ z_j و $F(t_j)$ تابع انتقال شوارتز کریستوفل می‌باشد.

نتایج عددی

تابع شوارتز کریستوفل برای کانال با انبساط ناگهانی بصورت زیر است:

$$F(t) = \frac{dt}{dz} = \frac{\pi}{he} \frac{t\sqrt{t^2-\beta^2}}{\sqrt{t^2-1}} \qquad (۲۵)$$

که در این رابطه $Z= x+iy$ نقطه‌ای در داخل کانال، t نقطه متناظر z در صفحه انتقال و he فاصله دو صفحه در قسمت توسعه یافته و hi فاصله دو صفحه قبل از انبساط و $\beta=\frac{he}{hi}$ می‌باشد. (شکل ۱)

سیال ورودی به کانال (قبل از انبساط) معادل است با یک چشمه بقدرت ۲Q و سیال خروجی از کانال متناظر با یک چاه باهمان قدرت در صفحه انتقال است [۳]. از آنجا که رابطهٔ صریحی برای $t=t(z)$ از معادله بالا بدست نمی‌آید لذا برای انتقال هر گردابه و هر نقطه از کانال به صفحه انتقال (t) باید معادله (۲۵) بصورت عددی و با یک شرط اولیه مناسب حل شود، که در اینجا روش استفاده شده رانگ کوتای مرتبه ۴ و شرط اولیه $Z= (0,0)$ و $t = (0,i)$ انتخاب شده‌اند. طول کانال در قبل از انبساط $X^*=-۳$ و در بعد از انبساط $X^*= ۱۲$ در نظر گرفته شده است که این طولها نسبت به he فاصله دو صفحه در قسمت توسعه یافته کانال بی‌بعد شده‌اند، همچنین $\Delta t = ۰{,}۱$ و $\Gamma_m = ۰{,}۰۳$ در نظر گرفته شده‌اند که Δt گام زمانی و Γ_m حداکثر سیرکولاسیون تخصیص داده شده به هر گردابه است. به ازاء مقادیر مختلف β نتایج استخراج گردیده‌اند که این نتایج عبارتند از سرعت لحظه‌ای، سرعت متوسط و محاسبه تابع جریان و رسم خطوط جریان به منظور قابل مشاهده نمودن نقاط بزرگ چرخشی در قسمت انبساط یافته کانال. اضافه می‌نماید که کلیهٔ سرعتها نسبت به سرعت ورودی کانال و کلیهٔ ابعاد نسبت به فاصله بین دو صفحه در بعد از انبساط بی‌بعد شده‌اند.

محاسبه با یک جریان پتانسیل در داخل کانال شروع می‌شود و با ارضاء شرایط لغزشی بر روی دیواره‌ها، گردابه‌ها تولید شده و به میدان جریان راه می‌یابند. پس از آنکه تعداد گردابه‌ها در داخل کانال به مقدار ثابتی رسید، می‌توان سرعت در داخل جریان را از رابطه‌ای مشابه رابطهٔ (۲۴) (بدون محدودیت $i\neq j$ در جمله اول) بدست آورد. چنین میدان سرعتی لحظه‌ای است و برای بدست آوردن سرعت متوسط باید در چندین گام زمانی محاسبه را تکرار کرد و سپس متوسط‌گیری نمود.

پس از محاسبه سرعت متوسط با استفاده از میدان سرعت لحظه‌ای می‌توان نوسانات سرعت u' و v' و آنگاه عناصر تانسور رینولدز $u'v'$، v'^2 و u'^2 را بدست آورد [۲]. همچنین با داشتن توزیع سرعت لحظه‌ای، فشار لحظه‌ای از رابطه زیر بدست می‌آید؛

$$\nabla^2 P = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad (۲۶)$$

این رابطه را می‌توان با گرفتن دیورژانس از معادلات ناویراستوکس بدست آورد. پس از بدست آوردن فشار لحظه‌ای می‌توان فشار متوسط، نوسانات فشار p' و p'^2، $p'u'$ و $p'v'$ که در حال حاضر غیرقابل اندازه‌گیری‌اند را محاسبه نمود. توجه داریم که : $v'= v-\bar{v}$ $u' = u-\bar{u}$ و $p'= p-\bar{p}$.

داشتن سرعت لحظه‌ای و نوسانات سرعت، این امکان را نیز مهیا می‌کند که ضریب همبستگی زمانی در یک نقطه و ضریب همبستگی بین دو نقطه را نیز در جریان درهم بدست آورد و با استفاده از این ضرایب همبستگی،

اشل‌های توربولانس، (Energy Dissipation) ε و کلیه پارامترهای مؤثر در توربولانس را می‌توان محاسبه نمود.

رسم برداری نوسانات سرعت، ساختمان‌های توربولانس (Turbulence Structures) را قابل مشاهده می‌کند و می‌توان با رسم این نوسانات در زمانهای مختلف، حرکت توده‌های توربولانس را قابل مشاهده و سرعت حرکت آنها (سرعت جابجایی) را محاسبه نمود [۲].

شکل ۲ مقایسه پروفیل سرعت متوسط محاسبه شده از مدل (-) با حل تحلیلی (×) در چهار مقطع به اندازهٔ کافی دور از پله به ازاء عدد رینولدز ۵۰ را نشان می‌دهد.

شکل ۳ توزیع برداری سرعت متوسط را در عدد رینولدز ۵۰ نشان می‌دهد که متوسط‌گیری بر روی ۱۰۰ گام زمانی انجام شده است.

شکل ۴ نمایش توزیع برداری سرعت متوسط و خطوط جریان متوسط در یک کانال با انبساط ناگهانی به ازاء عدد رینولدز ۱۰۰۰۰۰ و ۰٫۵= $\frac{hi}{he}$ را نشان می‌دهد که بر روی ۵۰۰ گام زمانی متوسط‌گیری شده است.

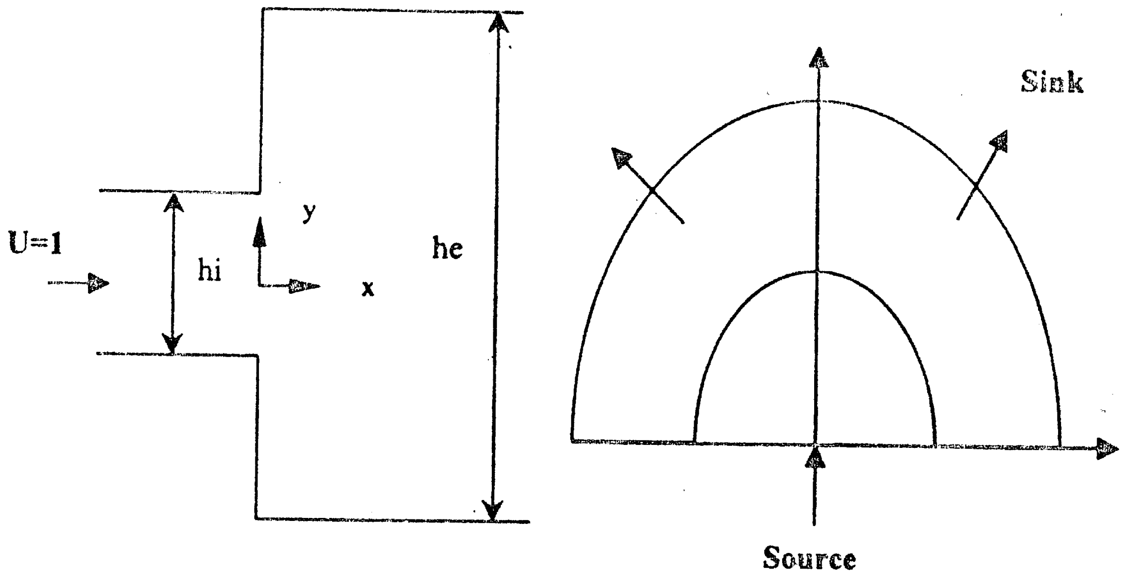
شکل ۵ نمایش توزیع برداری سرعت متوسط و خطوط جریان متوسط را به ازاء عدد رینولدز ۱۰۰۰۰۰ و ۰٫۷ = $\frac{hi}{he}$ نشان می‌دهد که متوسط‌گیری بر روی ۴۰۰ گام زمانی صورت گرفته است.

محاسبه برای مقادیر دیگر $\frac{hi}{he}$ در مرجع [۳] آمده است. با توجه به شکل‌های مذکور نتایج زیر حاصل می‌شود.

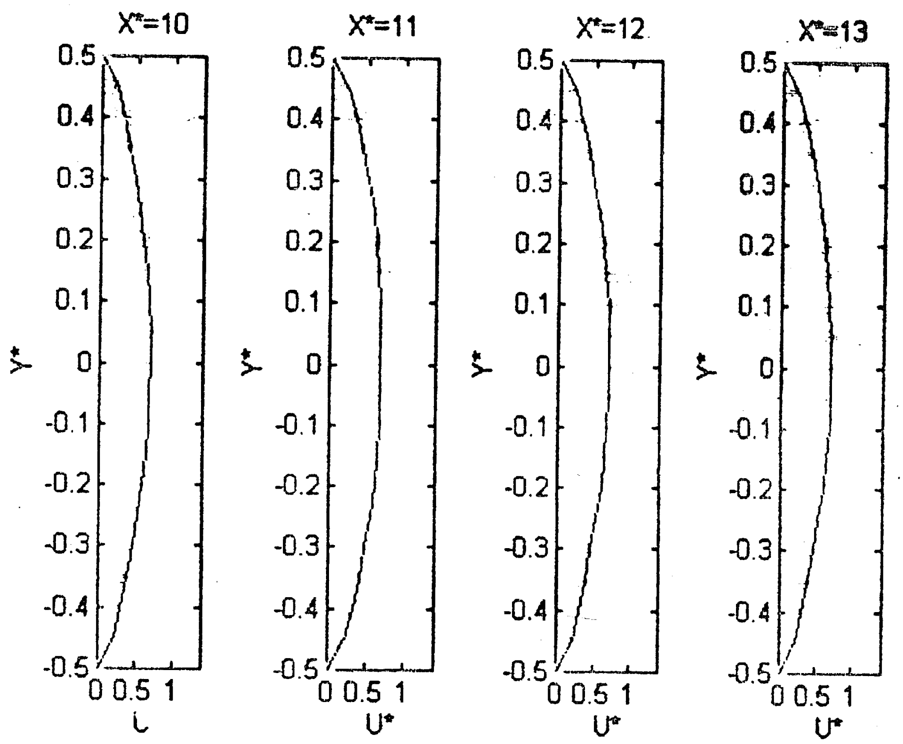
۱- محاسبه میدان سرعت متوسط در جریان آرام منجر به منحنی سهمی (حل تحلیلی) در فاصله‌ای به اندازهٔ کافی دور از مناطق چرخشی گردید.

۲- در جریان درهم به ازاء نسبت‌های ورودی به خروجی ($\frac{hi}{he}$) کوچک علاوه بر اینکه مناطق چرخشی بزرگ هستند به لحاظ اندازه نیز متفاوت می‌باشند، به عبارت دیگر نسبت به محور کانال نامتقارن هستند. ولی در $\frac{hi}{he}$ بزرگ (زمانی که سطح ورودی کانال به سطح خروجی آن نزدیک می‌شود)، نامتقارنی کمتر دیده می‌شود.

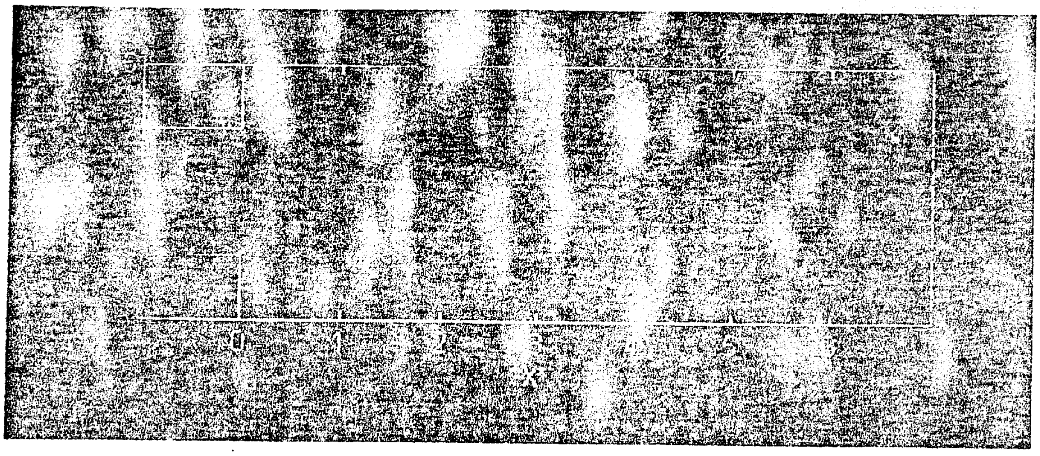
۳- طول مناطق چرخشی (و طبیعتاً سطح و حجم آن) در یک عدد رینولدز بستگی به $\frac{hi}{he}$ دارد و هر چه $\frac{hi}{he}$ بزرگتر باشد این طول کمتر می‌باشد و در حد (۱= $\frac{hi}{he}$) این مناطق از بین می‌روند.



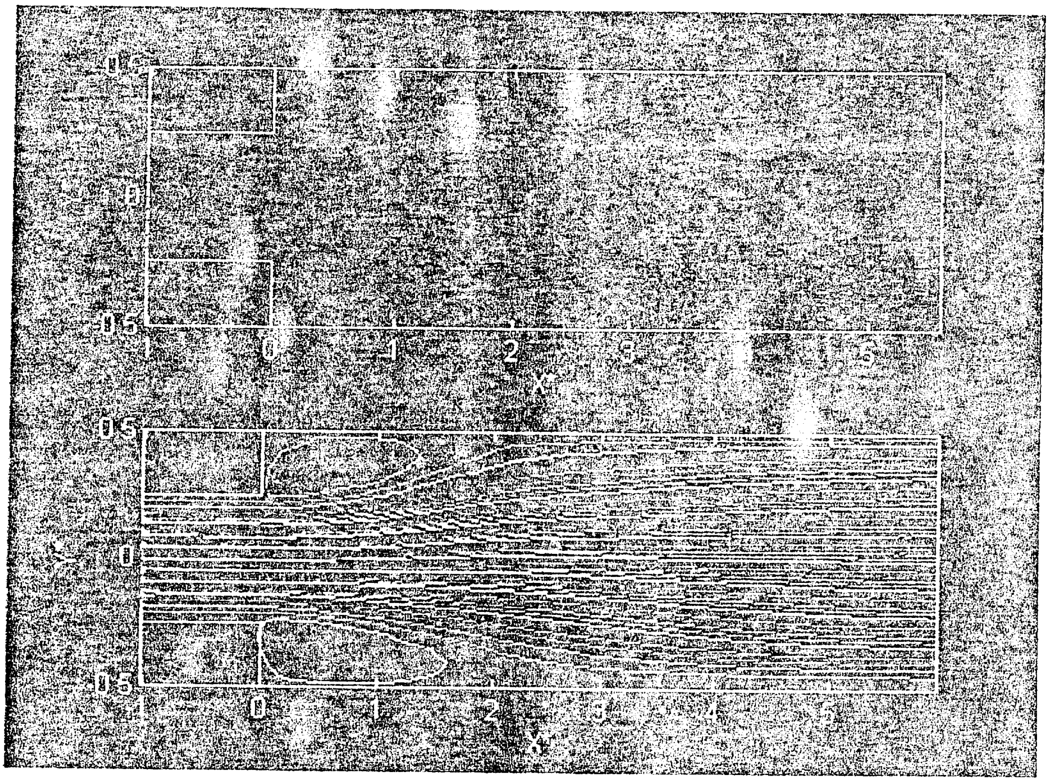
شکل ۱ – کانال با انبساط ناگهانی و تبدیل شوار تز کریستوفل مربوط به آن



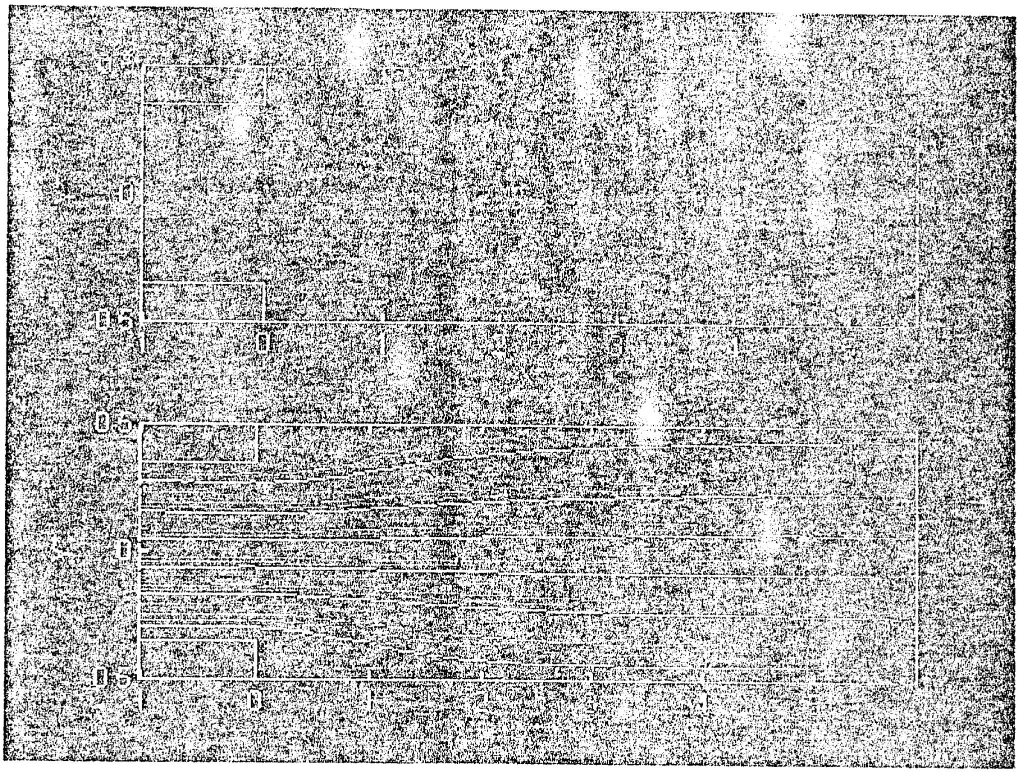
شکل ۲- مقایسه پروفیل سرعت متوسط محاسبه شده از مدل (-) با حل تحلیلی (*) در چهار مقطع به اندازهٔ کافی دور از پله به ازاء عدد رینولدز ۵۰



شکل ۳- توزیع برداری سرعت متوسط به ازای عدد رینولدز ۵۰ متوسط‌گیری شده بر روی ۱۰۰ گام زمانی



شکل ۴- نمایش توزیع برداری سرعت متوسط و خطوط جریان متوسط به ازاء عدد رینولدز
۱۰۰۰۰۰ و ۰.۵= $\frac{hi}{he}$ متوسط‌گیری شده بر روی ۵۰۰ گام زمانی



شکل ۵- نمایش توزیع برداری سرعت متوسط و خطوط جریان متوسط به ازاء عدد رینولدز ۱۰۰۰۰۰ و

$\frac{hi}{he}=$ ۰,۷ متوسط‌گیری شده بر روی ۴۰۰ گام زمانی

مراجع

[1] Chorin A.J., Bernard P., 1973 "Discretization of a vortex sheet with an example of rool - up", Journal of computational physics, Vol. 13, pp. 423-428.

[2] Zafarmand. B., 1996 "Simulation Numerique des Ecoulements Turbulents et a Bulles dans un Canal simple et dans un Te' par La Me'thode des Vortex Al'eatoires". The'se de Docteur del'I. N.P.L. France.

[۲] ظفرمند - بهروز. شبیه‌سازی عددی جریان‌های درهم و دوفازی در یک کانال ساده و یک کانال پیچیده (T) با استفاده از روش گردابه‌های تصادفی. پایان نامهٔ دکترا، پلی تکنیک لورن - نانسی فرانسه ۱۹۹۶.

[۳] کرباس‌فروش طوسی - محمدرضا. شبیه‌سازی جریان‌های آرام و درهم در داخل یک کانال با انبساط ناگهانی با استفاده از روش گردابه‌های تصادفی. پایان نامهٔ کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد - ایران ۱۳۷۹.