

# جزء قوسی پیشنهادی برای تحلیل تیرها و شبکه های قوسی

محمود عدالتی  
دانشجوی کارشناسی ارشد

فریدون ایرانی  
دانشیار

دانشکده مهندسی، گروه عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

## چکیده

در این مقاله جزء تیر قوسی یک بعدی با هشت درجه آزادی (با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل های برش ثانویه ناپیدگی) برای تحلیل تیرها و شبکه های قوسی به روش اجزای محدود با استفاده از تابع میدان پیچشی به صورت نمایی ارائه می گردد. در ادامه با استفاده از برنامه رایانه ای ایجاد شده، نمونه های عددی مورد تحلیل قرار گرفته و نتایج به دست آمده با نتایج موجود مقایسه شده است. این بررسی ها نشان داده است که روش پیشنهادی همکاری بسیار خوبی با نتایج تحلیلی موجود و آزمایشگاهی دارد.

## *Analysis of Curved Beams and Grids by a Proposed Finite Element*

F. Irani  
Associate Professor

M. Edalati  
Graduate Student

School of Engineering, Ferdowsi University

### Abstract

*In this paper a finite element with eight degree of freedom (torsional wrapping deformation is also considered) is presented in order to analyse the curved beams and grids. An exponential function has been chosen to determine the variation of the torsional deformation. Numerical examples have finally been derived with help of a computer programme and the obtained solutions have been compared with analytical and testing results to show the compatibility of this research.*

لنگر ( $\sigma_w$ ) است و لذا تنش قائم کل با رابطه زیر معین می شود.

$$\sigma = \sigma_h + \sigma_w \quad (2)$$

تنش های برشی حاصل از لنگر خمشی، لنگر پیچشی سن و نان و تنش برشی مربوط به لنگر پیچشی تابیدگی مقطع خواهد بود که در محاسبه انرژی تنش برشی از تنش برشی لنگر خمشی صرف نظر می نمایند و تنش برشی کل با رابطه زیر بیان خواهد شد [H2] که در آن  $q_{mt}$  جریان برشی ناشی از پیچش و  $t$  ضخامت جدار مقطع است.

$$\tau_{mt} = \frac{q_{mt}}{t} \quad (3)$$

در دستگاه استوانه ای، انرژی کل تیر قوسی با رابطه زیر معین می شود.

$$U = U_\sigma + U_\tau = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left( \frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) \rho dA d\phi \quad (4)$$

انرژی قائم را برای تیرهای قوسی مدور با شعاع انحنای ثابت  $R$  به صورت زیر می نویسند:

$$U = U_h + U_w = \frac{1}{2E} \int_0^L \left( \frac{M_y^2}{I_y} + \frac{B^2}{I_w} \right) R d\phi \quad (5)$$

انرژی برشی با توجه به تنش برشی کل و عملکرد ارتجاعی تیر قوسی با رابطه زیر بیان می شود  $[D_2, H_2]$ :

$$U_\tau = \frac{1}{2G} \int_0^L \int_A \tau_{mt}^2 \rho dA d\phi = \frac{1}{2G} \int_0^L \left\{ G \left[ \left( \frac{r_s}{\rho} t - \frac{R}{\rho^2} \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{\Gamma}{\rho^2} \left( \beta - \eta \right) + \frac{R}{\rho^2} \left( \frac{\Gamma}{\rho^3} \frac{d_s}{t} \right) \right]^2 \right\} \frac{\rho}{t^2} dA d\phi \quad (1-6)$$

در رابطه فوق  $\Gamma$  مشخصه مقطع عرضی بسته بوده و از رابطه زیر معین می شود.

$$\Gamma = \int \frac{R}{\rho^2} r_s ds \quad (2-6)$$

تیرهای قوسی اغلب در پل های قوسی به کار می رود و به طور معمول از مقاطع جدار نازک در ساختار سازه ای آنها استفاده می شود. ویژگی هندسی این تیرها سبب می شود که هنگام اعمال بارهای ثقلی، تحت اثر لنگر پیچشی قابل ملاحظه ای قرار گیرند که سبب تغییر شکل و تابیدگی زیادی در مقاطع تیر می گردد.

پژوهشگران زیادی برای تحلیل دقیق تیرهای خمیده جدار نازک تالش کرده اند که از آن میان نظریه های مربوط به ولاسف Velasov، تیمو شنکو، ینگ Yang و یوو Yoo مورد توجه زیادی قرار گرفته است [Y1]. از نظریه های این افراد جهت تطبیل های عددی (روش ماتریسی، روش اجزاء محدود و روش تفاضل های محدود) استفاده می شود.

ابتدا موریس Morris و هو Ho با شرایط تعادل، ماتریس سختی جزء قوس را ارائه کردند، سپس ال-امین El-Amin و بروتن Brotton در سال ۱۹۷۶ با در نظر گرفتن مشتق اول تغییر مکان پیچشی با روش سختی به حل مسأله پرداختند تا اینکه در سال ۱۹۹۰ هسو Hsu و فو Fu و اس چلینگ Schelling جزء ولاسف را ابداع کردند [H1] که در سال ۱۹۹۵ در جزء فوق تصحیحاتی انجام دادند [H2]. در این جزء از توابع میدان هر میتی برای تغییر مکان های مربوط به خمش و پیچش استفاده شده است.

در این مقاله با توجه به جواب معادله دیفرانسیل و به منظور اخذ پاسخ های بهتر برای تابع میدان پیچشی از توابع نمایی استفاده شده است.

## انرژی کرنشی در تیرهای قوسی

به منظور تبیین انرژی، تیر قوسی شکل (۱) و تغییر مکان های مربوطه را در نظر بگیرید. انرژی کل تیر قوسی از یو بخش عمده تشکیل می شود. بخش نخست از مقاومت جسم در مقابل تنش های قائم ایجاد می گردد که به آن انرژی قائم گفته و با  $U_\sigma$  نشان می دهند. بخش دیگر از مقاومت عضو در برابر تنش های برشی حاصل می شود که به آن انرژی برشی گفته و با  $U_\tau$  نشان می دهند و انرژی از رابطه زیر معین خواهد شد [H2].

$$U = U_\sigma + U_\tau \quad (1)$$

تنش های قائم حاصل از لنگر خمشی ( $\sigma_h$ ) و زوج

$$B = EI_{\omega} \left[ \eta' (x) - \frac{w'' (x)}{R} \right] \quad (14)$$

با اعمال روابط (۱۱) تا (۱۴) رابطه انرژی داخلی کل (رابطه ۸) پس از ساده سازی به صورت زیر در می آید.

$$U = \frac{EI_y}{2} \int_0^L \left( -w'' - \frac{\beta}{R} \right)^2 dx + \frac{EI_{\omega}}{2} \int_0^L \left( \eta' - \frac{w''}{R} \right)^2 dx + \frac{GK_t}{2} \int_0^L \left( \beta' - \frac{w'}{R} \right)^2 dx + \frac{G(I_c - K_t)}{2} \int_0^L (\beta' - \eta)^2 dx \quad (15)$$

با استفاده از رابطه فوق و تابع میدان پیشنهادی در این مقاله، ماتریس سختی تیر جدار نازک قوسی در روش اجزاء محدود به دست آمده است. در اینجا  $\beta$  تابع میدان پیچش،  $w$  تابع میدان تغییر مکان قائم است و داریم،

$$\eta = \beta' + \frac{1}{\kappa^2} \beta'' \quad (16)$$

$$\kappa = \sqrt{\mu GI_c / EI_{\omega}} \quad (17)$$

با استفاده از رابطه (۱۵) چهار رابطه انرژی که در تعیین ماتریس سختی کاربرد دارند به صورت زیر معین می شود،

$$U_b = \frac{EI_y}{2} \int_0^L \left( -w'' - \frac{\beta}{R} \right)^2 dx \quad (1-18)$$

$$U_t = \frac{GK_t}{2} \int_0^L \left( \beta' - \frac{w'}{R} \right)^2 dx \quad (2-18)$$

$$U_{\omega} = \frac{EI_{\omega}}{2} \int_0^L \left( \eta' - \frac{w''}{R} \right)^2 dx \quad (3-18)$$

$$U_s = \frac{G(I_c - K_t)}{2} \int_0^L (\beta' - \eta)^2 dx \quad (4-18)$$

### میدان تغییر مکان پیشنهادی

پژوهشگران زیادی نتایج نظریه ولاسف را که در تحلیل خطی و غیرخطی تیرهای جدار نازک باز به کار می رود توسط روش اجزاء محدود و سایر روش های عددی کنترل نموده اند و این نتایج نشان می دهد که نظریه

در نهایت انرژی داخلی برش به صورت زیر نوشته می شود.

$$U_{\tau} = \frac{1}{2G} \int_0^L \left( \frac{T_s^2}{K_t} \right) R d\phi + \frac{G}{2R} \int_0^L (I_c - K_t) [\beta'(\phi) - \eta(\phi)]^2 d\phi \quad (7)$$

با جمع دو رابطه (۵) و (۷) انرژی داخلی کل تیر قوسی جدار نازک به صورت زیر نوشته می شود.

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^L \left( \frac{M_y^2}{I_y} + \frac{B^2}{I_{\omega}} \right) R d\phi + \frac{1}{2G} \int_0^L \left( \frac{T_s^2}{K_t} \right) R d\phi + \frac{G}{2R} \int_0^L (I_c - K_t) \times [\beta'(\phi) - \eta(\phi)]^2 d\phi \quad (8)$$

لذا انرژی داخلی کل مجموع  $U_b$  (انرژی خمشی)،  $U_{\omega}$  (انرژی زوج لنگر)،  $U_t$  (انرژی پیچش) و  $U_s$  (انرژی برش تابیدگی) خواهد بود:

$$U = U_b + U_{\tau} = U_b + U_{\omega} + U_t + U_s \quad (9)$$

ضمناً باتوجه به معادلات دیفرانسیل تیرهای قوسی با تابیدگی مقطع روابط لنگر پیچشی، لنگر خمشی، و زوج لنگر به صورت زیر ارائه می شود [D2, V1]:

$$T = \frac{GK_t}{R} \beta'(\phi) - \frac{EI_{\omega}}{\mu R^3} \beta''(\phi) = GK_t \beta'(x) - \frac{EI_{\omega}}{\mu} \beta''(x) \quad (10)$$

با ترکیب تأثیر تغییر مکان قائم ( $w$ )، لنگر پیچشی کل ( $T$ ) از رابطه زیر معین خواهد شد.

$$T = T_s + T_{\omega} = GK_t \left[ \beta'(x) - \frac{w'(x)}{R} \right] - \frac{EI_{\omega}}{\mu} \left[ \beta''(x) - \frac{w''(x)}{R} \right] \quad (11)$$

و چون داریم،

$$M_y = EI_y \left[ -w''(x) - \frac{\beta(x)}{R} \right] \quad (12)$$

$$B = \frac{EI_{\omega}}{R^2} \eta'(\phi) = EI_{\omega} \eta'(x) \quad (13)$$

که با تأثیر تغییر مکان قائم خواهیم داشت:

$$\beta = [P_1] \{\alpha\}_m \quad (1-24)$$

$$w = [P_2] \{\alpha\}_m \quad (2-24)$$

تابع میدان تابیدگی ( $\eta$ ) تابعی وابسته است و به صورت زیر تعریف می شود.

$$\eta = \beta' + \frac{1}{\kappa^2} \beta''$$

که پس از محاسبه به صورت زیر در می آید.

$$\eta = \alpha_6 + \alpha_7 Ae^{\frac{x}{L}} - \alpha_8 Ae^{-\frac{x}{L}}$$

و یا :

$$\eta = [P_3] \{\alpha\}_m \quad (3-24)$$

در رابطه فوق مقدار A به صورت زیر است.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{\kappa^2 L^3}$$

در روابط فوق مقادیر [P] و  $\{\alpha\}_m$  به صورت زیر می باشد.

$$[P_1] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ x \ e^{\frac{x}{L}} \ e^{-\frac{x}{L}}] \quad (1-25)$$

$$[P_2] = [1 \ x \ x^2 \ x^3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (2-25)$$

$$[P_3] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ Ae^{\frac{x}{L}} \ -Ae^{-\frac{x}{L}}] \quad (3-25)$$

$$\{\alpha\}_m = \{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6 \ \alpha_7 \ \alpha_8\}^T \quad (26)$$

در زیر توابع میدان برحسب مجهولات گرهی هر جزء ارائه شده است. با جایگزینی مختصات معلوم گرهی (گره 1 و 2) در روابط (22) مقادیر مجهول  $\{\alpha\}_m$  از هشت معادله زیر معین خواهد شد.

$$\beta_1 = [P_1(1)] \{\alpha\}_m \quad (1-27)$$

ولاسف کارایی بسیار خوبی دارد. در اینجا نیز برای رابطه سازی ماتریس سختی جزء پیشنهادی از این نظریه استفاده می شود.

شکل (2) جزء پیشنهادی دو گرهی یک تیر مدور افقی را نشان می دهد که این جزء در هر گره دارای چهار درجه آزادی است و لذا بردار تغییر مکان متناظر با چهار درجه آزادی به صورت زیر خواهد بود:

$$\{D\}_m = \{\beta \ w' \ w \ \eta\}^T \quad (19)$$

که در آن داریم:

$\beta$  درجه آزادی وابسته به پیچش

$w'$  درجه آزادی وابسته به خمش

$w$  درجه آزادی وابسته به برش قائم

$\eta$  درجه آزادی وابسته به زوج لنگر (تابیدگی)

بردار نیروهای متناظر با رابطه (19) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\{F\} = \{T \ M_y \ V_z \ B\}^T \quad (20)$$

در این رابطه T لنگر پیچشی کل،  $M_y$  لنگر خمشی،  $V_z$  نیروی برشی و B زوج لنگر است.

دو تابع میدان مستقل یکی مربوط به تغییر مکان قائم ( $w$ ) و دیگری مربوط به زاویه پیچش ( $\beta$ ) به صورت زیر پیشنهاد می شود. در این روابط محور x محور چرخان عضو، L طول تیر قوسی و  $\alpha_1$  تا  $\alpha_8$  ضرایب ثابت هستند. مهمترین مزایای تابع میدان  $\beta$  را می توان به صورت زیر ذکر کرد:

1 - چرخش جسم صلب

2 - حل دقیق برای مسائل پیچش ساده غیریکنواخت

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (21)$$

$$\beta = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 e^{\frac{x}{L}} + \alpha_8 e^{-\frac{x}{L}} \quad (22)$$

درجات آزادی در گره 1 به صورت زیر نوشته می شود.

$$\{D_i\}_m = \{\beta_i \ w'_i \ w_i \ \eta_i\}^T \quad (23)$$

توابع میدان  $\beta$  و  $w$  به صورت ماتریس زیر خواهد بود:

این سه رابطه توابع میدان را برحسب توابع درونیاب و مقادیر گرهی ارائه می دهد که در آنها داریم:

$$[N_{\beta}] = [P_1] [G]^{-1} \quad (1-27)$$

$$[N_w] = [P_2] [G]^{-1} \quad (2-27)$$

$$[N_{\eta}] = [P_3] [G]^{-1} \quad (3-27)$$

این سه رابطه بیانگر ماتریس درونیاب است که به صورت زیر تعریف می شوند.

$$[N_{\beta}] = [N_{\beta 1} \quad N_{\beta 2} \quad N_{\beta 3} \quad N_{\beta 4} \quad N_{\beta 5} \quad N_{\beta 6} \quad N_{\beta 7} \quad N_{\beta 8}] \quad (1-28)$$

$$[N_w] = [N_{w1} \quad N_{w2} \quad N_{w3} \quad N_{w4} \quad N_{w5} \quad N_{w6} \quad N_{w7} \quad N_{w8}] \quad (2-28)$$

$$[N_{\eta}] = [N_{\eta 1} \quad N_{\eta 2} \quad N_{\eta 3} \quad N_{\eta 4} \quad N_{\eta 5} \quad N_{\eta 6} \quad N_{\eta 7} \quad N_{\eta 8}] \quad (3-28)$$

### رابطه سازی ماتریس سختی

با فرض عملکرد ارتجاعی تیر قوسی و با استفاده از روابط استخراج شده، انرژی داخلی کرنش رابطه (۱۵) به صورت زیر ارائه می شود.

$$U = \frac{1}{2} \{D\}_m^T \left( \int_0^L [B]^T [D_m] [B] dx \right) \{D\}_m \quad (23)$$

اگر داشته باشیم:

$$U = \frac{1}{2} \{D\}_m^T [S_m] \{D\}_m \quad (24)$$

$$[S_m] = \int_0^L [B]^T [D_m] [B] dx \quad (25)$$

ماتریس  $[D_m]$  ماتریس خواص مواد و  $[B]$  ماتریس کرنش است که از مشتق های توابع شکل به دست می آید.

$$\{\sigma\} = [D_m] \{\varepsilon\}$$

$$\{\varepsilon\} = [B] \{D\}_m$$

$$w' = [P_2 (1)] \{\alpha\}_m \quad (2-27)$$

$$w_1 = [P_2 (1)] \{\alpha\}_m \quad (3-27)$$

$$\eta_1 = \left[ P_1 (1) + \frac{1}{k^2} P''_1 (1) \right] \{\alpha\}_m = [P_3 (1)] \{\alpha\}_m \quad (4-27)$$

$$\beta_2 = [P_1 (2)] \{\alpha\}_m \quad (5-27)$$

$$w'_2 = [P_2 (2)] \{\alpha\}_m \quad (6-27)$$

$$w_2 = [P_2 (2)] \{\alpha\}_m \quad (7-27)$$

$$\eta_2 = \left[ P_1 (2) + \frac{1}{k^2} P''_1 (2) \right] \{\alpha\}_m = [P_3 (2)] \{\alpha\}_m \quad (8-27)$$

$$\{D\}_m = [G] \{\alpha\}_m = [D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4 \quad D_5 \quad D_6 \quad D_7 \quad D_8] \quad (28)$$

$$\{\alpha\}_m = [G]^{-1} \{D\}_m \quad (29)$$

در روابط بالا  $[G]$  ماتریس مربع معلومی است که به مختصات گره ها بستگی دارد. سطر  $m$  این ماتریس مقدار  $P_1$  و یا یکی از مشتقات  $P_i$  در گره مزبور است. در روابط بالا گره ابتدا با شماره ۱ و گره انتها با شماره ۲ معین شده است. بردار  $\{D\}_m$  بردار تغییر مکان های گرهی است و در واقع  $D_1$  تا  $D_8$  درجات آزادی گرههاست که به ترتیب در روابط (۲۷) معین شده است. با معلوم شدن  $\{\alpha\}_m$  مقدار تابع میدان برحسب مقادیر مجهول گرهی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\beta = [P_1] \{\alpha\}_m = [P_1] [G]^{-1} \{D\}_m = [N_{\beta}] \{D\}_m \quad (1-30)$$

$$w = [P_2] \{\alpha\}_m = [P_2] [G]^{-1} \{D\}_m = [N_w] \{D\}_m \quad (2-30)$$

$$\eta = [P_3] \{\alpha\}_m = [P_3] [G]^{-1} \{D\}_m = [N_{\eta}] \{D\}_m \quad (3-30)$$

حال با استفاده از رابطه (۱۸-۱) می توان نوشت:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L \left( -w'' - \frac{\beta}{R} \right) [EI_y] \left( -w'' - \frac{\beta}{R} \right) dx \quad (۳۶)$$

و با استفاده از روابط (۳۰) می توان نوشت:

$$w = [N_w] \{D\}_m \quad (۱-۳۸)$$

$$w' = [N'_w] \{D\}_m \quad (۲-۳۸)$$

$$w'' = [N''_w] \{D\}_m \quad (۳-۳۸)$$

$$\beta = [N_\beta] \{D\}_m \quad (۴-۳۸)$$

$$\beta' = [N'_\beta] \{D\}_m \quad (۵-۳۸)$$

$$\beta'' = [N''_\beta] \{D\}_m \quad (۶-۳۸)$$

$$\eta = [N_\eta] \{D\}_m \quad (۷-۳۸)$$

$$\eta' = [N'_\eta] \{D\}_m \quad (۸-۳۸)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ -[N'_w] - \frac{1}{R} [N_\beta] \right] \{D\}_m^T [EI_y] \left[ -[N''_w] - \frac{1}{R} [N_\beta] \right] \{D\}_m dx \quad (۳۹)$$

این رابطه به صورت ساده زیر نیز بیان می شود.

$$U_b = \frac{1}{2} \{D\}_m^T \left( \int_0^L [B_b]^T [D_{mb}] [B_b] dx \right) \{D\}_m \quad (۴۰)$$

با مقایسه این رابطه با رابطه (۳۳) تا (۳۵) می توان نوشت:

$$[S_b]_m = \int_0^L [B_b]^T [D_{mb}] [B_b] dx \quad (۴۱)$$

که در آن داریم:

$$[D_{mb}] = EI_y \quad (۴۲)$$

$$[B_b] = -[N''_w] - \frac{1}{R} [N_\beta]$$

ماتریس  $[S_b]_m$  ماتریس سختی خمشی عضو قوسی در محورهای محلی است و ماتریس  $[D_{mb}]$  و  $[B_b]$  به ترتیب ماتریس خواص مواد و ماتریس کرنش خمشی است.

به صورت مشابه و با استفاده از رابطه (۱۸-۲) می توان ماتریس سختی پیچشی را به صورت زیر معین کرد.

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{GK_t}{2} \int_0^L \left( \beta' - \frac{w'}{R} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left( \beta' - \frac{w'}{R} \right) [GK_t] \left( \beta' - \frac{w'}{R} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \{D\}_m^T \left( \int_0^L [B_t]^T [D_{mt}] [B_t] dx \right) \{D\}_m \quad (۴۳) \end{aligned}$$

که از آن:

$$[S_t]_m = \int_0^L [B_t]^T [D_{mt}] [B_t] dx \quad (۴۴)$$

در این رابطه داریم:

$$[D_{mt}] = GK_t$$

$$[B_t] = [N'_\beta] - \frac{1}{R} [N'_w] \quad (۴۵)$$

ماتریس سختی تابیدگی نیز از روابط زیر معین خواهد شد.

$$\begin{aligned} U_\omega &= \frac{1}{2} \int_0^L \left( \eta - \frac{w''}{R} \right) [EI_\omega] \left( \eta' - \frac{w''}{R} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \{D\}_m^T \left( \int_0^L [B_\omega]^T [D_{m\omega}] [B_\omega] dx \right) \{D\}_m \quad (۴۶) \end{aligned}$$

$$[S_\omega]_m = \int_0^L [B_\omega]^T [D_{m\omega}] [B_\omega] dx \quad (۴۷)$$

در آن رابطه داریم:

$$[D_{m\omega}] = EI_\omega$$

$$[B_\omega] = [N'_\eta] - \frac{1}{R} [N''_w] \quad (۴۸)$$

و بالاخره ماتریس سختی برش ثانویه تابیدگی نیز از روابط زیر معین خواهد شد.

$$K_{ij} = \int_0^L B_{ti} B_{tj} dx \quad i = 1, 8 \quad j = 1, 8 \quad (2-54)$$

$$[B_t] = [B_{ti}] \quad i = 1, 8 \quad (1-55)$$

$$B_{ti} = N'_{\beta i} - \frac{1}{R} N_{wi} \quad i = 1, 8 \quad (2-55)$$

### ماتریس سختی تابیدگی

برای تعیین ماتریس سختی تابیدگی (رابطه ۴۷) در محورهای محلی و ماتریس کرنش تابیدگی (رابطه ۴۸) به صورت زیر عمل می‌شود.

$$[S_{\omega}]_m = EI_{\omega} [K_{\omega ij}] \quad i = 1, 8 \quad j = 1, 8 \quad (1-56)$$

$$K_{\omega ij} = \int_0^L B_{\omega i} B_{\omega j} dx \quad i = 1, 8 \quad j = 1, 8 \quad (2-56)$$

$$[B_{\omega}] = [B_{\omega i}] \quad i = 1, 8 \quad (1-57)$$

$$B_{\omega i} = N'_{\eta i} - \frac{1}{R} N_{wi} \quad i = 1, 8 \quad (2-57)$$

### ماتریس سختی برش ثانویه تابیدگی

از رابطه (۵۰) و رابطه (۵۱) به ترتیب ماتریس سختی برش ثانویه تابیدگی و ماتریس کرنش مربوطه در محورهای محلی معین می‌شود.

$$[S_s]_m = G (I_c - K_t) [K_{sij}] \quad i = 1, 8 \quad j = 1, 8 \quad (1-58)$$

$$K_{sij} = \int_0^L B_{si} K_{sj} dx \quad i = 1, 8 \quad j = 1, 8 \quad (2-58)$$

$$[B_s] = [B_{si}] \quad i = 1, 8 \quad (1-59)$$

$$B_{si} = N'_{\beta i} - N_{\eta i} \quad i = 1, 8 \quad j = 1, 8 \quad (2-59)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L (\beta' - \eta) [G (I_c - K_t) (\beta' - \eta)] dx \\ = \frac{1}{2} \{D\}_m^T \left( \int_0^L [B_s]^T [D_{ms}] [B_s] dx \right) \{D\}_m \quad (49)$$

$$[S_s]_m = \int_0^L [B_s]^T [D_{ms}] [B_s] dx \quad (50)$$

در آن داریم:

$$[D_{ms}] = G (I_c - K_t)$$

$$[B_s] = [N'_{\beta}] - [N_{\eta}] \quad (51)$$

### ماتریس سختی خمشی

برای تعیین ماتریس سختی خمشی در محورهای محلی (رابطه ۴۱) به صورت زیر عمل می‌شود:

$$[S_b]_m = EI_y [K_{bij}] \quad i = 1, 8 \quad j = 1, 8 \quad (1-52)$$

$$K_{bij} = \int_0^L B_{bi} B_{bj} dx \quad i = 1, 8 \quad j = 1, 8 \quad (2-52)$$

ماتریس کرنش  $[B_b]$  (رابطه ۴۲) به صورت زیر معین می‌شود.

$$[B_b] = [B_{bi}] \quad i = 1, 8 \quad (1-53)$$

$$B_{bi} = -N'_{wi} - \frac{1}{4} N_{\beta i} \quad i = 1, 8 \quad (2-53)$$

پس از انجام محاسبات لازم درایه‌های ماتریس سختی خمشی معین خواهد شد.

### ماتریس سختی پیچشی

برای تعیین ماتریس سختی پیچشی در محورهای محلی (رابطه ۴۴) و ماتریس کرنش متناظر با آن (رابطه ۴۵) داریم:

$$[S_t]_m = GK_t [K_{tij}] \quad i = 1, 8 \quad j = 1, 8 \quad (1-54)$$

$$D_{m8} = D_{s8} \quad (۸-۶۲)$$

شکل ماتریسی روابط فوق به صورت زیر خواهد بود.

$$\{D\}_m = [R] \{D\}_s \quad (۶۲)$$

که در آن ماتریس [R] با رابطه زیر معین می شود،

$$[R] = \begin{bmatrix} R_j & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix} \quad (۱-۶۴)$$

اگر کسینوس های هادی به صورت زیر باشد،

$$C_j = \cos \gamma$$

$$S_j = \sin \gamma$$

$$C_k = \cos (\gamma \pm \phi)$$

$$S_k = \sin (\gamma \pm \phi)$$

زیر ماتریس های [R<sub>j</sub>] و [R<sub>k</sub>] خواهد شد.

$$[R_j] = \begin{bmatrix} C_j & S_j & 0 & 0 \\ S_j & C_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_k] = \begin{bmatrix} C_k & S_k & 0 & 0 \\ -S_k & C_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۲-۶۴)$$

اگر ماتریس [S<sub>e</sub>] ماتریس سختی عضو قوسی در محورهای کلی باشد این ماتریس با رابطه (۶۵) به دست خواهد آمد (شکل های ۳ و ۴):

$$[S_e]_m = [R]^T [S_e]_s [R] \quad (۶۵)$$

نیروهای عضو با رابطه زیر معین خواهند شد

## ماتریس سختی عضو قوسی در محورهای محلی

ماتریس سختی عضو قوسی در محورهای محلی از روی هم گذاری روابط (۵۲-الف)، (۵۴-الف)، (۵۶-الف) و (۵۸-الف) به دست می آید. یعنی:

$$[S]_m = [S_b]_m + [S_t]_m + [S_w]_m + [S_s]_m \quad (۶۰)$$

$$[S_e]_m = [K_{eij}] \quad i = 1, 8 \quad j = 1, 8 \quad (۱-۶۱)$$

ماتریس [S<sub>e</sub>]<sub>m</sub> ماتریس سختی عضو در محورهای محلی است که درایه های آن به صورت زیر تعریف می شود.

$$K_{eij} = EI_y K_{bij} + GK_t K_{tij} + EI_w K_{wij} + G(I_c - K_t) K_{sij} \quad i = 1, 8 \quad j = 1, 8 \quad (۲-۶۱)$$

## ماتریس مبدل و ماتریس سختی عضو قوسی در محورهای کلی

شکل (۳) محورهای مختصات محلی (x, y, z) و دستگاه محورهای مختصات کلی (X, Y, Z) و شکل (۴) درجات آزادی محلی و کلی را برای دو گره ابتدا و انتهای عضو قوسی نشان می دهد که روابط زیر بین آنها برقرار است.

$$D_{m1} = D_{s1} \cos \gamma + D_{s2} \sin \gamma \quad (۱-۶۲)$$

$$D_{m2} = -D_{s1} \sin \gamma + D_{s2} \cos \gamma \quad (۲-۶۲)$$

$$D_{m3} = D_{s3} \quad (۳-۶۲)$$

$$D_{m4} = D_{s4} \quad (۴-۶۲)$$

$$D_{m5} = D_{s5} \cos (\gamma \pm \phi) + D_{s6} \sin (\gamma \pm \phi) \quad (۵-۶۲)$$

$$D_{m6} = -D_{s5} \sin (\gamma \pm \phi) + D_{s6} \cos (\gamma \pm \phi) \quad (۶-۶۲)$$

$$D_{m7} = D_{s7} \quad (۷-۶۲)$$



$$\{F_e\}_m = [S_e]_m [R] \{D\}_s + \{F_e\}_{F,m} \quad (66)$$

در این رابطه بردار  $\{F_e\}_{F,m}$  نیروهای گیرداری معادل گرهی (ناشی از بارهای میانی) در محورهای محلی عضو را معین می‌کند و بردار  $\{F_e\}_m$  نیز نیروهای دو انتهای عضو را به دست می‌دهد.

### نیروهای گیرداری به روش اجزاء محدود

بردار نیروهای گیرداری با در نظر داشتن تعریف درجات آزادی در هر گره  $i$  به صورت زیر خواهند بود:

$$\{F_e\}_{F,m} = \{T_i, M_{y_i}, V_{z_i}, B_i\}^T \quad (67)$$

اگر جزء قوسی زیر اثر نیروهای خارجی قرار گیرد شرایط تعادل آن باتوجه به اصل حداقل انرژی داخلی به صورت زیر بیان می‌شود [B1].

$$\delta(U - V) = 0 \quad (68)$$

در این رابطه  $U$  انرژی داخلی در جزء تیری و  $V$  کار نیروهای خارجی است و لذا رابطه زیر برای بردار نیروها در دستگاه مختصات محلی برقرار خواهد بود [B1]:

$$\{F_e\}_{F,m} = \int_0^L [D']_{m,i}^T \{f\}_{m,i} dx + \sum [D'z]_{m,k}^T \{F_z\}_{m,k} \quad (69)$$

در این رابطه  $\{F_e\}_{F,m}$  بردار نیروهای معادل گرهی بارهای میانی  $[D']_m$  ماتریس توابع شکل گرهی برحسب مختصات  $x$ ،  $[D'z]_{m,k}$  ماتریس توابع شکل در گره  $z$  از عضو (محل اثر بار متمرکز)  $\{f\}_m$  بردار نیروهای گسترده بر روی عضو  $\{F_z\}_m$  بردار نیروهای متمرکز وارد بر المان در گره  $z$  از عضو  $i$  و  $k$  شمارنده تعداد بارهای گسترده و متمرکز است. بردار نیروها با روابط زیر بیان می‌شوند.

$$\{f_m\}_m = \{m_x, m_y, P_z, b\}^T \quad (1-70)$$

$$\{F_z\}_m = \{M_x, M_y, P, B\}^T \quad (2-70)$$

و ماتریس‌های  $[D']_m$  و  $[D'z]_m$  با روابط زیر به دست می‌آیند.

$$[D']_m = [P_i(x)] [G]^{-1} \quad i = 1, 2, 3 \quad (1-71)$$

$$[D'z]_m = [P_i(x)] [G]^{-1} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2-71)$$

در این روابط  $[G]^{-1}$  وارون ماتریس  $[G]$  است و ماتریس‌های  $[P_i]$  تا  $[P_3]$  از روابط (۲۵) به دست خواهند آمد.

### مثال

در اینجا تیر قوسی شکل های (۵) و (۶) که در مرجع [D1] با ۱۶ جزء مستقیم و با طول های نامسای تحلیل شده است با چهار جزء قوسی با هشت درجه آزادی تحلیل شده و نتایج تحلیل به صورت نمودار در اشکال (۷) و (۸) با یکدیگر مقایسه شده است. مشخصات مقاطع روی اشکال مشخص است و مقادیر  $E$  و  $G$  برای مصالح تیر قوسی به ترتیب 30000 ksi و 12000 ksi می‌باشد.

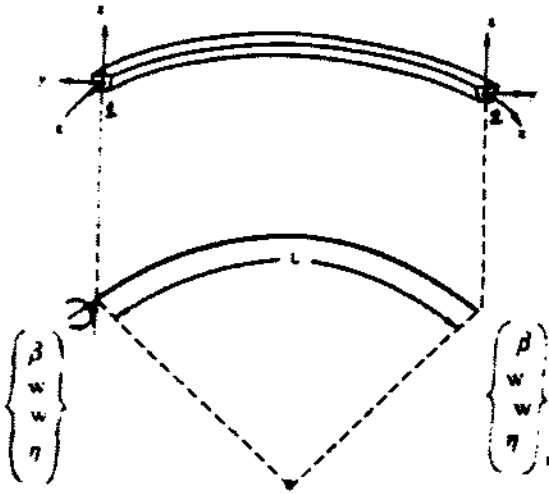
از آنجا که در مثال مرجع [D1] و روش پیشنهادی از یک نوع تابع میدان برای خمش استفاده شده است پاسخ های تغییر مکان و لنگر خمشی به یکدیگر نزدیک است و لی در مورد پیچش که از تابع نمایی در روش پیشنهادی استفاده شده است، مقادیر زاویه پیچش و زوج لنگر خود را بهتر نشان داده است.

باید توجه داشت که در این مثال به دلیل وجود تکیه گاه میانی و تغییر مشخصات مقطع از چهار جزء قوسی استفاده شده است و در مرجع [D1] از شانزده جزء استفاده شده است که از نظر سهولت در داده دهی و داده ستانی بسیار با یکدیگر متفاوت خواهند بود.

### نتیجه گیری

باتوجه به نتایج حاصل و کارآمدی روش پیشنهادی می‌توان به صورت زیر نتیجه گیری کرد:

۱- جزء پیشنهادی قادر به تحلیل تمامی تیرها و شبکه های قوسی با هر نوع شرایط مرزی و بارگذاری مختلف است و در مقایسه با اجزاء مستقیم که نیاز به داده دهی و داده ستانی بسیار بالایی دارد از احتمال خطای کمتری برخوردار است. در ضمن



شکل (۱) تیر قوسی و تغییر شکل آن.

تیرهای مستقیم را نیز می توان با جزء قوسی پیشنهادی و با میل دادن شعاع انحنا به سمت بی نهایت تحلیل کرد.

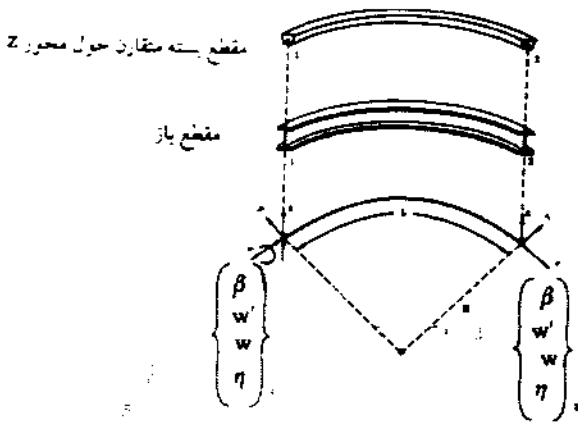
۲- اختلاف دستگاه سه درجه آزادی با روش پیشنهادی در ملحوظ کردن اثر تغییر شکل های ثانویه تابیدگی در روش پیشنهادی است. به این دلیل دستگاه با سه درجه آزادی نمی تواند رفتار واقعی تابیدگی حاصل از پیچش را در تیر جدار نازک قوسی بیان کند.

۳- اختلاف بین جزء ولاسف [H1] و جزء ولاسف بهبود یافته [H2] در وارد کردن اثر تغییر شکل های برشی تابیدگی است و اختلاف روش پیشنهادی و جزء بهبود یافته و ولاسف در انتخاب توابع میدان است که با توجه به جواب عمومی معادلات دیفرانسیل حاکم بر پیچش تابیدگی در تیرهای قوسی که به صورت نمایی است لذا پاسخ های به دست آمده با روش پیشنهادی در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی سازگاری بهتری را نشان می دهد.

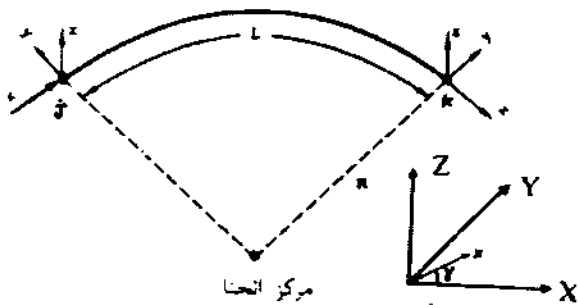
۴- زوج لنگرهای به دست آمده از روش لاسف همیشه بزرگتر از مقادیری است که از روش پیشنهادی به دست می آیند، زیرا که اثر تغییر شکل های تابیدگی در روش پیشنهادی ملحوظ شده است.

۵- چون مقدار زوج لنگر با افزایش پارامتر پیچش تابیدگی ( $\mu$ ) کم می شود هرگاه مقدار ضریب ثابت پیچش در مقایسه با ضریب ثابت تابیدگی قابل ملاحظه باشد می توان اثر زوج لنگر را نادیده انگاشت.

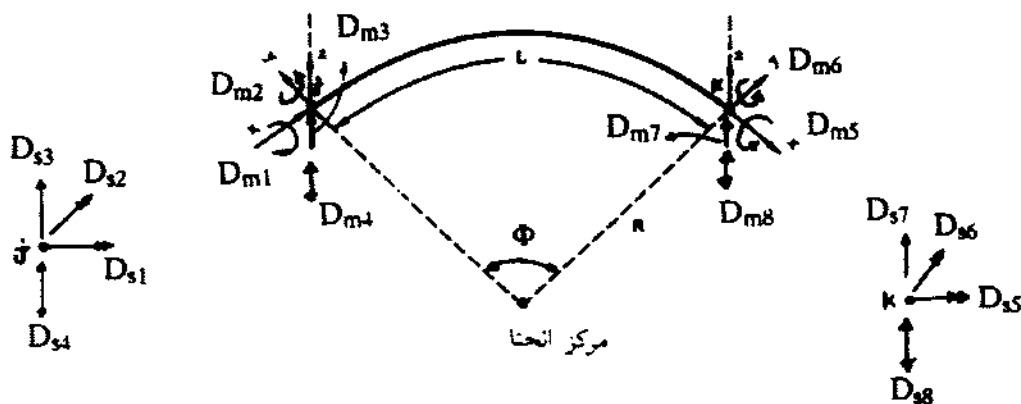
۶- دیده می شود که مقادیر تغییر مکان ها و زاویه پیچش تطابق بهتری با نتایج حاصل از روش های تحلیلی و آزمایشگاهی دارند در حالی که این موضوع برای نیروها این گونه نیست. سبب آن این است که از روش سختی استفاده شده است. اگر نیاز به دقت بیشتر در مقادیر نیروها باشد باید از روش نرمی مدد جست و به عبارت دیگر باید توابع میدان را برای نیروها در نظر گرفت. ولی چون روش سختی در برنامه نویسی انعطاف پذیرتر است در عمل این روش ترجیح داده می شود.



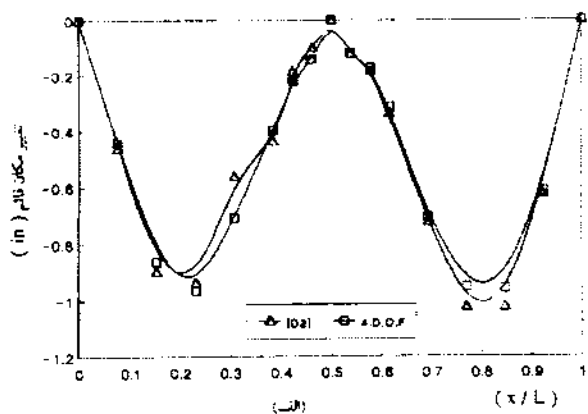
شکل (۲) درجات آزادی و تغییر شکل تیر قوسی نسبت به محور مرکزی آن.



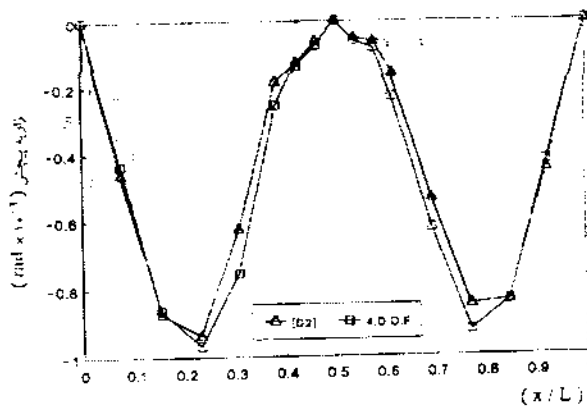
شکل (۳) محورهای مختصات محلی و کلی در عضو قوسی.



شکل (۲) درجات آزادی در محورهای مختصات معلی و کلی برای عضو قوسی.



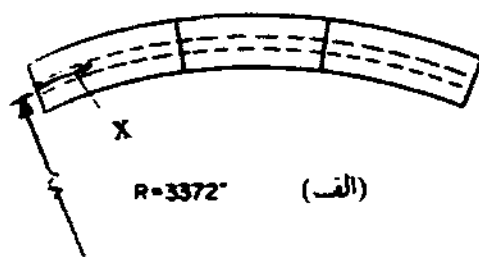
(الف)



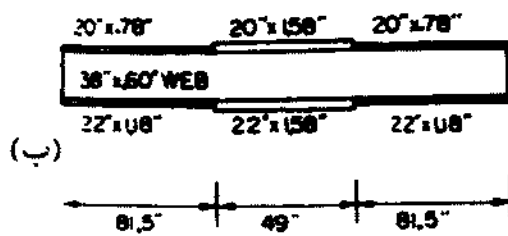
(ب)

شکل (۷) الف - نمودار تغییر مکان (in)

ب - نمودار زاویه پیچش (rad)



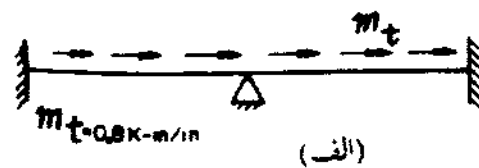
(الف)



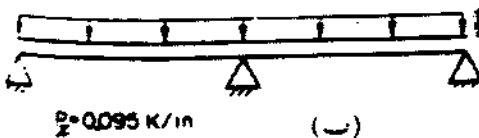
(ب)

شکل (۵) الف - پلان شایسته قوسی

ب - مشخصات مقاطع کناری و مقطع میانی



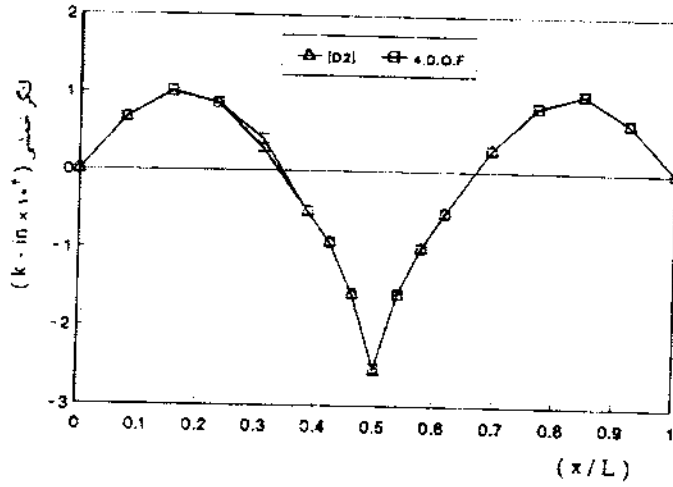
(الف)



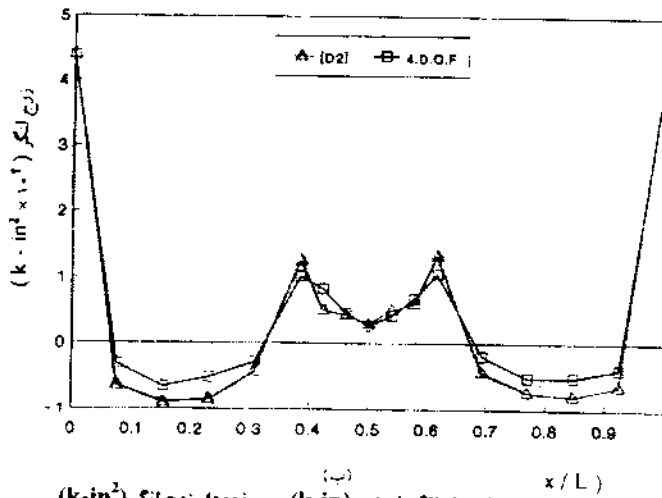
(ب)

شکل (۶) الف - لنگر پیچشی یکنواخت و شرایط مرزی پیچش

ب - نیروی گسترده یکنواخت و شرایط مرزی خمش



(الف)



(ب)

شکل (A) الف - نمودار لنگر خمشی (k-in) ب - نمودار زوج لنگر (k-in<sup>2</sup>)

## مراجع

- [1] Bath, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., (1985).
- [2] Dvorkin, E.N. "A Vlasov Beam Element", Computers & Structures, VOL. 33, No. 1, PP. 187-196, (Eds. Celentano, d., Cuitiono, a. and Gioiab.) (1989)
- [3] Dabrowski, R., "Curved Thin-Walled Girders", Cement and Concrete Association, London, England, (1968).
- [4] Hsu, Y.T., "An Improved Horizontally-Curved Beam Element", Computers & Structures, VOL. 34, NO. 2, PP. 313-318. (Eds. Fu, C.C. and Schellin, D.R.), (1990).
- [5] Hsu, Y. T., "The Development of an Improved Curvilinear Thin-Walled Vlasov Element", Computers & Structures, VOL. 54, No. 1, PP. 147-159. (Ed. Fu, C.C.), (1995).
- [6] Vlasov, V.Z., "Thin-Walled Elastic Beams", National Science Foundation, (1961).
- [7] Yang, Y.B., "Curved Beam Elements for Nonlinear Analysis", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, VOL. 115, No. 4, PP. 840-855, (Eds. Kuo, S.R. and Cherng, Y.D.), (1989).
- [8] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R. L., "The Finite Element Method", 4th Ed., London; New York McGraw-Hill, (1989).