

تحلیل ارتعاش آزاد پوسته ها به روش اجزای محدود

فریدون ایرانی و کامبیز اسداله زاده فتحی

بخش مهندسی عمران دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد،
مشهد، ایران

چکیده: در این مقاله درباره تحلیل ارتعاش آزاد نامیرایی پوسته های عمومی با استفاده از جزء محدود انحنایدار لایکرانتری ویژه سازی شده بدون چشم پوشی از تغییر شکل های برشی و انحنا با استفاده از ماتریس جرم سازگار، سخن به میان آمده است. جزء پوسته های مورد نظر دارای نه گره و ۴۵ درجه آزادی (رسه انتقال و دو دوران در هر گره) و قابل استفاده برای پوسته های نازک و ضخیم می باشد. دقت و کارآیی جزء پیشنهادی با مثالهایی بررسی شده است و نتایج حاصل با دیگر روش های عددی و تحلیلی مقایسه شده است. نتایج حاصل نشان می دهد که این روش با تعداد نسبتاً کمی از اجزاء به نتایج خوبی می رسد.

کلید واژه ها: ارتعاش آزاد، پوسته، روش اجزای محدود، ویژه سازی، ماتریس جرم سازگار

۱. مقدمه

تحلیل استاتیکی پوسته ها بخش عمده تحقیقات پیش از سه دهه گذشته می باشد. پس از آن بحث ارتعاش سازه های پوسته ای در میان محققان رشد زیادی پیدا کرد. آدلمن و همکاران [1] در سال ۱۹۶۲ و هوپمن و بارنت [2] یکسال بعد بترتیب در مورد بسامدهای طبیعی پوسته های دورانی ارتوتروبیک نازک و چوسته های کروی کوتاه تحقیقاتی داشتند. تأثیر خمش بر ارتعاش پوسته های کروی را کالنیز [3] در ۱۹۶۴ و یکسال بعد راس [4] ارتعاش متقاضی محوری پوسته های کروی عمیق را با نگره (تئوری) تقریبی و بر پایه رابطه سازی همکران برای معادلات لزاندر با درجه بالا حل نمود. همچنین ارتعاشات آزاد پوسته های کروی عمیق توسط ناوارتنا [5] در ۱۹۶۶ بررسی شد و مسائل پوسته های نازک دورانی را کراوس [6] در سال ۱۹۶۷ به طبع رساند. رامانکریشنان و شاه [7] در ۱۹۷۰ به حل مسئله ارتعاش آزاد با استفاده از روابط کشسانی سه بعدی پرداختند. اثر انحنا بر فرکанс طبیعی پوسته های استوانه ای کوتاه، بیضوی و هذلولی شلجمی گون باپلان مستطیلی را لیزاوکدی [8] در سال ۱۹۷۱ بررسی کردند.

در سال ۱۹۸۱ ارتعاش آزاد پوسته های کوتاه طرہ ای با پلان مریع-مستطیلی با در نظر گرفتن معادلات جبری تغییر مکان به روش رایلی-ریتز توسط لیزا و همکاران [9] حل شد. تحلیل ارتعاشی پوسته های کوتاه با تکیه گاههای نقطه ای در گوشه ها، مشابه روش مرجع [9] توسط لیزا و ناریتا [10] در سال ۱۹۸۴ انجام شد. نیوردن [11] نیز در همین سال معادلات دیفرانسیل حاکم بر پوسته های نازک کروی با شکل های مختلف را با استفاده از معادلات لزاندر حل نمود.

روش اجزای محدود نشان داده است که روش قوی و جامع در تحلیل ارتعاشی مسئله های پیچیده است و قادر به حل مسائلی است که روش های تحلیلی عاجز از حل آن هستند. شکلها و نمونه های مختلف اجزا در این روش برای تحلیل ارتعاش آزاد پوسته ها در روش اجزاء محدود به کار گرفته شده است. از آن نمونه می توان به موارد زیر اشاره کرد: در سال ۱۹۷۴ سن و گلد [12] به روش اجزای محدود، ارتعاش آزاد پوسته های دورانی و یکسال بعد راس [13] نیز به همین روش ارتعاش پوسته های مخروطی و استوانه ای را مورد مطالعه قرار داد. در ۱۹۸۶ آلمن و نتو [14] با استفاده از رابطه سازی ترکیبی اجزای محدود و لواه و فن [15] در ۱۹۸۹ به روش نواری تحلیل ارتعاش آزاد پوسته های دورانی را انجام دادند. لی و همکاران [16] در سال ۱۹۹۰ به روش اجزای محدود نواری ارتعاش آزاد پوسته های دو انتخابی را برسی نمودند. تحلیل ارتعاش آزاد پوسته های کروی ضخیم راگاتمن و گانسن [17] در سال ۱۹۹۲ با در نظر گرفتن اثرات برش، تنفس قائم و اینرسی دورانی (گشتاورماند) مطالعه کردند. کانت و همکاران [18] در ۱۹۹۴ با جزء ویژه سازی شده سه بعدی اجزای محدود به دینامیک پوسته ها پرداختند. چاکراورتی و همکاران [19] در سال ۱۹۹۵ به روش اجزای محدود و با استفاده از جزء هشت گرهی هم عامل^۱ دو انتخابی^۲ و با فرض ماتریس جرم قطری (متمرکز)^۳ به تحلیل ارتعاش آزاد پوسته های مخروطی ناقص و کامل پرداختند.

در نظریه پوسته های نازک از اثرات تغییر شکل برشی و نسبت $\frac{Z}{R}$ (ضخامت به شعاع کمینه انتخاب) چشم پوشی می شود و این امر در برخی موارد موجب رسیدن به حواب غلط می شود؛ (بويژه در نسبتهاي بزرگ ضخامت به شعاع حداقل انتخابي پوسته و همچنین مودهای بالا). در چنین شرایطی (پوسته های ضخیم) این اثرات بایستی در نظر گرفته شود آگ سو [20] در سال ۱۹۹۷ به روش اجزای محدود با در نظر گرفتن این اثرات و با استفاده از جزء هشت گرهی انتخادر با چهل درجه آزادی در هر جزء و سود جستن از ماتریس جرم سازگار، ارتعاش آزاد پوسته های عمومی را برسی نمود. جزء و روش مورد استفاده در این تحقیق برای هر نوع پوسته در شکل عمومی آن و ضخامتهاي نازک و نیمه ضخیم قابل استفاده است.

بررسی مقالات موجود به روشنی آشکار می سازد که اطلاعات مربوط به رفتار ارتعاشی پوسته های عمومی خود تا زمان تکامل فاصله زیادی دارد. در این مقاله بنا بر ضرورت های حس شده در ارتعاش آزاد پوسته های عمومی به انتخاب روش اجزای محدود و استفاده از جزء دو انتخابی نه گرهی لاگرانژی با پنج درجه آزادی در هر گره و با فرض دورانها و تغییر شکل های کوچک اقدام شده است.

۲. تحلیل پوسته ها با روش اجزای محدود

تحلیل دقیق یک پوسته عمومی دارای مشکلات و پیچیدگی های بسیاری است. افرون بر این، تعداد روابط و روشهای آرائه شده نیز، بر این دشواریها می افزاید و طبیعی است که مشکلات تحلیل دقیق پوسته، به نحو مؤثری در حل عددی و از جمله در روش اجزای محدود نیز جلوه گر خواهد شد. به سبب اینکه پوسته ها اغلب دارای انتخاب می باشند، مناسب ترین الگو برای تحلیل آنها، استفاده از اجزای پوسته خمیده یا منحنی شکل می باشد. برتری اصلی این اجزا در توانایی و توصیف دقیقت هندسه واقعی سطح پوسته و بیان مناسبتری از تلفیق

^۱- Isoparametric

^۲- Doubly Curved

^۳- Lumped Mass Matrix

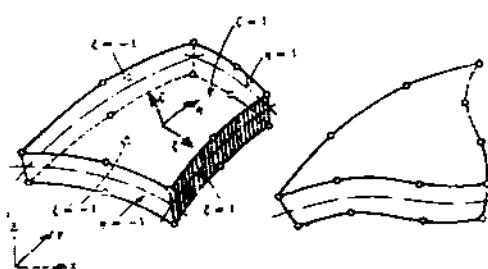
- کشش و خمش در هر جزء می باشد. رابطه سازیهای مختلفی تیز برای این گونه اجرا ارائه شده است. بطور معمول، در روش اجزای محدود به سه روش زیر می توان پوسته ها را تحلیل نمود:
- ۱-با اجزای تخت یا هموار که دو اثر خمش و درون صفحه را با هم ترکیب می کنند.
 - ۲-با اجزای خمیده و رابطه های نظریه پوسته ها
 - ۳-با اجزای سه بعدی

روش اول تقریبی بوده و در پاره ای موارد پاسخ های غیرقابل قبول می دهد. با وجود این، روش ساده و قابل کاربرد است. روش دوم مشکل بوده و اجزای این روش دارای درجه های آزادی زیادی هستند. افزون بر این، نظریه های متفاوتی برای پوسته های نازک ارائه شده است که به کارگیری آنها در روش دوم دارای مشکلاتی است. روش سوم به غیر از پیچیدگی نیاز به محاسبات و حافظه رایانه ای زیادی دارد. باید افزود، رابطه سازی یک پوسته دلخواه در روش اجزای محدود، در مختصات خمیده صورت می گیرد و حجم محاسباتی زیادی را به خود اختصاص می دهد. شایان توجه است، با کمک این نوع رابطه سازی، می توان هندسه دقیق سازه را تعریف نمود.

۳. ویژه سازی ° اجزای سه بعدی

یکی از روشهای مدلسازی جزء های پوسته ای، استفاده از ویژه سازی اجزای سه بعدی می باشد؛ (با استفاده از ویژه سازی اجزای سه بعدی می توان اثرهای خطی برش را در نظر گرفت). ویژه سازی اجزای سه بعدی همان حذف بعد ضخامت در مقایسه با ابعاد دیگر است. این کار، با انتخاب گره های میانی بروی میان صفحه پوسته صورت می گیرد. شایان توجه است، با استفاده از این نظریه، روش تحلیل ساده ای برای پوسته های انحنادار به دست می آید. ناگفته نماند، کاهش یک بعد (ضخامت) در مقایسه با ابعاد دیگر، سبب افزایش سختی برش می شود. این سختی بر سختی کل چیره گشته و در حقیقت قفل برشی بوجود می آید. از فنون مختلفی برای کاهش اثر سختی برشی سود می بروند: از آن میان می توان به تابع جایگزین کرنش برشی و تابع اولیه گیری عددی اشاره کرد.

مهتمترین عامل در ویژه سازی اجزای سه بعدی، ارائه رابطه سازی مختصات درون جزء می باشد. به عنوان نمونه، سطح خارجی اجزای شکل (۱)، انحنادار است. در این شکل، ۵ و ۷ در مختصه خمدار در میان صفحه و ۶ مختصه خطی در جهت ضخامت پوسته می باشد.



شکل (۱) جزء انحنادار

با انتخاب یکی از اجزای پوسته ای شکل (۱) و با فرض اینکه ζ و η تغییراتی بین [۱۰-۱] در میان صفحه جزء دارند؛ می توان رابطه هایی بین مختصات دکارتی و طبیعی در هر نقطه از پوسته را به صورت زیر ارائه کرد:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N f_i(\xi, \eta) \frac{1+\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{top} + \sum_{i=1}^N f_i(\xi, \eta) \frac{1+\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{bottom} \quad (1-3)$$

در این رابطه، (ξ, η, ζ) تابع شکل برای گره i می باشد. مقدار آن در گره i یک و در سایر گره ها صفر است. با انتخاب تابع های پایه f_i همانند تابعهای شکل جزء دو بعدی مربعی یا مثلثی، برای هر یک از اجزای اندنادر، سازگاری کامل در مرز مشترک دو جزء برقرار می گردد. یادآوری می کند، با استفاده از تابع های شکل مرتبه بالا، می توان اجزای خمداز پیچیده ای را به کار برد. این کار با افزودن گره های بیشتر در میان صفحه جزء صورت می گیرد. با توجه به بردار عمود بر میان صفحه در هر نقطه، رابطه (۱-۳) به صورت ساده زیر نوشته می شود:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{bottom} = \sum_{i=1}^N f_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{mid} + \sum_{i=1}^N f_i \frac{\zeta}{2} V_{3i} \quad (2-3)$$

$$V_{3i} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{top} - \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{bottom}$$

در این رابطه، V_{3i} بردار مختصه طولی بوده و گره های بالا پایین و میانی پوسته، به ترتیب، با زیرنویس های (mid, bottom, top) نشان داده شده اند. به منظور کارآیی بیشتر رابطه (۲-۳)، بردار V_{3i} را با یک بزرگاریکه در جهت عمود بر میان صفحه تعریف می کنند. بنابراین، جمله آخر رابطه (۲-۳) را به صورت ساده

$$\left[\sum_i^N f_i \zeta \frac{t_i}{2} V_{3i} \right] \quad \text{ارائه می کنند. پارامتر } t_i \text{، ضخامت پوسته در گره } i \text{ است [21 و 22]. در پایان، تغییر مکان}$$

سراسر جزء به صورت یگانه ای با سه مؤلفه، مختصاتی، تغییر مکان و دو چرخش در هر گره میان صفحه مشخص می شود. تابع های تغییر مکان به صورت زیر می باشند.

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N f_i \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^N f_i \zeta t_i [V_{1i} - V_{2i}] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (3-3)$$

در اینجا، $\{U, V, W\}^T$ تغییر مکان ها در جهت های کلی z و y و x می باشند. بردارهای V_{1i} و V_{2i} عمود بر یکدیگر و عمود بر بردار V_{3i} بوده و انتخاب امتداد یکی از آنها دلخواه است. از این رو، بردارهای V_{1i} و V_{2i} به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} V_{1i} &= e_x \times V_{3i} \\ V_{2i} &= V_{3i} \times V_{1i} \end{aligned} \quad (4-3)$$

۴. جزء نه گرهی ویژه سازی شده برای پوسته های عمومی

مطابق توضیحات داده شده در بخش قبلی با کم کردن بعد ضخامت نسبت به دو بعد دیگر در یک جزء سه بعدی به جزء SHQ9 انحنایار با نه گره و پنج درجه آزادی در هر گره تبدیل می شود. شکل (۲-۱) طرح هندسی جزء SHQ9 را نشان می دهد که مختصات هر نقطه از آن عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^9 f_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^9 f_i \zeta \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{pmatrix} \quad (1-4)$$

تابع درونیاب f_i به شکل زیر می باشد:

$$f_i = [\xi \xi_i (1 - \xi \xi_i)/2 + (1 - \xi^2)(1 - \xi_i^2)] [\eta \eta_i (1 + \eta \eta_i)/2 + (1 - \eta^2)(1 - \eta_i^2)] \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (2-4)$$

بنابراین مشاهده می شود که ضخامت h ممکن است به صورت درجه دوم در این جزء تغییر کند. بعلاوه جملات 1_{3i} ، m_{3i} و n_{3i} کسینوس های هادی بردار V_{3i} می باشد که عمود بر سطح میانی می باشد و در جهت ضخامت h پوسته در گره i عمل می کند. شکل (۲-۲) این بردار را نشان می دهد، برابر است با:

$$V_{3i} = \begin{pmatrix} x_i - x_k \\ y_i - y_k \\ z_i - z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{pmatrix} h_i \quad (3-4)$$

نقاط z و k در شکل (۲-۱) در سطح های پوسته واقع شده اند. در یک برنامه کامپیوترا مختصات نقاط z و k با کسینوسهای هادی بردار V_{3i} باید به عنوان ورودی داده شوند. تغییر مکان های کلی در هر نقطه روی جزء پوسته فرض می شوند که در جهت محورهای کلی می باشند. بنابراین:

$$U = \{u, v, w\} \quad (4-4)$$

از طرف دیگر تغییر مکانهای گرهی شامل همین تغییر مکان‌ها در جهت‌های کلی می‌باشد، همچنین همانطور که در شکل (۲) نشان داده شده، این تغییر مکان‌ها شامل دو چرخش کوچک α و β حول دو محور مماسی محلی $'x$ و $'y$ می‌باشد، بنابراین:

$$q_i = \{u_i, v_i, w_i, \alpha_i, \beta_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, 9) \quad (5-4)$$

تغییر مکان‌های کلی بر حسب تغییر مکان‌های گرهی عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^9 f_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^9 f_i \zeta \frac{h_i}{2} \mu_i \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} \quad (6-4)$$

در این فرمول نماد μ ماتریس زیر می‌باشد:

$$\mu_i = \begin{bmatrix} -1_{2i} & 1_{1i} \\ -m_{2i} & m_{1i} \\ -n_{2i} & n_{1i} \end{bmatrix} \quad (7-4)$$

همانطور که در شکل (۲-۲) نشان داده شده است، ستون اول در این ماتریس شامل مقادیر منفی کسینوس‌های هادی بردار مماسی دوم V_{2i} و ستون دوم شامل کسینوس‌های هادی برای بردار مماسی اول V_{1i} می‌باشد. این بردارها برابر دارند و بر هم‌دیگر عمود می‌باشند، ولی انتخاب برای جهت یکی از آنها دلخواه می‌باشد. برای تثیت این انتخاب اجازه می‌دهیم:

$$V_{1i} = e_y \times V_{3i} \quad (8-4)$$

بس

$$V_{2i} = V_{3i} \times V_{1i} \quad (9-4)$$

(اگر V_{3i} موازی e_z در رابطه (۸-۴) باشد، بجای آن، انتخاب می‌گردد). شکل (۲-۲) تغییر مکان‌های کلی محلی $'x$ و $'y$ را (در جهت V_{1i} و V_{2i}) به ترتیب بر اثر چرخش‌های گرهی α و β نشان می‌دهد، که مقادیر آنها عبارتند از:

$$U' = \zeta \frac{h_i}{2} \beta, \quad V' = -\zeta \frac{h_i}{2} \alpha, \quad (10-4)$$

سهم این عناصر در تغییر مکان های کلی در هر نقطه به وسیله جمع دوم در رابطه (۴-۶) داده شده است.
توابع شکلی تغییر مکان در رابطه (۴-۶) را می توان به شکل ماتریسی زیر در آورد.

$$f_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\zeta \frac{h_i}{2} l_{2i} & \zeta \frac{h_i}{2} l_{1i} \\ 0 & 1 & 0 & -\zeta \frac{h_i}{2} m_{2i} & \zeta \frac{h_i}{2} m_{1i} \\ 0 & 0 & 1 & -\zeta \frac{h_i}{2} n_{2i} & \zeta \frac{h_i}{2} n_{1i} \end{bmatrix} f_i \quad (11-4)$$

به منظور مجزا کردن عناصر در زیر ماتریس f_i که در ζ ضرب شده اند، داریم:

$$f_{Ai} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_i \quad (11-12-4)$$

$$f_{Bi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -l_{2i} & l_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -m_{2i} & m_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -n_{2i} & n_{1i} \end{bmatrix} \frac{h_i}{2} f_i \quad (2-12-4)$$

سپس

$$f_i = f_{Ai} + \zeta f_{Bi} \quad (13-4)$$

و

$$f = f_A + \zeta f_B \quad (14-4)$$

و

رابطه (۱۴-۴) برای محاسبه ماتریس جرم سازگار مورد استفاده قرار خواهد گرفت.
ماتریس (3×3) ژاکوبین مورد نیاز در این فرمول بندی عبارت است از:

$$J = \begin{bmatrix} x, \zeta & y, \zeta & z, \zeta \\ x, \eta & y, \eta & z, \eta \\ x, \xi & y, \xi & z, \xi \end{bmatrix} \quad (15-4)$$

مشتقات در ماتریس J را از رابطه (۱-۴) به صورت زیر پیدا می کنیم:

$$x, \zeta = \sum_{i=1}^9 f_{i,\zeta} x_i + \sum_{i=1}^9 f_{i,\zeta} \zeta \frac{h_i}{2} 1_{3i}$$

$$x, \eta = \sum_{i=1}^9 f_{i,\eta} x_i + \sum_{i=1}^9 f_{i,\eta} \zeta \frac{h_i}{2} 1_{3i}$$

$$x, \zeta = \sum_{i=1}^9 f_i \frac{h_i}{2} 1_{3i}$$

و غیره. معکوس J عبارت است از:

$$J^{-1} = J^* = \begin{bmatrix} \zeta, x & \eta, x & \xi, x \\ \zeta, y & \eta, y & \xi, y \\ \zeta, z & \eta, z & \xi, z \end{bmatrix} \quad (16-4)$$

برای جزء SHQ9 شش نوع کرنش غیر صفر را به ترتیب زیر در نظر می گیریم.

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \sigma x \\ \sigma y \\ \sigma z \\ \gamma xy \\ \gamma yz \\ \gamma zx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u, x \\ v, y \\ w, z \\ u, y + v, x \\ v, z + w, y \\ w, x + u, z \end{bmatrix} \quad (17-4)$$

تنش عمودی σ_z و کرنش γ_z حذف شده اند. ماتریس تنش-کرنش E برای مصالح همگن مطابق زیر است:

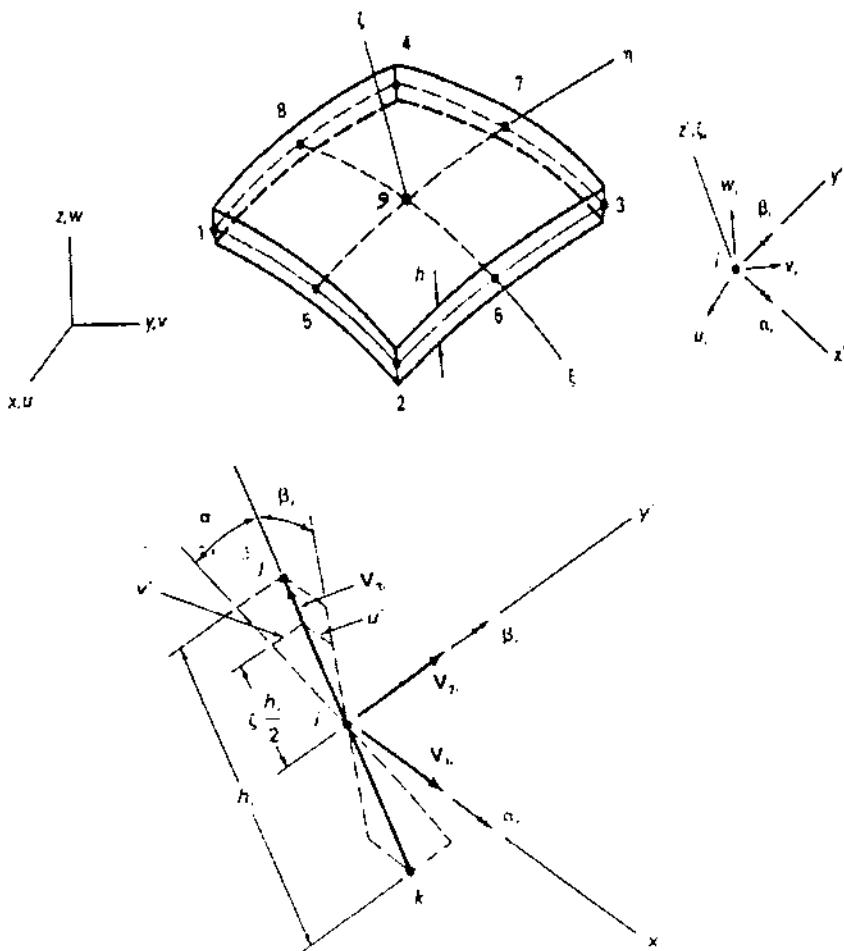
$$E = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & & & & SYM \\ v & 1-v & & & \\ 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2.4} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2.4} \end{bmatrix} \quad (18-4)$$

به منظور مرتبط ساختن کرنش های محلی در برابر \mathcal{E}' به کرنش های کلی در بردار \mathcal{E} می توان از ماتریس انتقال کرنش (6×6) به شکل زیر استفاده نمود:

$$\mathcal{E}' = T_{\mathcal{E}} \mathcal{E} \quad (19-4)$$

که در آن

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & \vdots & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & \vdots & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & \vdots & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & \vdots & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & \vdots & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & \vdots & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (۲۰-۴)$$



شکل (۲)، (۱) جزء SHQ9 : (۲) بردارهای گرهی

در هنگام محاسبه تنش ها در جهت های محلی، داشتن رابطه زیر مفید است.

$$B' = T_{\varepsilon} B \quad (21-4)$$

ماتریس B' شامل پنج سطر می باشد که ناشی از حذف سطر سوم T_c می باشد.
حال ماتریس سختی برای جزء SHQ9 با استفاده از ماتریس B' برابر خواهد شد با:

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [2(B'_A)^T EB'_A + \frac{2}{3}(B'_B)^T EB'_B] |J| d\xi d\eta \quad (22-4)$$

ماتریس جرم سازگار برای جزء SHQ9 عبارت است از:

$$M = \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [2f_A^T f_A + \frac{2}{3}f_B^T f_B] |J| d\xi d\eta \quad (23-4)$$

با تهیه برنامه رایانه ای به زبان فرتون شامل یک برنامه اصلی و بیست زیر برنامه به محاسبه $[K]$ و $[M]$ و سپس حل مسئله مقدار ویژه $\omega = [M]^{-1}[K]$ پرداخته شده است.

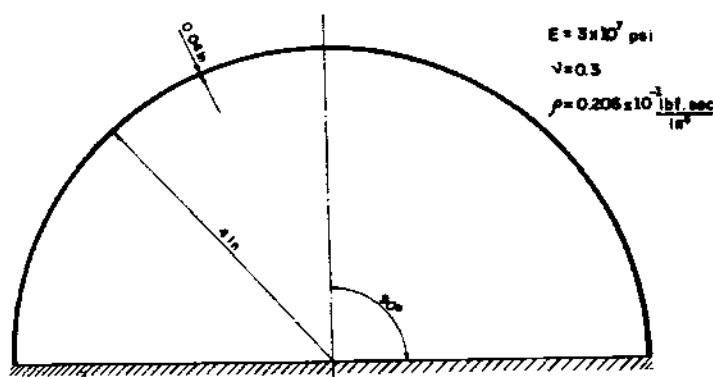
۵. مثال های عددی

مثال ۱-۵ - پوسته نیم کروی گیردار [15, 9]

در این مثال پوسته نیم کروی گیردار با جزء مورد نظر برای بررسی خواص همگرایی فرکانس های طبیعی در نظر گرفته شده است شکل (۳). فرکانس بی بعد شده طبق رابطه زیر بدست آمده است:

$$\lambda_{m,n} = \omega_{m,n} a \left(\frac{\rho}{E} \right)^{1/2}$$

که در این رابطه a شاعر پوسته و ρ چگالی و E ضریب کشسانی مصالح است و نسبت ضخامت به شاعر (h/a) برابر ۰.۰۱ فرض شده است و مقادیر پارامترهای مسئله روی شکل نشان داده شده است. این مثال بخوبی نشان می دهد که جزء انتخابی برای پوسته های نازک مناسب است. پارامترهای فرکانس برای یک چهارم و یک هشتم مدل سازه با هشت جزء بدست آمده اند. مقادیر $\omega_{m,n}$ برای برخی ترکیبات شکل مودهای در جدول (۱-۵) آمده است. مقایسه نتایج با مراجع دیگر سازش نزدیکی بین روش حاضر و دیگر راه حل های بکار گرفته شده را نشان می دهد.



شکل (۳) پوسته نیمکروی گیردار

جدول (۵) پارامترهای فرکانس ($\lambda_{m,n}$) پوسته نیمکروی گیردار

n	m	MR element cubic [20]	B-spline FE method [15]	Aksu [20]	Proposed element
۱	۱	۰/۵۶۸	۰/۵۶۸	۰/۵۶۶	۰/۵۶۷
	۲	۰/۸۹۳	۰/۸۹۴	۰/۹۰۸	۰/۸۹۹
	۳	۰/۹۶۵	۰/۹۶۶	۰/۹۶۲	۰/۹۶۱
	۴	۱/۰۰۱	۱/۰۰۲	۱/۰۰۷	۱/۰۰۳
	۵	۱/۰۴۳	۱/۰۴۴	۱/۰۴۸	۱/۰۴۵
۲	۱	۰/۹۰۱	۰/۹۰۱	۰/۸۹۸	۰/۹۰۰
	۲	۰/۹۶۶	۰/۹۶۶	۰/۹۶۰	۰/۹۶۲
	۳	۰/۹۹۸	۰/۹۹۸	۰/۹۸۰	۰/۹۹۴
	۴	۱/۰۳۱	۱/۰۳۱	۱/۰۱۸	۱/۰۲۶
	۵	۱/۰۷۹	۱/۰۷۷	۱/۰۷۳	۱/۰۸۸
۳	۱	۰/۹۴۸	۰/۹۴۸	۰/۹۵۱	۰/۹۴۹
	۲	۰/۹۸۹	۰/۹۹۰	۰/۹۸۷	۰/۹۸۷
	۳	۱/۰۲۴	۱/۰۲۴	۱/۰۱۷	۱/۰۲۵
	۴	۱/۰۶۶	۱/۰۶۶	۱/۰۵۲	۱/۰۶۳
	۵	۱/۱۲۲	۱/۱۲۳	۱/۱۹۱	۱/۱۴۱
۴	۱	۰/۹۶۹	۰/۹۶۹	۰/۹۵۹	۰/۹۶۶
	۲	۱/۰۰۵	۱/۰۰۵	۰/۹۹۸	۱/۰۰۴
	۳	۱/۰۴۴	۱/۰۴۵	۱/۰۵۵	۱/۰۵۲
	۴	۰/۰۹۴	۰/۰۹۵	۱/۰۸۴	۱/۰۹۰
	۵	۱/۱۶۴	۱/۱۶۵	۱/۱۳۶	۱/۱۵۸

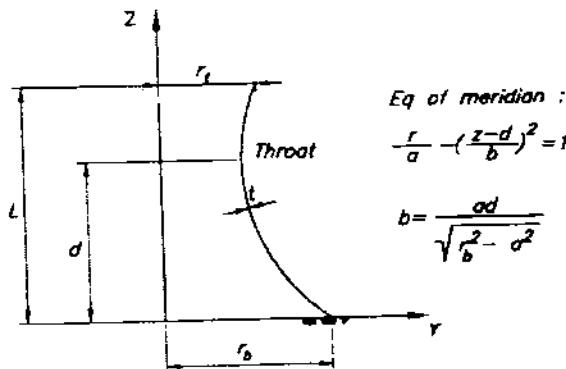
مثال ۵- پوسته هذلولی گون^۶ یکسر گیردار [15]

مطلوب است تعیین فرکانس های طبیعی پوسته هذلولی گون یکسر گیردار در شکل (۶). هندسه مسئله در شکل مزبور نشان داده شده است و مشخصات هندسی و مصالح به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}
 a &= 25.603 \text{ m}, & b &= 63.906, & d &= 82.194 \text{ m} \\
 L &= 100.787 \text{ m}, & t &= 127 \text{ mm}, & E &= 2.609 \times 10^4 \text{ MN/m}^2 \\
 v &= 0.15, & \rho &= 2405 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}$$

⁶- Hyperboloidal

در جدول (۵) نتایج حاصل، آورده شده است.



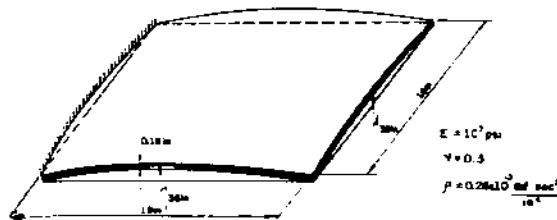
شکل (۶) هندسه پوسته هذلولی گون

جدول (۷) فرکанс طبیعی (هرتز) پوسته هذلولی گون یکسر گیردار

J	Mode number	Carter [15]	B-Spline F.E.M 4 elements [15]	B.Spline.F.E.M 6 elements [15]	Proposed element
-	۱	۷/۷۷۹۴	۷/۷۸۰۰	۷/۷۷۹۳	۷/۷۷۹۵
	۲	۱۱/۴۱۶۷	۱۱/۴۱۳۴	۱۱/۴۱۱۴	۱۱/۴۱۳۸
	۳	۱۱/۹۰۲۳	۱۲/۲۸۲۵	۱۱/۹۱۱۴	۱۲/۰۳۲۹
۱	۱	۳.۲۸۸۴	۳/۲۸۹۱	۳/۲۸۸۷	۳/۲۸۸۱
	۲	۶/۷۹-۵	۶/۷۹۱۶	۶/۷۹-۹	۶/۷۹۱۳
	۳	۱۰/۵۲-۷	۱۰/۵۱۸۲	۱۰/۵۱۸۲	۱۰/۵۲۱۵
۲	۱	۱/۷۶۰۴	۱/۷۶۴۴	۱/۷۶۰۹	۱/۷۶۰۷
	۲	۲/۶۹۲۱	۲/۶۹۰۱	۲/۶۸۸۵	۲/۶۹-۹
	۳	۶/۹۵۶۲	۶/۹۵۶۰	۶/۹۵۲۶	۶/۹۵۰۱
۳	۱	۱/۳۷۸۹	۱/۳۷۶۲	۱/۳۷۵۶	۱/۳۷۵۵
	۲	۱/۹۹-۴	۱/۹۹۴۶	۱/۹۹۳۲	۱/۹۹۲۸
	۳	۴/۳۲۰۴	۴/۳۲۲۷	۴/۳۲۳۲	۴/۳۲۲۴
۴	۱	۱/۱۸-۸	۱/۱۸۱۸	۱/۱۸۱۱	۱/۱۸۱۲
	۲	۱/۴۴۷۵	۱/۴۴۸۹	۱/۴۴۷۵	۱/۴۴۸۹
	۳	۲/۷۷۷۷	۲/۷۷۶۰	۲/۷۷۷۷	۲/۷۷۶۷
۵	۱	۱/۰۳۴۸	۱/۰۳۴۵	۱/۰۳۴۲	۱/۰۳۴۲
	۲	۱/۴۲۹۳	۱/۴۲۷۶	۱/۴۲۹۳	۱/۴۲۸۰
	۳	۲/۰۵۵۹	۲/۰۵۶۷	۲/۰۵۵۹	۲/۰۵۶۸
۶	۱	۱/۱۴۶۷	۱/۱۷۸۹	۱/۱۴۷۹	۱/۱۴۷۵
	۲	۱/۳۲۲۱	۱/۳۲۲۴	۱/۳۲۰۲	۱/۳۲۲۴
	۳	۲/۰۱۴۱	۲/۰۲۰۵	۲/۰۱۴۰	۲/۰۱۴۲
۷	۱	۱/۳۰۱۵	۱/۳۰۴۹	۱/۳۰۲۸	۱/۳۰۲۰
	۲	۱/۵۱۳۴	۱/۵۱۳۹	۱/۵۱۴۱	۱/۵۱۳۸
	۳	۱/۹۲۱۷	۱/۹۲۶۱	۱/۹۲۳۰	۱/۹۲۲۷

مثال ۳-۵-پانل (دیواره) طره ای کروی [14]

یافتن مودهای ارتعاشی متقارن و پاد متقارن در سازه شکل (۷) که مشخصات هندسی و مصالح آن نشان داده شده است، مورد نظر می باشد.



شکل (۷) پانل طره ای کروی

مقایسه نتایج تحلیل های روش آلتمن و نتو [14] به روش اجزای محدود ترکیبی و لیزا و همکاران را در جدول ۳-۵ می بینیم [14].

جدول (۳-۵) فرکانس طبیعی (Hz) پانل طره ای کروی

ابعاد شبکه	Altman & Neto [14]			Leissa[14]	Present Analysis
	۲×۲	۴×۴	۶×۶ ⁺		
Mode 1-S	۶۱/۵۸ (۶۲/۸۴)	۴۸/۷۴ (۴۹/۷۶)	۴۷/۸۹ (۴۸/۸۹)	۴۷/۴۰	۴۷/۴۹
Mode 2-A	۱۲۱/۲۷۴ (۱۲۲/۸۹)	۵۶/۵۲ (۵۷/۹۹)	۵۱/۵۹ (۵۲/۸۲)	۵۱/۳۲	۵۱/۵۰
Mode 3-S	—	۱۶۶/۶۸ (۱۶۹/۸۱)	۱۶۰/۵۰ (۱۶۳/۴۷)	۱۵۹/۹۲	۱۶۰/۰۱
Mode 4-A	—	۱۸۱/۱۷ (۱۹۲/۲۲)	۱۷۶/۲۱ (۱۸۶/۲۳)	۱۷۸/۴۰	۱۷۷/۹۲
Mode 5-S	—	۲۷۵/۷۵ (۲۸۱/۳۰)	۲۶۰/۷۷ (۲۶۵/۸۷)	۲۵۸/۳۷	۲۶۰/۴۳

+ : شامل نصف سازه با در نظر گرفتن تقارن

) : مقادیر فرکانس طبیعی بدون در نظر گرفتن اینرسی مماسی

S : متقارن

A : پاد متقارن

۶. نتیجه گیری

در حال و مقایسه نتایج حاصل از روش ارائه شده در مسائل ارتعاش آزاد صفحات و پوسته ها با دیگر روش ها به نتایج زیر دست می یابیم:

۱- رابطه سازی جزء مورد نظر با توجه به اختنادار بودن آن در دو جهت و در نظر گرفتن تغییر شکل های برشی (بدون ایجاد قفل برشی) برای هرگونه شکل پوسته ای قابل کاربرد می باشد.

۱- این روش با تعداد کمتر اجزا نسبت به روش های مشابه (هشت گرهی) جواب های خوب و قابل قبولی می دهد.

۲- با وجود عمومی بودن روش پیشنهادی، در مسائلی که شرایط تقارن وجود دارد به راحتی می توان با بهره جستن از کمترین اجزا (نسبت به روش هایی که قادر به حل حالتهای خاص پوسته ها هستند) به حل مسئله پرداخت.

۳- روش پیشنهادی قادر به حل مقادیر متعدد انتخابی پوسته ها با دقت مناسب است.

مراجع

- [1] Adelman. H.M., Donnell, S.C. and Walter, W.C., "A method for computation of vibration modes and frequencies of orthotropic thin shells of revolution having general meridional curvature", NASA TN D- 4972, (1962).
- [2] Hoppman, W.H., and Baronet, C.N., "A study of vibrations of shallow spherical shells" Trans. ASME, J. Appl. Mech. 30. PP. 326 – 334. (1963).
- [3] Kalnins, A.. "Effect of bending on vibration of spherical shell", J. Acoust, Soc, Amer, '36. pp. 74 – 81, (1964).
- [4] Ross, E.W., J. "Natural frequencies and mode shapes for axisymmetric vibrations of deep spherical shells", ASME, J. Appl. Mech, 32, PP. 553 – 561, (1965).
- [5] Navaratna, P.R., "Free vibration of deep spherical shells", AIAA J.Y. PP. 2056 – 2058 (1966).
- [6] Kraus, J., "Thin elastic shells", John Wiley, New York, (1967).
- [7] Ramankrishnan, C.V.. and Shah, A. H., "Vibration of aeotropic spherical shells", J. Acoust. Soc. Amer. 47, pp. 1366 – 1374, (1970)
- [8] Liessa. A. W.. and Kadi. A.S., "Curvature effects on shallow shell vibrations", J. Sound vibr. 16. pp. 173 – 187. (1971).
- [9] Leissa. A. W.. Lee. J.K. and Wang. A. J., "Vibration of cantilevered shallow cylindrical shells of rectangular planform", J. Sound Vibr. 78, pp. 331 – 328, (1981).
- [10] Leissa. A. W.. and Narita. Y., "Vibrations of corner point supported shallow shells of rectangular planform", Earthq. Eng. Struct. Dyn. 12, PP. 651 – 661 (1984).

- [11] Niordson, F.I., "Free vibration of thin elastic spherical shells", Int. J. solids struct.. pp. 667 – 687, (1984).
- [12] Sen, S.K., and Gould, P.L., "Free vibration of shells of revolution using F.E.M." J. Engng. Mech. 100, pp. 283 – 303, (1974).
- [13] Rao, S.S., "The finite element method in engineering", Oxford Pergamon Pr. (1982).
- [14] Altment, W., and Neto, E.L., "Vibration of thin shells of revolution based on mixed finite element formulation", J. Comp. Str. 23, pp. 291 – 303, (1986).
- [15] Luah, M.H., and FAN, S.C., "General free vibration analysis of shells of revolution using the spline finite element method", J. Comp. Str., V. 33, N. 5 pp. 1153 – 1162, (1989).
- [16] Li, W. Y., Thaml, L. G., and Cheung, Y. K., "Free vibration analysis of doubly curved shells by spline finite strip method", J. Sound Vibr. 140, pp. 39 – 53, (1990)
- [17] Gautham, B.P., and Ganesan, N., "Free vibration analysis of thick spherical shells", Comput. Struct. 45, PP. 307 – 313, (1992).
- [18] Kant, T., Kumar, S. and Singh, U.P., "Shell dynamics with three – dimensional, degenerate finite elements", J. Comput. Struct. 50, pp. 135 – 146, (1994).
- [19] Chakravorty, D., Bandy, J.N., Sinha P.K., "Finite element free vibration analysis of conical shells", Comp. Str Vol. 56, No. 6. PP. 975 – 978 (1992).
- [20] Aksu, T., "A finite-element formulation for free vibration analysis of shells of general shape", J. Comp & Str. Vol. 65, No. 5, pp. 687 – 694, ('997).
- [21] Zienkiewicz, O.C., "The finite element method", McGraw- Hill Book Company, Fourth edition, (1992).
- [22] Vlachoutsis, S., "Explicit integration for three – dimentional degenerated shell finite elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, pp. 861 – 880, (1990).