

روش طول قوس بیضوی

دکتر محمد رضا یی پژند

استاد گروه عمران، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

مهندس امیر هوشنگ اخویسی

کارشناس ارشد سازه، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده :

برای تحلیل غیر خطی هندسی "روش طول قوس بیضوی" پیشنهاد می شود. در این شیوه تحلیل، مکان هندسی پاسخهای نکراری بر روی یک بیضی قرار می کیرند. قطرهای بزرگ و کوچک این بیضی، به ترتیب، تغییر مکان و ضربه بار نمودی در نخستین تکرار از هر گام می باشند. این فن برای حل مساله های گوناگونی به کار رفته و نتیجه های مفیدی به دست آمده است. در این مقاله از روش پیشنهادی برای تحلیل پوسته ها استفاده می شود و چند نمونه از آنها به نظر خوانندگان می رسد.

واژه های کلیدی : رفتار غیر خطی هندسی، طول قوس بیضوی، کار نمودی، صفحه قائم، طول قوس استوانه ای، پوسته.

- پیشگفتار

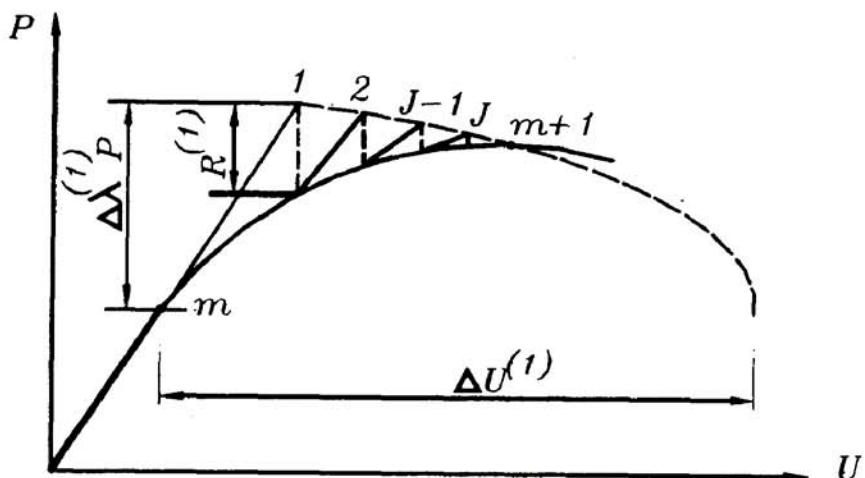
پژوهشگران برای تحلیل پوسته ها از نگره های مختلفی سود می برند. از آن میان می توان به نگره پوسته های نازک اشاره کرد. یادآوری می کند، نگره معمول صفحه ها که در آن اثر خمیش موثر بوده و اثر تغییر شکلهای برشی چشم پوشی می کند، بر اساس نگره کیرشهف بنا شده است. بر پایه این فرضیه، دوران مقطعها در اثر برش وجود ندارند. به سخن دیگر، هر مقطع پس از تغییر شکل به صورت صفحه باقی می ماند. بنابراین، بر اساس نگره کیرشهف، مقطع عمود بر میان صفحه پیش از تغییر شکل، پس از آن نیز بر صفحه مزبور عمود خواهد بود. این فرضیه برای صفحه های نازک مناسب است. با این حال، در صفحه های ضخیم، چند لایه ای و خانه خانه ای، اثر برش قابل توجه می باشد. از این رو، در صفحه های ضخیم نباید از اثر برش چشم پوشی نمود. برای تحلیل صفحه ها و پوسته ها با وارد کردن اثر برش از فرضهای رایز نر - میندلین بهره می جویند [۱].

یکی از روش های الگوسازی جزه های پوسته ای، استفاده از ویژه سازی اجزای سه بعدی بر پایه نگره رایز نر - میندلین می باشد. با استفاده از ویژه سازی اجزای سه بعدی می توان اثرهای خطی برش را در نظر گرفت. ویژه سازی اجزای سه بعدی همان حذف بعد ضخامت در مقایسه با ابعاد دیگر است. این کار، با انتخاب گره های میانی بر روی میان صفحه پوسته صورت می گیرد. شایان توجه است، با استفاده از این نگره، روش تحلیل ساده ای برای پوسته های انحنای دار به دست می آید.

[۵] ناتوان نماند ، کاهش یک بعد (ضخامت) در مقایسه با ابعاد دیگر . سبب افزایش سختی برشی می شود . این سختی بر سختی خمی چیره خواهد شد و در حقیقت ، قفل برشی به وجود می آورد . از فنون مختلفی برای کاهش اثر سختی برشی سود می بردند . از آن میان می توان به تابع جایگزین کرنش برشی و تابع اولیه گیری عددی اشاره کرد . آشکار شده است ، در اجزای ۴ و ۸ گرهی ، روش تابع اولیه گیری کامل سریعتر منجر به قفل برشی می گردد . همچنین ، حزنی که از تابع اولیه گیری انتخابی استفاده می کند ، قفل خواهد کرد . باید آگاه بود ، با افزودن گره های میانی به جزهای لاغرانژی ۹ و ۱۶ گرهی ، می توان از قفل برشی آنها جلوگیری کرد . با توجه به این ویژگی ، نویسندها در اینجا از جزء ۹ گرهی لاغرانژی برای تحلیل پوسته ها استفاده می کنند . افزون بر اینها ، روش طول قوس بیضوی برای تحلیل غیر خطی سازه ها پیشنهاد می شود که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد .

- روش طول قوس بیضوی

در این روش ، فرض می شود که منحنی گذرکننده از مکان هندسی نتایج تحلیلهای تکراری بر روی بیضی قرار دارند . شکل (۱) نمودار بار - تغییر مکان (P, U) سازه ای با یک درجه آزادی را نشان می دهد . آشکار است ، نخست با یک تحلیل نموی نقطه (۱) بر روی مکان هندسی نتایج تحلیلهای تکراری به دست می آید . پس از آن ، با تعیین نیروی نامیزان (۱) R و اثر دادن آن به سازه ، نقطه (۲) به دست می آید . این روند تحلیل دنبال خواهد شد تا نقطه تعادلی $m+1$ پیدا شود . چگونگی رابطه سازی این روش و فرضهای آن در ادامه به نظر خوانندگان می رسد .



شکل (۱) روش طول قوس بیضوی

- رابطه سازی

برای انجام رابطه سازی "روش طول قوس بیضوی" نیاز به نوشتمن معادله بیضی زیر می باشد :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

یادآوری می کند ، در این رابطه $2a$ و $2b$ ، به ترتیب ، قطرهای بزرگ و کوچک بیضی نامیده شده اند . برای یافتن رابطه اصلی ، باید قطرهای بیضی مشخص شوند . مهمترین فرض روش پیشنهادی این است که قطرهای بزرگ و کوچک بیضی ، به ترتیب ، تغییر مکان و ضریب بار نموی در اولین تکرار از هر گام می باشند . در یک تحلیل تکراری می توان تغییر مکان و ضریب بار نموی (۲) را در گام J ام به صورت زیر نوشت :

$$\begin{aligned}\{\delta U\}^{(J)} &= \{\delta U\}^{(J-1)} + \{\Delta U\}^{(J)} \\ \lambda^{(J)} &= \lambda^{(J-1)} + \Delta \lambda^{(J)}\end{aligned}\quad (2)$$

با استفاده از رابطه (۱) و فرضهای یاد شده می توان معادله بیضی را به صورت زیر یافت :

$$\frac{\{\delta U\}^{(J)T} \{\delta U\}^{(J)}}{\{\Delta U\}^{(1)T} \{\Delta U\}^{(1)}} + \frac{\left(\lambda^{(J)}\right)^2 \{P\}^T \{P\}}{\left(\Delta \lambda^{(1)}\right)^2 \{P\}^T \{P\}} = 1 \quad (3)$$

یادآوری می نماید ، در هر تحلیل تکراری می توان تغییر مکان در تکرار Jام را به صورت زیر حساب کرد :

$$\{\Delta U\}^{(J)} = \Delta \lambda^{(J)} \{\Delta U\}_P^{(J)} + \{\Delta U\}_r^{(J)} \quad (4)$$

زیر نویسهای \mathbf{z} و \mathbf{P} ، به ترتیب ، نمایش دهنده بار نامیزان و بار نموی می باشند . با جاگذاری رابطه های (۴) و (۲) در (۳) و ساده نمودن آن ، معادله درجه دوم زیر به دست می آید :

$$\begin{aligned}a(\Delta \lambda^{(J)})^2 + b\Delta \lambda^{(J)} + c &= 0 \\ a &= \frac{\{\Delta U\}_P^{(J)T} \{\Delta U\}_P^{(J)}}{\{\Delta U\}^{(1)T} \{\Delta U\}^{(1)}} + \frac{1}{(\Delta \lambda^{(1)})^2} \\ b &= 2 \left(\frac{\{\{\Delta U\}_P^{(J)T} \{\Delta U\}_r^{(J)} + \{\delta U\}^{(J-1)T} \{\Delta U\}_P^{(J)}\}}{\{\Delta U\}^{(1)T} \{\Delta U\}^{(1)}} + \frac{\lambda^{(J-1)}}{(\Delta \lambda^{(1)})^2} \right) \\ c &= \frac{\{\{\delta U\}^{(J-1)} + \{\Delta U\}_r^{(J)}\}^T \{\{\delta U\}^{(J-1)} + \{\Delta U\}_r^{(J)}\}}{\{\Delta U\}^{(1)T} \{\Delta U\}^{(1)}} + \left(\frac{\lambda^{(J-1)}}{\Delta \lambda^{(1)}} \right)^2 - 1\end{aligned}\quad (5)$$

باید افزود ، برنامه رایانه ای بر اساس این رابطه ها آماده شد و مثالهای متفاوتی با آن مورد بررسی قرار گرفتند . در آزمونهای انجام شده ، این نتیجه به دست آمد که کارایی رابطه (۵) کم می باشد . به سخن دیگر ، مهمترین مشکل به وجود آمدن میز منفی ($b^2 - 4ac < 0$) برای این معادله است . این مشکل هنگامی رخ می دهد که به سبب خطاهای موجود در روند تحلیل ، مبین معادله در اعداد نزدیک به صفر ، منفی می شود . بنابراین ، برای از بین این عیب ، شرط دیگری به روش وار می گردد . این شرط همان قرار گرفتن تتابع تحلیلهای تکراری بر روی معادله بیضی است . به سخن دیگر ، نتیجه تحلیل (J-1)ام تکرار باید در معادله بیضی صدق کند . بنابراین ، با توجه به رابطه (۳) می توان نوشت :

$$-\frac{\{\delta U\}^{(J-1)T} \{\delta U\}^{(J-1)}}{\{\Delta U\}^{(1)T} \{\Delta U\}^{(1)}} = \left(\frac{\lambda^{(J-1)}}{\Delta \lambda^{(1)}} \right)^2 - 1 \quad (6)$$

با جاگذاری رابطه (۶) در (۵) ، رابطه (۵) به صورت زیر تغییر می کند :

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\{\Delta U\}_P^{(J)T} \{\Delta U\}_P^{(J)}}{\{\Delta U\}_P^{(I)T} \{\Delta U\}_P^{(I)}} + \frac{1}{(\Delta \lambda^{(I)})^2} \\
 b &= 2 \left(\frac{\left\{ \{\Delta U\}_P^{(J)T} \{\Delta U\}_r^{(J)} + \{\delta U\}_r^{(J-1)T} \{\Delta U\}_P^{(J)} \right\}}{\{\Delta U\}_P^{(I)T} \{\Delta U\}_r^{(I)}} + \frac{\lambda^{(J-1)}}{(\Delta \lambda^{(I)})^2} \right) \\
 c &= \frac{2 \left\{ \{\delta U\}_r^{(J-1)T} \{\Delta U\}_r^{(J)} + \{\Delta U\}_r^{(J)T} \{\Delta U\}_r^{(J)} \right\}}{\{\Delta U\}_r^{(I)T} \{\Delta U\}_r^{(I)}}
 \end{aligned} \tag{7}$$

با توجه به این که میان این معادله $(b^2 - 4ac)$ چه علامتی داشته باشد ، حالت‌های مختلف زیر قابل بررسی است :

- هنگامی که $b^2 - 4ac \geq 0$ است : در این حالت ، معادله دارای دو ریشه حقیقی پیش باشد . اگر دو ریشه مزبور ، به ترتیب ، $\Delta \lambda_1^{(J)}, \Delta \lambda_2^{(J)}$ باشند ، برای دستیابی به ریشه درست از قانون همسو بودن بردارهای $\{\delta U\}_1^{(J)}, \{\delta U\}_2^{(J)}$ استفاده می‌گردد . برای این منظور ، نخست بایستی به کمک دو ریشه مورد بحث بردارهای تغییر مکان $\{\delta U\}_1^{(J)}, \{\delta U\}_2^{(J)}$ را به دست آورد . این کار با استفاده از رابطه‌های (۴) و (۲) انجام می‌شود . سپس ، با ضرب داخلی بردار $\{U\}^{(J-1)}$ در بردارهای مزبور ، زاویه‌های میان آنها ، تعیین می‌گردند . به این ترتیب ، زاویه‌های θ_1 و θ_2 به صورت زیر حساب می‌شوند :

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_1 &= \frac{\{\delta U\}_1^{(J)T} \{\delta U\}_1^{(J-1)}}{\|\{\delta U\}_1^{(J)}\| \|\{\delta U\}_1^{(J-1)}\|} \\
 \cos \theta_2 &= \frac{\{\delta U\}_2^{(J)T} \{\delta U\}_2^{(J-1)}}{\|\{\delta U\}_2^{(J)}\| \|\{\delta U\}_2^{(J-1)}\|}
 \end{aligned} \tag{8}$$

ضریب بار وابسته به زاویه مثبت ، ریشه مناسب معادله (۷) می‌باشد . در صورت هم علامت بودن θ_1 و θ_2 ، ریشه ای مناسب است که به مقدار عددی زیر نزدیکتر باشد :

$$\Delta \lambda = -\frac{c}{b} \tag{9}$$

- هنگامی که $b^2 - 4ac < 0$ است : در این حالت ، معادله دارای ریشه‌های موهومی می‌باشد . برای از بین بردن این حالت از یک ضریب آسایش β استفاده می‌گردد . این ضریب به صورت زیر وارد تحلیل می‌شود :

$$\{\Delta U\}^{(J)} = \Delta \lambda^{(J)} \{\Delta U\}_P^{(J)} + \beta \{\Delta U\}_r^{(J)} \tag{10}$$

این ضریب سبب کاهش اثر تغییر مکانهای ناشی از نیروی نامیزان می‌شود . اینک ، با جاگذاری رابطه‌های (۱۰) و (۲) در (۳) ، رابطه (۷) به صورت زیر در می‌آید :

$$\begin{aligned}
a(\Delta\lambda^{(j)})^2 + b\Delta\lambda^{(j)} + c &= 0 \\
a &= \frac{\{\Delta U\}_P^{(j)T} \{\Delta U\}_P^{(j)}}{\{\Delta U\}_{(1)T}^{(1)T} \{\Delta U\}_{(1)}^{(1)}} + \frac{1}{(\Delta\lambda^{(1)})^2} \\
b &= 2 \left(\frac{\{\{\Delta U\}_P^{(j)T} \{\Delta U\}_r^{(j)} \beta + \{\delta U\}_{(j-1)T}^{(j-1)T} \{\Delta U\}_P^{(j)}\}}{\{\Delta U\}_{(1)T}^{(1)T} \{\Delta U\}_{(1)}^{(1)}} + \frac{\lambda^{(j-1)}}{(\Delta\lambda^{(1)})^2} \right) \\
c &= \frac{2 \left\{ \{\delta U\}_{(j-1)T}^{(j-1)T} \{\Delta U\}_r^{(j)} \beta \right\} + \beta^2 \left\{ \{\Delta U\}_r^{(j)T} \{\Delta U\}_r^{(j)} \right\}}{\{\Delta U\}_{(1)T}^{(1)T} \{\Delta U\}_{(1)}^{(1)}} \\
&\quad (11)
\end{aligned}$$

برای تعیین ضریب β شرط زیر در نظر گرفته می‌شود :

$$b^2 - 4ac \geq 0 \quad (12)$$

با قرار دادن ضریب‌های معادله (11) در (12) و ساده سازی ، معادله درجه دوم زیر به دست می‌آید :

$$\begin{aligned}
D\beta^2 + E\beta + F &= 0 \\
D &= -4 \frac{\{\Delta U\}_r^{(j)T} \{\Delta U\}_r^{(j)}}{\{\Delta U\}_{(1)T}^{(1)T} \{\Delta U\}_{(1)}^{(1)} (\Delta\lambda^{(1)})^2} \\
E &= \frac{8}{(\Delta\lambda^{(1)})^2 \{\Delta U\}_{(1)T}^{(1)T} \{\Delta U\}_{(1)}^{(1)}} \{\Delta U\}_r^{(j)T} \left\{ \lambda^{(j-1)} \{\Delta U\}_P^{(j)} - \{\delta U\}_{(j-1)}^{(j-1)} \right\} \\
F &= 4 \left(\frac{\{\Delta U\}_P^{(j)T} \{\delta U\}_{(j-1)}^{(j-1)}}{\{\Delta U\}_{(1)T}^{(1)T} \{\Delta U\}_{(1)}^{(1)}} + \frac{\lambda^{(j-1)}}{(\Delta\lambda^{(1)})^2} \right)^2 \\
&\quad (13)
\end{aligned}$$

این معادله درجه دوم همواره دارای دو ریشه حقیقی است . زیرا ، همیشه $D < 0$ و $F > 0$ می‌باشد . بنابراین ، میین این معادله $(E^2 - 4DF)$ همواره مثبت است . از سوی دیگر ، چون (F/D) همیشه منفی است ، بنابراین ، دو ریشه آن علامت مختلف دارند . یادآوری می‌کند ، در روش طول قوس بیضوی ، با انتخاب یکی از این دو ضریب ، میین معادله اصلی - رابطه (11) - به دلیل وجود خطاهای صفر نمی‌شود . در این حالت ، میین یک عدد نزدیک صفر می‌شود که با یک جستجوی خطی بین دو ریشه β_1 ، β_2 می‌توان ضریب مورد نظر را به دست آورد .

- خودکار نمودن تحلیل

برای ارائه یک روش خودکار تحلیل غیرخطی سازه‌ها ، نیاز به تعیین ضریب بار نمودی و علامت آن در آغاز هر گام می‌باشد . ضریب بار نمودی در آغاز هر گام دارای علامت مثبت یا منفی می‌باشد . باید افروزد ، در یک تحلیل نمودی - تکراری ، طول قوس یا ضریب بار را می‌توان به عنوان عددی ثابت تا پایان تحلیل به کار برد . در نتیجه ، سرعت تحلیل یکنواخت خواهد بود و تغییر زیادی نمی‌کند . از سوی دیگر ، می‌توان با بهنگام نمودن اندازه مقدارهای مزبور در آغاز هر گام بارگذاری

نمودار نیم استوانه ای افزایشی را در زیر به دست آورد . با بررسیهای نویسندهان مشخص شد که ضریب بار نمودی زیر نتیجه مناسبی می دهد .

$$\Delta \lambda^{(1)} = \pm \left(\frac{dw_m}{\{\delta U\}^{(1)T} \{P\}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

در این رابطه ، dw_m کار نمودی در گام m ام ، $\{\delta U\}^{(1)}$ نشانگر جابجایی درجه های آزادی در تکرار نخست از هر گام و $\Delta \lambda^{(1)}$ ضریب بار نمودی تکرار نخست در هر گام می باشد . برای رسیدن به نقطه تعادلی در فرآیند تکراری ، نیاز به معیار همگرایی است . استفاده از نسبت کار نیروی نامیزان به کار بار مبنا در تکرار نخست ، معیار همگرایی مفیدی می باشد . بر این اساس ، اگر بار نامیزان تکرار J ام در گام 1 ام با $\{R\}^{(1)}$ مشخص شود ، مقدار خطای مجاز ϵ ، که بین 10^{-6} تا 10^{-10} اختیار می شود ، به قرار زیر است :

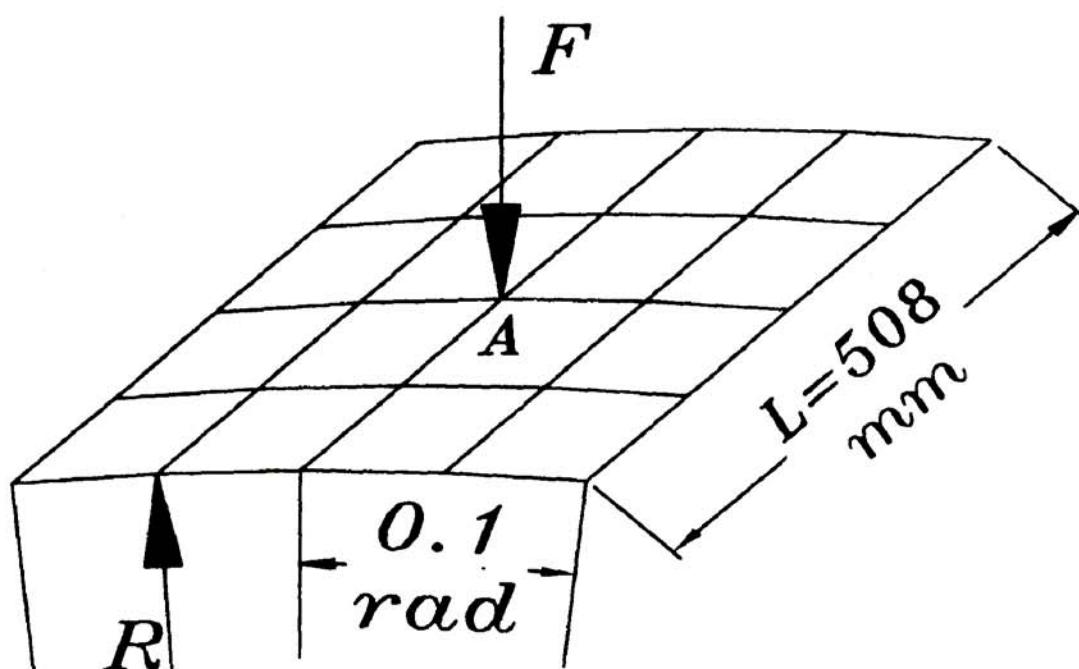
$$\epsilon = \frac{\{\delta U\}_{,1}^{(J)} \{R\}_{,1}^{(J)}}{\{\delta U\}_{,1}^1 \{P\} \Delta \lambda^{(1)}} \quad (15)$$

- نمونه های عددی

با روش پیشنهادی مساله های فراوانی تحلیل شده اند . نتیجه های به دست آمده در پایان مقاله درج می شود . با توجه به حجم محدود مقاله ، در ادامه تنها تحلیل دو مثال ارائه می گردد .

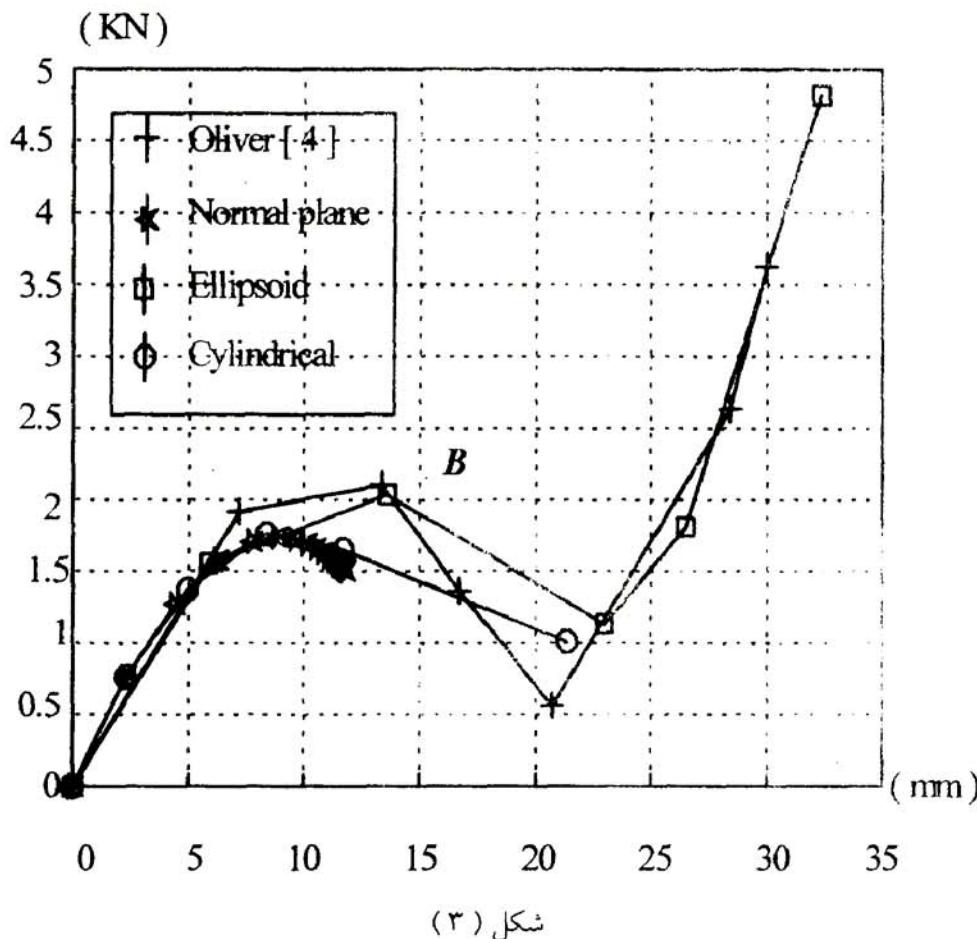
۱- پوسته نیم استوانه ای زیر اثر بار متتمرکز

در آغاز ، تحلیل یک پوسته نیم استوانه ای همانند شکل (۲) زیر اثر بار متتمرکز در مرکز انجام می شود . دو لبه مستقیم سازه دارای تکیه گاه های ساده و دو سر انحنای آن آزاد می باشند . طول سازه $L=508$ میلی متر ، شعاع انحنای آن $R=2540$ میلی متر و ضخامت سازه $t=12.7$ میلی متر است . ضریب کشسانی و نسبت پواسون در این مساله ، به ترتیب ، $E=3.10275$ کیلو نیوتون بر میلی متر مربع و $v=0.3$ می باشد . زاویه $\theta=0.1$ رادیان است [۳,۴] .



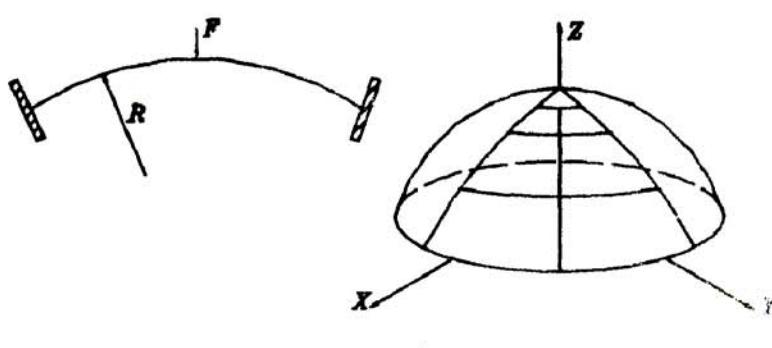
شکل (۲) پوسته نیم استوانه ای زیر اثر بار متتمرکز

با توجه به تقارن ، فقط یک چهارم سازه تحلیل خواهد شد . نمودار بار - تغییر مکان قائم گره باردار سازه در شکل ۱ رسم شده است . آسکار می باشد ، پاسخ به دست آمده با روش طول قوس بیضوی بر نمودار بار - تغییر مکان به دست آمده بواسطه الیور منطبق می باشد [۴] . از سوی دیگر ، برگشت بار در روش صفحه قائم از نقطه B آغاز گردیده و پاسجهای نادرستی را به دست می دهد . زیرا ، روش صفحه قائم توانایی گذشتن از نقطه های حدی را ندارد .



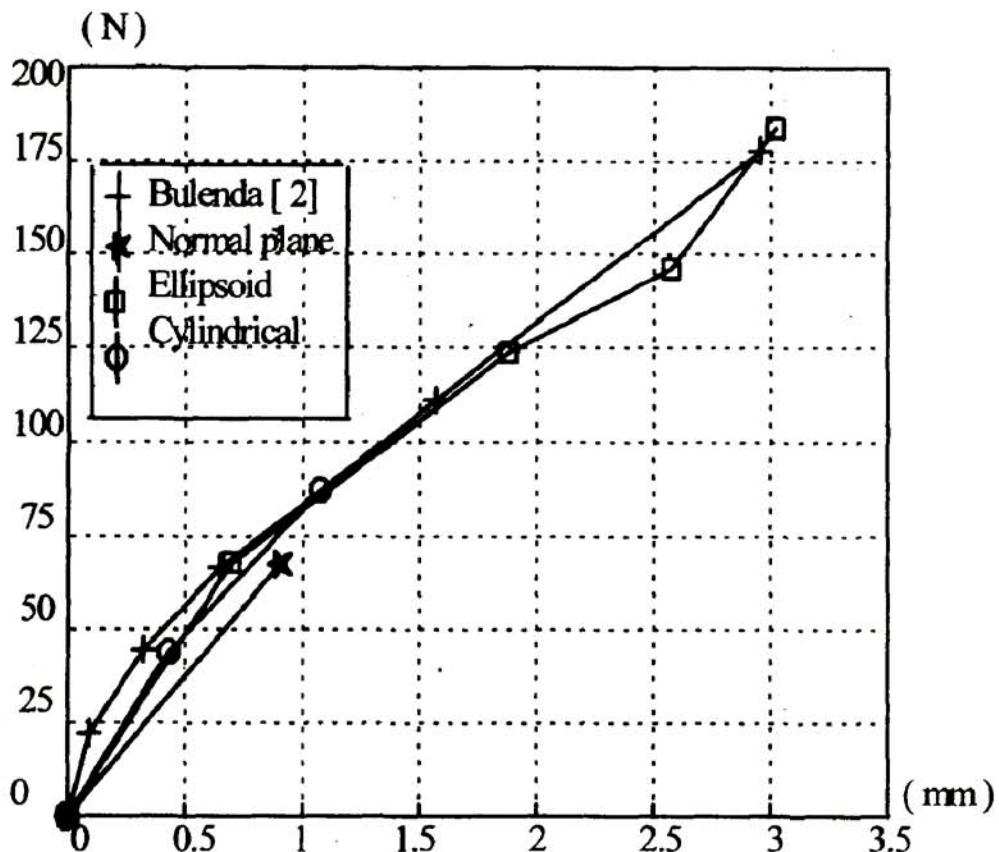
۲- تحلیل عرقچین

اینک . سازه کروی شکل (۴) تحلیل می شود . شعاع انحصار خواست سازه ، به ترتیب ، $R=120.8532$ میلی متر (۴/۷۵۸) و $t=0.4$ میلی متر (۰/۰۱۵۷۶) می باشد . ارتفاع اوج سازه تا تکیه گاه ۲.۱۸۴ میلی متر (۰/۰۸۵۹۸) اینج . ضرب کشسانی $E=44451.82$ کیلو نیوتون بر میلی متر مریع و نسبت پواسون $\nu=0.3$ است . هدف رسم نمودار بار - تغییر مکان برای نقطه زیر بار می باشد [۲] .



شکل (۴)

نمودار بار - تغییر مکان گره باردار برای این سازه در شکل (۵) رسم شده است . با توجه به این نمودار ، مقدار تغییر مکان به دست آمده از روش طول قوس بیضوی با مقدار ارائه شده توسط بالندا برای بار ۱۴۷/۸۷ نیوتون متفاوت می باشد [۲] . باید آگاه بود ، بالندا این سازه را با استفاده از جزء ۸ گرهی سرنديپيتی تحلیل نموده است . یادآوری می کند ، تحلیل صفحه های خمی با استفاده از جزه های پیرامونی در سه حالت : تابع اولیه گیری کامل ، تابع اولیه گیری کاهش یافته یکنواخت و تابع اولیه گیری انتخابی منجر به قفل برشی می گردد . بنابراین ، با افزایش سختی ، مقدار تغییر مکان به دست آمده کاهش می باید . به سخن دیگر ، مقدار تغییر مکان به دست آمده با استفاده از جزء سرنديپيتی به سبب قفل برشی کمتر از مقدار واقعی می باشد .



شکل (۵)

- نتیجه گیری

تا کنون پژوهشگران روش‌های مختلفی را برای تحلیل غیر خطی سازه‌ها ارائه داده‌اند . از میان آنها ، روش طول قوس استوانه‌ای را به عنوان فنی برتر نام برده‌اند . دلیلهای برتری شیوه مزبور ، سرعت زیاد و دقیق مناسب آن می باشد . در کنار این خوبیها ، بر اساس بررسیهای عددی نویسندهای آشکار گردید ، روش طول قوس استوانه‌ای باسانی توانایی گذشتن از نقاط حدی را ندارد . به سخن دیگر ، برای گذشتن از این نقاط نیاز به گامهای بارگذاری زیادی می باشد . با این حساب ، زمان محاسبات افزایش و سرعت تحلیل نیز کاهش می باید . نویسندهای برای حل این مشکل ، روش طول قوس بیضوی را پیشنهاد نمودند . با توجه به مساله‌های فراوان حل شده ، نتیجه‌های زیر به دست آمده‌اند :

- ۱- این روش از نقطه‌های حدی در تمام مساله‌ها عبور نموده است .
- ۲- با افزایش یا کاهش تعداد گامهای بارگذاری می توان به پاسخهایی با دقت مناسب دست یافت .

۳- گامهای بارگذاری در این روش با کاهش ضریب آسایش β نیز همگرا می شود . شابان توجه است ، در روش طول قوس استوانه ای با کاهش ضریب β ، پاسخها همگرا نخواهند شد .

۴- روش پیشنهادی با تعداد گامهای کمتری نسبت به روش طول قوس استوانه ای از نقطه های حدی عبور می کند . از این رو ، رابانه نیاز به زمان کمتری برای تحلیل سازه دارد .

۱ - رحیمی ، غلام حسین ، " مروری بر آنالیز پوسته ها " ، نشریه فنی مهندسی مدرس ، شماره دوم ، صفحه ۲۴-۳۴ ، (۱۳۷۴) .

2. Th. Bulenda , " Arnoldi (IOM) - Newton Algorithm for Path Following in Nonlinear Static " , Computers & Structures , Vol 63 , No 4 , PP 813 - 826 , (1997) .

3. Kjell Magne Mathisen and Knut Morten Okstad , " Interactive Adaptive Geometrically Nonlinear Analysis of Shell Structures " , Engineering with Computers , Vol 12 , PP 63 - 83 , (1996) .

4. J.Oliver and E . Onate , " A Total Lagrangian Finite Element Formulation for the Geometrically Nonlinear Analysis of Shells " , Flexible Shells , Editor : Eli - Axelrad and F.A. Emmerling , (1984) .

5. O. C. Zienkiewicz , the Finite Element Method , Mc Grow - Hill Book Company , Fourth Edition , (1992) .