روشی برای تحلیل کشسان - مومسان سازه‌ها

دکتر محمد رضایی پژند
استاد گروه عمران دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد
مهندس سعید برادران همتی
کارشناس ارشد، گروه عمران دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

هدف اصلی این مقاله، پیشنهاد یک روش برای تحلیل غیرخطی سازه‌های با رفتار کشسان - مومسان است. سازه‌های گوناگونی که دارای مصالح با رفتار مومسان کامل و یا سخت شوندگی باشند، با این روش تحلیل می‌گردند. روشی که ارائه می‌شود، دارای توانایی شایسته‌ای در همگرایی به پاسخ غیرخطی است و سرعت بیشتری نسبت به راهکارهای مشابه دارد. با حل یک مسأله، چگونگی استفاده از روش مورد بحث روشن می‌شود و ویژگیهای آن آشکار خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل غیرخطی، زیر سازه، پاره‌سازی خود انطباق، اجزای محدود، سخت‌شوندگی، کشسان، مومسان، روش نموی.

پیشگفتار

استفاده از روش پاره‌سازی برای تحلیل سازه‌های کشسان - مومسان، سبب افزایش سرعت محاسبات می‌گردد. بطور معمول، در بیشتر مسأله‌های غیرخطی تمام سازه زیر بار وارد به حد مومسانی نمی‌رسد و قسمت مومسان آن از محدوده خاصی تجاوز نمی‌کند. هنگامی که شکل سازه و بارگذاری وارد بر آن به گونه‌ای باشد که بخشی از سازه در روند گامهای بارگذاری به حالت مومسان نرسد و همواره کشسان باقی بماند، می‌توان این قسمت از سازه را به عنوان زیر سازه کشسان در نظر گرفت و بقیه سازه - که در آن تغییرشکل مومسان رخ می‌دهد - به عنوان زیرسازهٔ مومسان انتخاب کرد. در تحلیل سازهٔ مزبور با روش نموی - تکراری، می‌توان ماتریس سختی زیر سازهٔ کشسان را یک مرتبه محاسبه و برحسب درجه‌های آزادی مرزی زیر سازه‌های مومسان و کشسان کاهش داد. با این کار، ماتریس سختی مؤثر زیر سازهٔ کشسان به دست می‌آید.

اگر هیچ نقطه‌ای از زیرسازهٔ کشسان در روند بارگذاری مومسان نگردد، ماتریس مزبور تغییری نمی‌کند و ثابت باقی می‌ماند و فقط ماتریس سختی زیرسازهٔ مومسان در هر گام بارگذاری و یا تکرارهای تحلیل باید برپا شود. از این‌رو، تحلیل سازه با رفتار غیرخطی به روش نموی، به زیرسازهٔ مومسان محدود می‌گردد و ابعاد مسأله کوچک می‌شود. برای استفاده از این روش، تحلیلگر باید در آغاز کار تا حدودی از محدودهٔ مومسان تا آخرین گام بارگذاری آگاه باشد و دو زیر سازهٔ کشسان و مومسان را در گام نخست تحلیل تعریف نماید. اجزایی را که پیش‌بینی می‌شود در آخر کار جاری گردد، باید در زیر سازهٔ مومسان قرار دهد. زیرسازهٔ کشسان را نیز از اجزایی که در روند بارگذاری جاری نمی‌شوند برپا کند.

اگر حتی یک نقطه گوس از زیرسازهٔ کشسان به حالت مومسان برسد - به سبب ایجاد بارهای نامیزان - تکرارها به همگرایی نمی‌رسند و ادامهٔ تحلیل باید متوقف گردد. از این رو، در این راهکار، تحلیلگر نخست باید از نقاطی که در روند تحلیل به حد جاری شدن می‌رسند آگاه باشد و زیر سازهٔ مومسان را به گونه‌ای تعریف کند که تمام نقاط مزبور را در بر گیرد. باید افزود، پیش‌بینی نقاطی که در روند تحلیل به تنش جاری شدن برسند، بسیار دشوار است. به سخن دیگر، تحلیلگر باید بسیار مجرب باشد تا پیش از به دست آوردن پاسخ بتواند این نقاط را مشخص نماید.

پاره‌سازی خودانطباق

روش پاره‌سازی خود انطباق در آغاز تحلیل تمام سازه را کشسان در نظر می‌گیرد. در نخستین تکرار، بار نموی به سازه وارد و تحلیل انجام می‌شود. در این هنگام، اجزای سازه از نظر سطح تنش مؤثر مورد بررسی قرار می‌گیرند. چنانچه در اجزایی تنش به حد جاری شدن رسیده باشد، روند تحلیل متوقف می‌شود. پس از این، ادامهٔ تحلیل با تقسیم جسم به دو زیر سازهٔ کشسان و مومسان انجام می‌پذیرد. زیر سازهٔ مومسان در برگیرندهٔ اجزایی است که مومسان شده‌اند و زیرسازهٔ کشسان نیز از اجزایی تشکیل می‌شود که سطح تنش مؤثر آنها کمتر از حد جاری شدن است. پس از آن، ماتریسهای سختی مؤثر دو زیرسازه محاسبه می‌شود و با برپا کردن ماتریس سختی کل سازه تحلیل ادامه می‌یابد. در ادامهٔ تحلیل و تا رسیدن به همگرایی تکرارها انجام می‌شود و در هر تکرار ماتریس سختی زیرسازه مومسان، با توجه به کرنش مومسانی اجزای آن، برپا خواهد شد. ماتریس سختی زیرسازهٔ کشسان نیز تغییری نمی‌کند و آن را ثابت می‌پندارند. در هر تکرار، اگر جزئی از زیر سازهٔ کشسان جاری شود، ادامهٔ تحلیل متوقف می‌شود و جزء مومسان شده از اجزای زیر سازهٔ کشسان کم و آن را به اجزای زیر سازهٔ مومسان می‌افزایند. باید دانست، پس از هر مرتبه که زیر سازه‌ها به شکل جدیدی تعریف می‌شوند باید گره‌ها را در دو زیرسازه دوباره شماره گذاری کرد. گره‌های مرزی و داخلی در هر زیرسازه مشخص می‌شود وگره‌های مرزی به دنبال گره‌های داخلی شماره گذاری خواهد شد. پس از آن، ماتریسهای سختی مؤثر قابل محاسبه می‌باشند [3, 2].

روندی که تشریح شد در گامهای بعدی بارگذاری نیز اجرا می‌شود. بااین تفاوت که در آغاز هرگام، هریک از زیرسازه‌های کشسان و مومسان مشخص شده در پایان گام پیشین به کار خواهد رفت. در هر گام تلاش می‌شود، اجزا به گونه‌ای در دو زیرسازهٔ کشسان و مومسان قرار گیرند که تا همگرا شدن تکرارها نیازی به جداسازی دوبارهٔ آنها و تغییر دامنهٔ زیر سازه‌ها نباشد. با افزایش بار در گام بعدی بارگذاری، ناحیهٔ مومسان گسترش می‌یابد و نقاط بیشتری از سازه مومسان می‌شوند. به این ترتیب، در روش پاره‌سازی خودانطباق، زیرسازهٔ مومسان همراه با گسترش مومسانی در سازه، رشد پیدا می‌کند و بر ناحیهٔ مومسان انطباق می‌یابد. در پایان هر گام بارگذاری، باید اجزایی که در گام بعدی جاری می‌شوند را پیش‌بینی کرد. برای انجام این کار ضریبی به عنوان ضریب جداسازی زیرسازه‌ها تعیین می‌شود. این ضریب در تنش تسلیم ضرب خواهد شد و با مقایسه تنش مؤثر اجزا با معیار مزبور، اجزای دو زیرسازه از یکدیگر جدا می‌شوند. از این رو، اجزایی با تنش بیش از معیار مزبور در آستانه مومسانی قرار دارند و باید در گام بعدی به زیرسازهٔ مومسان انتقال یابند. این ضریب باید به گونه‌ای انتخاب شود که دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ - زیرسازهٔ مومسان به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار شود تا در تکرارهای گام بارگذاری بعدی اندازهٔ آن تغییر نکند.

۲ - به اندازهٔ کافی کوچک باشد که اجزای اضافی را در درون زیر سازهٔ مومسان قرار ندهد و سبب صرف زمان زیادی برای برپایی ماتریس سختی زیر سازهٔ مومسان گردد.

با توجه به این نکته‌ها دربارهٔ پاره‌سازی خودانطباق، می‌توان بدون آگاهی از چگونگی گسترش مومسانی در سازه به تحلیل کشسان - مومسان پرداخت. در نتیجه، زمان تحلیل به میزان زیادی کاهش می‌یابد. در هر تکرار این روش از گام بارگذاری، تنها ماتریس سختی تعداد محدودی از اجزا برپا می‌شود. در صورتی که در روش پیشین، زیرسازهٔ مومسان در گامهای آغازین بزرگتر از حد لازم بود.

روش هان

روش هان، براساس پاره‌سازی خودانطباق، در سال ۱۹۸۴ ارائه گردید [4]. همان‌گونه که در شرح روش پاره‌سازی خودانطباق

آمد، در روند تحلیل، سازه به دو ناحیهٔ کشسان و مومسان تقسیم می‌شود. در روش هان، ناحیهٔ کشسان ممکن است از نظر هندسی به یک یا چند زیرسازه کشسان درجه اول تقسیم گردد. ناحیه مومسان نیز تنها در یک زیرسازهٔ درجه اول مومسان قرار می‌گیرد.

در پایان هرگام بارگذاری، اجزای دو زیرسازهٔ کشسان و مومسان برای گام بعدی انتخاب می‌شوند. این کار با استفاده از ضریبهای جداسازی زیرسازه‌ها انجام می‌پذیرد. در ادامه به معرفی ضریبهای جداسازی و نیز وارسی تنش در روش هان پرداخته می‌شود. باید دانست، بیشینهٔ تنش مؤثر در نقطه‌های گوس یک جزء نشان‌دهنده سطح تنش آن می‌باشد. در روش هان، چهار سطح برای تنش مؤثر در نظر گرفته می‌شود. سطح اول تنش مؤثر برابر با تنش جاری شدن، سطح دوم F1 برابر تنش جاری شدن، سومین سطح F1*F2 برابر تنش جاری شدن و سرانجام چهارمین سطح تنش مؤثر کمتر از F1*F2 برابر تنش جاری شدن می‌باشد. به این ترتیب، ضریبهای F1 و F2 اندازهٔ سطحهای تنش را مشخص می‌کنند. سطحهای اول و دوم تنش تعیین کننده لزوم توقف یا ادامهٔ تکرارهای یک گام بارگذاری به‌سبب ایجاد مومسانی در زیر سازهٔ کشسان می‌باشند. سطح سوم و چهارم تنش نیز معیار جداسازی زیرسازه‌ها را مشخص می‌کنند. ضریبهای F1 و F2 کمتر از یک و در حدود ۰/۶ و ۰/۹ می‌باشند. ضریب F2 توسط تحلیلگر تعیین می‌گردد و پیشنهاد خاصی برای آن نشده است. عامل F1 نیز براساس بزرگترین ضریب بار وارد تا گام مزبور از رابطه (۱) محاسبه می‌گردد:

$$F1 = 0.99*(1.0/(1.0 + 1.1*\text{Max Load Factor})) \qquad (۱)$$

$$\text{Max Load Factor} = \text{Max}((\text{Load Factor})_i) \qquad (۲)$$

$$(\text{Load Factor})_i = (\text{Load Step Size})_i/(\text{Current Load})_i \qquad (۳)$$

در این رابطه‌ها، i وابسته به شمارهٔ گام بارگذاری است. براین اساس، در هرگام بارگذاری، باید نسبت ضریب بار گام به مجموع ضریبهای بار وارده از گامهای پیشین و جاری را محاسبه نمود. سپس، از روی بزرگترین این نسبتها، ضریب F1 را از رابطه (۱) به دست آورد. جداسازی اجزا در دو زیرسازهٔ کشسان و مومسان هنگامی انجام می‌شود که سطح تنش یک جزء از زیرسازهٔ کشسان به سطح تعریف شده یک و یا دو برسد. اگر سطح تنش مؤثر در اجزا کمتر از سطح تنش دوم باشد، پاره‌سازی دوباره صورت نمی‌پذیرد. اگر حتی تنش یک جزء از زیرسازهٔ کشسان به سطح اول تنش (جاری شدن) برسد تکرارها متوقف خواهد شد و جداسازی دوبارهٔ اجزا در زیرسازه‌ها صورت می‌پذیرد. در صورتی که نیاز به جداسازی دوبارهٔ اجزا شد، اجزایی که سطح تنش آنها بیش از سطح سوم تنش است در زیرسازهٔ مومسان قرار می‌گیرند.

برای تعیین ضریب F1 در رابطه (۱)، کوشش می‌گردد هدفهای تحلیل برآورده شود. هان فرض نمود که افزایش تنش ناشی از بار نموی گام بارگذاری، در زیرسازهٔ کشسان خطی باشد. به خاطر جاری شدن اجزای زیرسازهٔ مومسان، ضریب ۱/۱ در این رابطه گنجانده شده است. هان ضریب ۰/۹۹ را نیز برای اطمینان از کوچک بودن F1 در نظر می‌گیرد.

برای یافتن ماتریس سختی مؤثر زیر سازه‌ها، هان از شیوهٔ تجزیهٔ پاره‌ای ماتریس نواری با پهنای ثابت استفاده می‌کند. از این‌رو، برای کاستن پهنای نوار، چگونگی شماره‌گذاری گره‌ها اهمیت زیادی دارد. پس از جداسازی زیر سازه‌ها، برای برپاکردن ماتریس سختی سازه باید گره‌های مرزی و داخلی زیرسازه‌ها و اجزا شماره‌گذاری گردند. نخست باید گره‌های داخلی و سپس گره‌های مرزی زیر سازه‌ها شماره‌گذاری شوند تا بتوان از رابطه‌های متراکم‌سازی استفاده کرد. در روش مزبور برای کاستن پهنای نوار، اجزای زیر سازه اولویت‌بندی می‌شوند و داخلی‌ترین اجزا، شماره‌های نخستین را به خود اختصاص می‌دهند. آخرین شماره‌ها نیز به‌اجزای مرزی تعلق می‌گیرند. تعیین گره‌های مرزی و داخلی با استفاده از جدولی صورت می‌گیرد که شماره گره‌های اجزا توسط تحلیلگر در آن وارد شده است. اجزایی مجاور هم شناخته می‌شوند که در گره‌هایی با هم اشتراک داشته باشند.

هان گزارش نموده است که پاره‌سازی خودانطباق با روش وی از ۵ تا ۴۵ درصد در حل مسأله‌ها نسبت به روش نیوتن - رافسون کامل زمان کمتری را می‌برد [5]. کارآیی روش بستگی به میزان بارهای وارده و گامهای بارگذاری و نیز گستردگی ناحیهٔ مومسان شده در کل سازه دارد. هرچه ناحیهٔ مومسان کوچکتر باشد، کارآیی روش بالاتر می‌رود.

روش پیشنهادی

در ادامهٔ این مقاله، روشی پیشنهاد خواهد شد که براساس فن پاره‌سازی خودانطباق استوار می‌باشد. هدف اصلی این روش، کاهش زمان تحلیل نسبت به راهکارهای پیشین، امکان استفاده از پاره‌سازی و نیز استفاده بهتر از امکانات رایانه‌ای است. در تحلیل نموی کشسان - مومسان سازه با این روش، جداسازی اجزا در زیرسازه‌های کشسان و مومسان تنها در پایان هرگام بارگذاری انجام می‌شود. در نخستین تکرار گام بارگذاری، ماتریسهای سختی مؤثر زیرسازه‌ها تعیین خواهد شد و در تکرارهای بعدی ماتریس سختی زیرسازهٔ کشسان ثابت می‌ماند و ماتریس سختی مؤثر زیرسازهٔ مومسان برپا می‌گردد.

در روش پیشنهادی برای تعیین ضریب جداسازی زیرسازه‌ها عاملهای زیادی وارد شده‌اند تا اجزای دو زیرسازهٔ کشسان و مومسان با دقت بیشتری انتخاب شوند. به این ترتیب، احتمال جاری شدن اجزای زیرسازهٔ کشسان کاهش می‌یابد. در هر تکرار، بار پس‌ماند زیرسازهٔ کشسان نیز محاسبه و بردار بارهای مؤثر زیرسازه مزبور برپا می‌گردد. اگر تنش نقطه‌ای از زیرسازهٔ کشسان به تنش جاری شدن رسیده باشد، تحلیل تا رسیدن به همگرایی ادامه می‌یابد. بنابراین، نیازی به جداسازی دوبارهٔ اجزای دو زیرسازه و نیز وارسی سطح تنش مؤثر اجزای زیرسازهٔ کشسان پیش از همگرا شدن گام بارگذاری نمی‌باشد. تنها در پایان گام بارگذاری، زیر سازه‌های کشسان و مومسان برای گام بعدی تعیین می‌شوند. در روش پیشنهادی، ضریب جداسازی زیر سازه‌ها در گامهای بارگذاری از رابطه‌ای تعیین می‌گردد. در ادامهٔ بحث، به چگونگی محاسبه این ضریب در روش پیشنهادی پرداخته می‌شود. باید دانست، ضریب جداسازی زیرسازه‌ها نقش اصلی را در کاهش زمان تحلیل دارد.

جداکردن زیرسازه‌ها

ضریب جداسازی اجزای زیرسازه کشسان را براساس سطح تنش مؤثر آنها به دو دسته تقسیم می‌کند. کار ضریب مزبور تعیین اجزایی است که در گام بارگذاری بعدی در آستانه مومسانی قرار دارند. در بین اجزای زیرسازهٔ کشسان، اجزایی با تنش بالاتر از معیار جداسازی، از زیرسازهٔ کشسان جدا می‌شوند و به زیرسازهٔ مومسان می‌پیوندند. با وجودی که این اجزا هنوز جاری نشده‌اند اما احتمال جاری شدن نقطه‌هایی از آنها در گام بعدی وجود دارد. در این صورت، زیرسازهٔ مومسان رشد می‌کند و بر ناحیه‌ای که گسترش مومسانی در آن پیش‌بینی می‌شود، انطباق می‌یابد. از این رو، باید پیش‌بینی گردد، در پایان هر گام بارگذاری تنش در اجزای زیرسازهٔ کشسان با چه ضریبی افزایش خواهد یافت. این ضریب همان ضریب افزایش تنش زیرسازهٔ کشسان نام دارد. عامل مورد بحث در واقع وارون ضریب جداسازی زیرسازه‌ها (F1) می‌باشد.

چندین عامل در انتخاب ضریب نامبرده تأثیر دارند. نخستین عاملی که در تعیین ضریب افزایش تنش زیرسازهٔ کشسان مورد توجه قرار می‌گیرد، ضریب افزایش بار در گام بعدی است. ضریب افزایش بار با توجه به اندازهٔ گامهای بارگذاری، از نسبت مجموع باری که در گام بعدی به سازه وارد می‌شود به باری که تا پیش از این گام به سازه وارد شده است، محاسبه می‌گردد. اگر سازه دارای رفتار خطی باشد، با اثر دادن این نسبت به تنش اجزا، می‌توان تنش را در گام بعدی حساب کرد. اما به سبب رفتار غیرخطی مواد، اجزایی که جاری شده‌اند مشارکت کمتری در تحمل بار نسبت به سایر اجزا دارند. از این رو، سهم بیشتری از تنش به اجزای کشسان می‌رسد. بزرگی ناحیهٔ مومسان نیز در افزایش تنش زیرسازهٔ کشسان اثر دارد. هرچه ناحیهٔ مزبور بزرگتر باشد، تنش به میزان بیشتری در نقطه‌های کشسان افزایش می‌یابد. این مشخصه در سازه‌های با رفتار مومسان مطلوب آشکارتر می‌باشد. می‌توان چنین پنداشت قسمتی از سازه که مومسان شده است، توانایی تحمل بار بیشتری ندارد. از این‌رو، بار وارد به سازه در گام بعدی باید در بخشهای کشسان سازه پخش گردد. هرچه حجم قسمت مومسان بزرگتر باشد، افزایش تنش در زیرسازهٔ کشسان بیشتر می‌شود. آشکار است که نقطه‌های جاری شده سازه تحمل تنش کمتری از نقطه‌های جاری نشده دارند. چون معیاری که به آسانی ابعاد ناحیهٔ مومسان را در کل سازه مشخص کند در دسترس نیست، از این‌رو، شمار اجزای مومسان ملاک قرار می‌گیرد.

اگر مواد سخت‌شوندگی داشته باشند، نقطه‌های مومسان شده باز هم تحمل تنش بیشتری را دارند. از این‌رو، تنش اجزای کشسان در این سازه کمتر از سازه‌ای با مواد مومسان مطلوب است. به سخن دیگر، افزایش تنش در زیرسازهٔ کشسان با عامل سخت‌شوندگی مواد

(H') نسبت وارون دارد.

در نظر گرفتن شمار اجزای مومسان به عنوان یک معیار به چند دلیل نمی‌تواند دقیق باشد. نخست آنکه حتی اگر یک نقطهٔ گوس از جزئی جاری شود، آن جزء مومسان فرض می‌گردد و اثر سختی نقطه‌های گوس جاری نشده جزء منظور نخواهد شد. افزون برآن، اندازه اجزا متفاوت است و به خصوص اجزای مومسان برای دستیابی به دقت بیشتر کوچکتر درنظر گرفته می‌شوند. به هرحال، از این مشخصه چشم‌پوشی خواهد شد و تنها نسبت اجزای کشسان به تعداد اجزای سازه در نظر گرفته می‌شود. باید خاطر نشان ساخت، تعداد نقطه‌های گوس را به جای شمار اجزا می‌توان در نظر گرفت. با وجود این، شمارش تعداد نقاس گوس جاری شده روند تحلیل را طولانی می‌کند. می‌توان این تفاوت را تا حدودی در ضریبهای دیگر جبران نمود. از سوی دیگر، پاره‌ای از اجزاکه در گام بارگذاری بعدی جاری می‌شوند نیز به شمار نیامده است و به همین سبب، ضریبی برای افزایش بیشتر تنش باید وارد شود. این ضریب را می‌توان از روی تعداد نقطه‌های گوس در آستانه جاری شدن به دست آورد. اما این محاسبات به سبب طولانی بودن و اثر کم این عاملها ضرورتی ندارد. این اثر و عاملهای دیگر با در نظر گرفتن ضریب عددی ثابتی وارد می‌گردند. با حل چند مسأله عددی، ضریب مزبور مشخص و حدود ۱/۱ می‌باشد. کلیهٔ مشخصه‌های مورد بحث در تعیین ضریب افزایش تنش در زیرسازهٔ کشسان نقش دارند. با اثر دادن این ضریب در تنش اجزای زیر سازهٔ کشسان می‌توان حدود تنش آنها را در گام بعدی بارگذاری پیش‌بینی کرد. اگر تنش پیش‌بینی شده بیش از تنش جاری شدن مواد سازه باشد، اجزای مزبور باید در زیرسازهٔ مومسان جا گیرند. از آنجایی که در روش پیشنهادی ضریب جداسازی زیرسازه‌ها در تنش جاری شدن وارد می‌شود و سپس تنش اجزا با آن مقایسه می‌گردد، باید وارون ضریب افزایش تنش را محاسبه نمود. با توجه به این ویژگیها، ضریب جداسازی زیر سازه‌ها در روش پیشنهادی از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شود:

$$FL = \frac{(\text{Load Factor})_i}{(\text{Load Factor})_{i+1}} \qquad (۴)$$

$$FP = \frac{NE_e + NE_p(H'/E)}{NE_e + NE_p} \qquad (۵)$$

$$\text{Fl} = 0.9(\text{FL})\text{FP} \qquad (۶)$$

زیرنویس i در اینجا، شمارهٔ گام بارگذاری است. ضریب بار در رابطهٔ (۴) مجموع ضریبهای بار تا گام مزبور می‌باشد. عامل NE_e شمار اجزای کشسان، NE_p تعداد اجزای مومسان، H' عامل سخت‌شوندگی و E عامل کشسانی می‌باشند. باید یادآوری کرد، ضریب ۰/۹ در رابطهٔ (۶)، برای کاهش مقاومت سازه در گام بعدی بارگذاری است. این ضریب به سبب مومسان شدن اجزایی می‌باشد که آمادگی مومسانی دارند. باید آگاه بود، همه ضریبها براساس دلیلها مورد بحث و نیز تجربه‌های عددی فراوان انتخاب شده‌اند.

حل دستگاه معادله‌های حاکم و نیز متراکم‌سازی ماتریس سختی و بردار بار مؤثر زیرسازه‌ها در فن پیشنهادی با روش آسمانخراش انجام می‌شود. از این‌رو، ماتریس سختی سازه در بردار سختی انبار می‌شود و بردار کوچکتر دیگری به نام بردار نشانی برای تعیین مکان درایه‌ها در ماتریس سختی به کار می‌رود. یادآوری می‌کند، در روش آسمانخراش تنها درایه‌های بالای قطر و داخل آسمانخراش انبار می‌شوند که این کار سبب صرفه‌جویی زیادی در حافظهٔ رایانه و نیز دستیابی به سرعت بیشتر در حل دستگاه معادله‌ها می‌گردد. شایان توجه است، زمانی که صرف حل دستگاه معادله‌های حاکم سازه می‌شود، در مواردی تا ۶۰ درصد زمان تحلیل سازه می‌رسد. افزون برآن، بخش بزرگی از حافظه دستگاه نیز باید به انبار سازی ماتریس سختی سازه اختصاص یابد.

مزیتهای روش پیشنهادی

اینک به برتریهای شیوهٔ پیشنهادی نسبت به روش هان پرداخته می‌شود. ویژگیهای مزبور پس از انجام تحلیلهای گسترده مسأله‌های مختلف به دست آمده‌اند. بادسته‌بندی نتیجه‌ها، چهار نکته زیر برتری فن پیشنهادی را نسبت به روش هان روشن می‌سازد:

۱ - در روش پیشنهادی ضریب جداسازی در هر گام با توجه به اندازهٔ همان گام تعیین می‌شود. این درحالی است که در روش هان ضریب مزبور تنها اندازهٔ یکی از گامها را وارد تحلیل می‌سازد. اگر تناسبی بین گامها نباشد، ضریب جداسازی نمی‌تواند برای تمام گامها مناسب باشد. به سخن دیگر، ضریب جداسازی پیشنهادی متغیر، کلی و برای هر گام بارگذاری مؤثر است.

۲ - در روش هان بار پس‌ماند زیر سازهٔ کشسان در تکرارهای گام بارگذاری محاسبه نمی‌شود. اگر جزئی از زیرسازهٔ کشسان جاری گردد، باید زیرسازه‌ها را دوباره جدا کرد و پس از انجام فرآیند لازم برای تعیین ماتریس سختی سازه، تحلیل را ادامه داد. باید آگاه بود، این روند بسیار وقت‌گیر است. در روش پیشنهادی با محاسبه بار پس‌ماند این مشکل ساده‌تر حل می‌شود.

۳ - روش پیشنهادی عاملهای بیشتری برای تعیین ضریب جداسازی زیر سازه‌ها به کار می‌برد. از این‌رو، دقت انتخاب اجزای زیرسازه‌های کشسان و مومسان بیشتر از شیوهٔ هان است. در برابر آن، هان از عاملهای کمتری در محاسبه اندازهٔ گام بارگذاری استفاده می‌کند. به این دلیل، ضریبهای هان تأثیر کمتری در انجام تحلیل دارند.

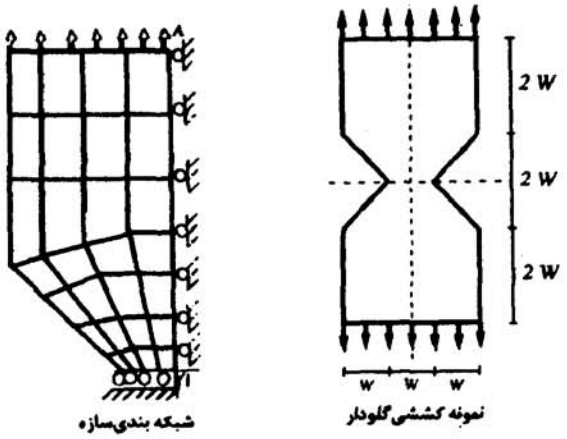
۴ - به کارگیری ضریب اختیاری F2، که برای اطمینان از کافی بودن اندازهٔ زیرسازهٔ مومسان به کار می‌رود، در روش هان لزومی ندارد. در واقع، روشهای خودکار باید تا حدامکان بی‌نیاز از دخالت تحلیلگر کار کنند. به کارگیری چنین ضریبی، که ملاک درستی برای تعیین آن وجود ندارد وباید تحلیلگر آن را مشخص سازد، بجا نیست.

مثال

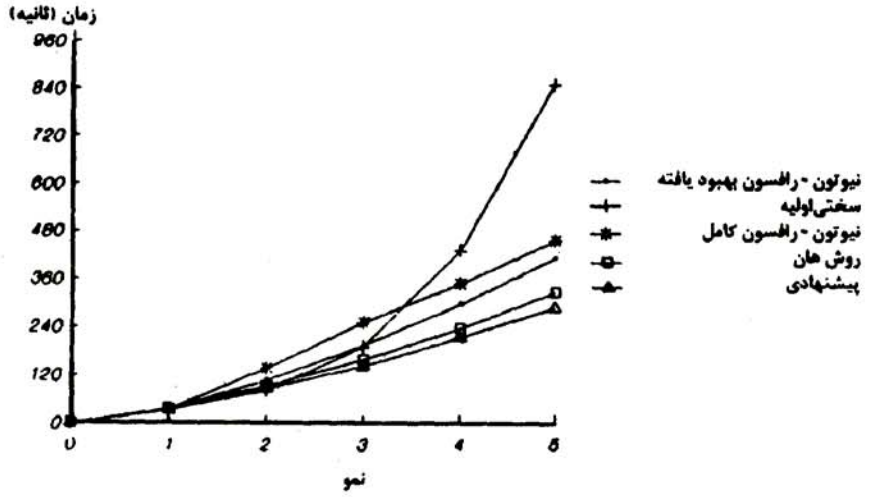
برای سنجش کارایی روش پیشنهادی در برابر شیوه‌های مختلف دیگر، یک مثال با استفاده از برنامه رایانه‌ای تحلیل می‌شود. این برنامه به گونه‌ای تدارک شده است که بتواند با پاره‌سازی و نیز چند روش دیگر تحلیل غیرخطی را به انجام برساند. با این ابزار، روش پیشنهادی با چند شیوهٔ دیگر مورد مقایسه قرار گرفته است. یکی از این راهکارها، روش هان می‌باشد. فنهای دیگر مانند: روش نیوتن - رافسون کامل (مماسی)، روش سختی اولیه و نیوتن - رافسون بهبود یافته به کار رفته‌اند. به سبب دسترسی نداشتن به متن برنامه و زیرروالها هان - برای مقایسه آن با روش پیشنهادی - تنها معیار جداسازی تعریف شده توسط هان در برنامه تغییر نموده است. به سخن دیگر، زیر روالهای برنامه سایر کارهای دو روش مزبور را همانند انجام می‌دهند. حل دستگاه معادله‌های حاکم در تمام این فنها براساس روش آسمانخراش می‌باشد.

پاره‌ای‌ازسازه‌های معروف‌از دیرباز برای ارزیابی شیوهٔ مختلف تحلیل غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرند. هدف پژوهشگران از حل پی در پی آنها یافتن اشتباه‌های فراوانی است که در کارهای عددی، بویژه برنامه‌های رایانه‌ای، وارد می‌گردد. یکی از این سازه‌ها که تحلیل کشسان - مومسان آن بارهاانجام شده‌است، به نام‌ونمونه کششی‌گلودار معروف‌است. سازه مزبور یک مسأله تنش مستوی است که دارای دو محور تقارن عمود بر هم می‌باشد و به همین دلیل تنها یک چهارم سازه برای تحلیل با روش اجزای محدود به کار گرفته می‌شود. ابعاد سازه، بارگذاری و محورهای تقارن آن در شکل (۱) مشخص شده‌اند. ضخامت سازه w می‌باشد.

مشخصه‌های مواد این سازه در ادامه درج می‌شود. تنش تسلیم اولیه در کشش و فشار $\sigma_Y = 248\text{MPa}$ ، عامل کشسانی $E = 206.8\text{GPa}$ ، $H' = 0$ و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ فرض شده‌اند. نمونه کششی گلودار بیشتر با اجزای ساده مثلثی با کرنش ثابت (CST) تحلیل شده است. در تحلیلی که ارائه می‌شود، شبکه‌بندی شکل (۱) به کار می‌رود و سازه دارای ۲۸ جزء و ۱۰۷ گره می‌باشد.



شکل (۱)



شکل (۲)- نتیجهٔ تحلیل برای ۵گام بارگذاری

در این تحلیل، مواد نمونه مزبور مومسان کامل در نظر گرفته شده است. نسبت تنش میانگین در گلو به تنش جاری شدن اولیه مواد سازه، برای اولین نقطهٔ گوس مومسان شده برابر با ۰/۳۱۱ می‌باشد. این مقدار بسیار نزدیک به مقدارهای ۰/۳۰۷، ۰/۳۱۴ و ۰/۳۱۷ در پژوهشهای پیشین است [۱]. در این تحلیل، بار در پنج گام به سازه وارد شده است و شدت بار کششی خارجی، به ترتیب، ۰/۰۵ و ۰/۰۵ و ۰/۰۵ و ۰/۰۳ و ۰/۰۳ تنش جاری شدن نخستین مواد است. زمان تحلیل روشهای مختلف در شکل (۲) مشخص شده‌اند. در این نمودار، محور افقی به شماره گام و محور عمودی به زمان تحلیل برحسب ثانیه اختصاص دارد.

جدول (۱)- زمان و شمار تکرارهای تحلیل

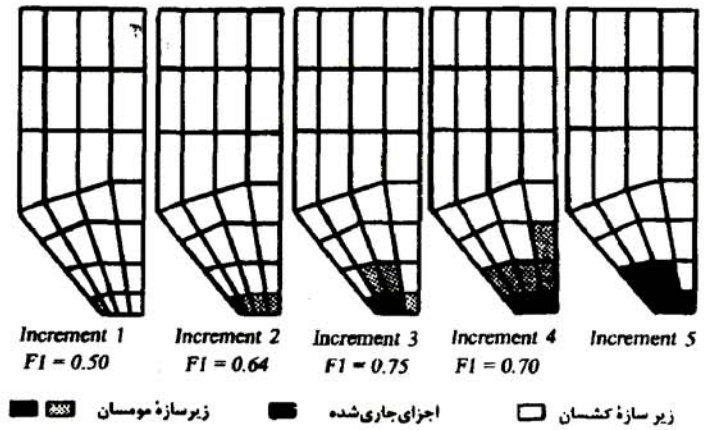
سختی اولیه	زمان	۳۴	۷۹	۱۸۹	۴۳۰	۸۴۸
	تکرار	۱	۷	۱۷	۳۷	۶۳
نیوتن - رافسون	زمان	۳۴	۱۳۷	۲۴۹	۳۴۶	۴۵۲
	تکرار	۱	۳	۳	۳	۳
روش هان	زمان	۳۴	۹۱	۱۵۸	۲۳۳	۳۲۳
	تکرار	۱	۳	۳	۳	۳
روش پیشنهادی	زمان	۳۴	۸۴	۱۴۱	۲۱۳	۲۸۴
	تکرار	۱	۳	۳	۳	۳

در جدول (۱) شمار تکرارها و نیز زمان تحلیل برحسب ثانیه برای هرگام بارگذاری روشهای مورد بحث درج شده‌اند. با بررسی این نتیجه‌ها، ویژگی روش پیشنهادی آشکار خواهد شد. شایان توجه است، شمار تکرارها در هر گام بارگذاری برای سه روش: هان، پیشنهادی و نیوتن - رافسون کامل یکی می‌باشد. این ویژگی درستی انتخاب اجزای زیر سازه‌های مومسان را در دو روش خودانطباق نشان می‌دهد.

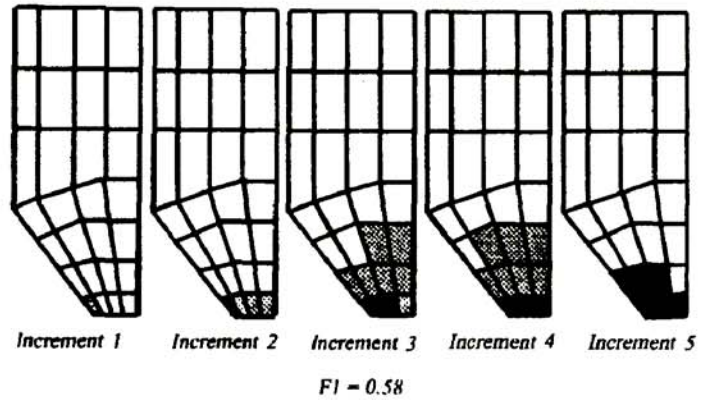
همان‌گونه که در جدول (۱) دیده می‌شود، گام پنجم بارگذاری در روش سختی اولیه با ۶۳ تکرار، زمانی برابر ۴۱۸ ثانیه صرف نموده است. به سخن دیگر، برای هر تکرار حدود ۶/۵ ثانیه زمان میانگین لازم است که شامل محاسبه بار پس‌ماند و بررسی

همگرایی می‌باشد. میانگین زمان هر تکرار همین گام، در روش نیوتن - رافسون کامل، ۱۰۶ ثانیه بوده است. اگر ۲۰ ثانیه برای سه تکرار - که شامل محاسبه بار پس‌ماند و بررسی همگرایی می‌باشد - کنار گذاشته شود، حدود ۲۹ ثانیه زمانی است که هر تکرار صرف برپایی دوبارهٔ ماتریس سختی سازه می‌کند. این بررسی نشان می‌دهد، برپایی ماتریس سختی فرآیندی وقت‌گیر می‌باشد و به هرصورت این زمان کاهش یابد، گامی در جهت کم کردن زمان تحلیل خواهد بود. براساس جدول (۱)، زمان برپایی ماتریس سختی در روش پیشنهادی در همین گام به ۱۷ ثانیه و در روش هان به ۲۴ ثانیه رسیده است.

شکلهای (۳) و (۴) اجزای مومسان و نیز زیرسازهٔ مومسان تعریفی در پایان هر گام بارگذاری را، به ترتیب، براساس دو روش پیشنهادی و هان نشان می‌دهند. دراین شکلها اجزایی که با هاشور پررنگتر مشخص شده‌اند، در پایان گام بارگذاری مربوطه جاری شده‌اند. اجزایی با هاشور کم‌رنگتر آنهایی هستند که پیش‌بینی می‌شود در گام بعدی بارگذاری جاری گردند. به سخن دیگر، اجزای بدون هاشور در گام بعد کشسان باقی می‌ماند و زیرسازهٔ کشسان از آنها تشکیل خواهد شد. سایر اجزا نیز در گام بارگذاری بعدی در زیرسازهٔ مومسان قرار خواهند گرفت.



شکل (۳)-گسترش اجزای کشسان و مومسان در روش پیشنهادی



شکل (۴)-گسترش اجزای کشسان و مومسان در روش هان

در این شکلها، ضریب جداسازی زیر سازه‌ها (F1) درج شده است. مشخص می‌باشد، هرچه F1 بزرگتر شود، زیرسازهٔ مومسان درگام بعدی کوچکتر خواهد بود. براین اساس، تفاوت دو روش در تعیین ضریب جداسازی و دقت آنها روشن می‌گردد. آشکار است، روش پیشنهادی در تمام گامها زیرسازهٔ مومسان کوچکتری را به کار می‌برد. این به دلیل انتخاب متناسبتر ضریب F1 می‌باشد. ناحیهٔ مومسان نیز در پایان گام بارگذاری بعدی، از زیرسازهٔ تعریف شده تجاوز نمی‌کند. از این‌رو، به سبب کوچکتر بودن زیرسازهٔ مومسان، زمان کمتری در هر تکرار صرف برپایی ماتریس سختی زیرسازهٔ مزبور و در نتیجه تحلیل سازه می‌گردد. اگر گامهای بارگذاری به

گونه‌ای باشند که برای رسیدن به همگرایی تکرارهای بیشتری انجام شود، کارآیی روش پیشنهادی نسبت به فنهای دیگر بیشتر آشکار خواهد شد.

نتیجه‌گیری

از چند شیوهٔ تحلیل غیرخطی سازه‌ها در این مقاله سخن به میان آمد و یک روش نو نیز پیشنهاد شد. برای نشان دادن کارآیی این فن، یک مثال عددی تحلیل گردید. خاطر نشان می‌کند، مثالهای فراوانی به وسلیه نویسندگان مقاله با روش پیشنهادی حل شده است. با وجود این، به دلیل حجم محدود مقاله تنها یکی از آنها به نظر خوانندگان رسید. چکیدهٔ نتیجه‌های تجربی عددی در ادامه درج می‌شوند.

فن نیوتن - رافسون کامل (مماسی) از روشهای سختی اولیه و نیوتن - رافسون بهبود یافته کارآیی بهتری دارد، ولی کند است. روشهای سختی اولیه و یا نیوتن - رافسون بهبود یافته در گامهای پایانی بارگذاری با تکرار زیاد همگرا می‌شوند و یا واگرا می‌گردند. از سوی دیگر، روش هان بین ۲۰ تا ۴۰ درصد سریعتر از نیوتن - رافسون کامل کار می‌کند. شایسته‌تر از آنها، روش پیشنهادی بین ۳۰ تا ۶۰ درصد تندتر از روش نیوتن - رافسون کامل تحلیل را به انجام می‌رساند. در همین حال، توانایی همگرایی این روش هم خوب است. همچنین، انبارسازی شیوهٔ پیشنهادی به حافظه رایانه‌ای کمتری نیاز دارد.

منبعها

۱ - محمدرضایی پژند، تحلیل کشسان - مومسان و برنامه رایانه‌ای آن، نشریهٔ دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، سال چهارم، شماره ۱ و ۲. (۱۳۷۱).

2- Han, T. Y., and Abel, J. F., "Substructure Condensation Using Modified Decomposition", International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 20, pp. 1959-1964, (1984).

3- Han, T. Y., and Abel, J. F., "Adaptive Substructuring Techniques in Elasto - Plastic Finite Element Analysis", Computers & Structures. Vol. 20, No. 1-3, pp. 181-192, (1985).

4- Han, T. Y., Adaptive Substructuring and Interactive Graphics for Three Dimensional Elasto-Plastic Finite Element Analysis, PhD. Dissertation of Cornell University, U.S.A., (1984).

5- Han, T. Y, and Abel John F., "Adaptive Substructuring Techniques for Finite Element Analysis with Localised Nonlinearity", Finite Element Methods for Nonlinear Problems, Ed. Bergan & Bathe, pp. 481-494, (1986).