مجله پژوهشي دانشگاه اصفهان (علوم پايه)
جلد بيست و يكم- شماره ١- سال ١٣٨٤
صص ٦٦ - ٥٣

روشی نو برای محاسبه عدد فرابنیوس

مهدی جوادی و محمدرضا رجب‌زاده مقدم

گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

در قديم الايام بعضي از كشورها سكه‌هاي خود را بر پايه‌ي اعداد اول ضرب مي‌كردند و مردم به عنوان سرگرمي در معاملات تلاش مي‌كردند كه دريابند «بيشترين مقدار وجهي را كه يک شخص نمي‌تواند از تركيب سكه‌هاي موجود خود بپردازد، چقدر است؟» اين عدد به عنوان *عدد فرابنيوس* معروف است.

به طور دقيقتر فرض كنيد $A_k = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ مجموعه اي از اعداد طبيعي باشد كه $(a_0, a_1, \dots, a_k) = 1$. در اين صورت عدد طبيعي N داراي نمايشي بر پايه A_k است، هرگاه $x_\circ, x_\text{١}, \dots, x_k \in N_\circ = N \cup \{\circ\}$ وجود داشته باشد به قسمي كه

$$N = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k$$

بزرگترين عددي را كه نتوان به صورت تركيب فوق نمايش داد، عدد فرابنيوس نامند.

در اين مقاله سعي شده عدد فرابنويس را براي مجموعه هاي خاص محاسبه و روشي جديد براي اثبات آنها ارايه كنيم.

واژه‌هاي كليدي: عدد فرابنيوس، نمايش اعداد، تجزيه پذيري اعداد.

A New Approach for Calculating Frobenius Number

M. Djavadi and M. R. Rajabzadeh Moghaddam

Department of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad

Abstract

In old times some countries used to coin their coins in the bases of prime numbers and people, as an entertainment, were trying to find out " the most amount that can not be payed with the combination of the belonging coins". This number is know as the *Frobenius number*.

More precisely, let $A_k = \{ a_\circ , a_1 ,..., a_k \}$ be a set of natural numbers such that $\{a_\circ , a_1 ,..., a_k \} = 1$. Then the natural number N has a representation in the bases of A_k , if there exist $\{x_\circ , x_1 ,..., r_k \in \quad N_\circ = N \cup \{\circ\}$ such that

$$N = x_\circ a_\circ + x_1 a_1 + ... + x_k a_k .$$

Now, the largest number, which can not be represented in the above form is called the *Frobenius number*.

In the present paper we try to give a new technique for the calculation of the Frobenius number for certain sets.

Keywords: The Frobenius number, Number representation

مقدمه

در آغاز دوران رواج سکه، بعضي از کشورها سکه‌هاي خود را بر پايه‌ي اعداد اول ضرب مي‌کردند، و يکي از سرگرميهاي مردم در مراودات روزمره "تعيين بيشترين مقداري بود که شخص نتواند به صورت ترکيبي از سکه‌هاي موجود خود به پردازد."

نظر به اينکه جورج فرابنيوس[۱]، رياضيدان آلماني، اين مطلب را همواره در سخنرانيهاي خود مطرح مي‌کرد، اين عدد به وي منسوب شده و به نام *عدد فرابنيوس* معروف است.

به عنوان مثال، چنانچه سکه هاي موجود شخصي ۵، ۷ و ۱۳ واحدي باشد و به تعداد کافي از هر سکه دارا باشد، با کمي دقت ملاحظه مي‌شود که هيچ يک از اعداد

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,16\}$$

را نمي‌توان ترکيبي از ۵، ۷ و ۱۳ به دست آورد، در حالي که تمام اعداد بزرگتر از ۱٦ را ميتوان ترکيبي از آنها نوشت. از اين رو بيشترين مقداري که خود شخص نمي‌تواند از ترکيب سکه‌هاي خويش به پردازد عدد ۱٦ است، که اين همان عدد فرابنيوس نسبت به پايه‌ي $\{5,7,13\}$ مي‌باشد.

اکنون به طور دقيقتر، فرض کنيد:

$$A_k = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$$

مجموعه‌اي از اعداد صحيح مثبت باشد، که نسبت به هم اول هستند، يعني:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_k) = 1$$

عدد صحيح نامنفي N داراي *نمايشي* بر پايه A_k است ، هرگاه اعداد صحيح نامنفي $x_1, \ldots, x_k$ وجود داشته باشد به قسمي که

$$N = x_0 a_0 + x_1 a_1 + \ldots + x_k a_k$$

بزرگترين عدد صحيح مثبتي که داراي نمايشي به صورت فوق نباشد به عدد فرابنيوس مشهور است، و معمولا آن را با

$$g(A_k) = g(a_0, a_1, \ldots, a_k)$$

نشان مي‌دهند. به آساني ملاحظه مي‌شود که اگر $1 \in A_k$، آنگاه تمام اعداد صحيح نامنفي داراي نمايشي به صورت مورد نظر هستند. در اين حالت عدد فرابنيوس را ۱ - اختيار مي‌کنند.

۱. George Frobenius (۱۹۸٤-۱۹۱۷)

مطالعات بسيار گسترده‌اي در اين زمينه انجام شده است، كه از جمله ميتوان به كارهاي براور[۱] [۱]، هوف مايستر[۲] [٦]، جوادي [۲، ۳، ٤ و ٥]، سلمر[۳] [۷] و ديگران اشاره كرد. به آساني تحقيق مي‌شود كه هر مجموعه‌ی A_k داراي عدد فرابنيوس است (براي سادگي به [۸] رجوع شود).

ما در اين مقاله در پي تعيين عدد فرابنيوس هستيم كه اثباتهاي جديد و ساده‌تري از آنها نيز در اينجا ارايه خواهيم كرد.

تجزيه اعداد و عدد فرابنيوس براي مجموعه‌هاي دو عضوي

در اين بخش، تجزيه‌ی اعداد را بر پايه‌ی مجموعه‌هاي دو عضوي بررسي كرده و عدد فرابنيوس را براي اين مجموعه‌ها محاسبه و تعيين مي‌كنيم. براي اطلاعات بيشتر به [٤] يا [٦] مراجعه شود.

لم۲.۱. فرض كنيد a و b دو عدد طبيعي متباين باشند. در اين صورت به ازاي اعداد صحيح $x_\circ , y_\circ \in \mathbb{Z}$، عدد صحيح n داراي تجزيه‌ی $n = ax_0 + by_0$ است اگر و تنها اگر جفتهاي $(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ با شرايط

$$x = x_\circ + bt \qquad ,t \in \mathbb{Z}$$
$$y = y_\circ + at$$

وجود داشته باشد به قسمي كه $n = xa + yb$. در حالت خاص، به ازاي $0 \le x_1 \le b-1$، $n = x_1 a + y_2 b$.

اثبات. فرض كنيد به ازاي $x, y \in \mathbb{Z}$ ، تجزيه‌ي ديگري مانند $n = xa + yb$ موجود باشد. در اين صورت $(x - x_0)a + (y - y_0)b = 0$، كه از آنجا

$$(x - x_0)a = (y - y_0)b$$

چون $(a,b) = 1$، در نتيجه $a \mid (y - y_0)$ و $b \mid (x - x_0)$. از اين رو

$$x = x_0 + bt$$
$$y = y_0 + at$$

---

۱ .A. Brauver
۲. G. Hofmeister
۳. E. S. Selmer

عكس مطلب به آساني حاصل مي شود.

در حالت خاص اگر $0 \le x_1 \le b-1$، آنگاه $t = \left[\frac{x_0}{b}\right]$ را اختيار مي‌كنيم.

در قضيه زير عدد فرابنيوس را براي مجموعه‌هاي دو عضوي $A_2 = \{a,b\}$ تعيين مي‌كنيم.

قضيه ۲.۲. فرض كنيد a و b دو عدد طبيعي متباين باشند. در اين صورت

$$g(a,b) = ab - (a+b)$$

اثبات. بنابر تعريف عدد فرابنيوس، نشان مي‌دهيم كه $g = g(a,b)$ تجزيه‌پذير نيست و هر عدد بزرگتر از آن بر حسب a و b قابل تجزيه است. به روش برهان خلف، فرض كنيم كه g تجزيه ناپذير باشد. ملاحظه مي‌شود

$$g = ab - a - b = a(b-1) - 1b$$

در نتيجه $x = b-1$ و $y = -1$ يک جواب است. حال اگر $x_\circ, y_\circ \in \mathbf{N}_\circ = N \cup \{\circ\}$ وجود داشته باشد به قسمي كه

$$g = ax_0 + by_0$$

آنگاه بنابر لم ۱.۲، $t \in \mathbb{Z}$ موجود است به طوري كه

$$x_0 = x + bt$$
$$y_0 = y - at$$

ولي چون $y_0 \ge 0$، در نتيجه بايستي $t \le -1$. از طرف ديگر داريم

$$x_0 = b - 1 + bt \le b - 1 - b = -1$$

يعني $x_0 \le -1$، كه اين با فرض تناقض دارد و لذا g در N_0 تجزيه ناپذير است.

اينک نشان مي‌دهيم كه هر $n \ge g = g(a,b)$، داراي تجزيه‌اي به صورت مورد نظر بر حسب a و b مي‌باشد. چون $(a,b) = 1$، اعداد صحيح $x, y \in \mathbb{Z}$ موجودند به طوري كه

$$n = ax + by$$

اكنون نشان مي‌دهيم كه به ازاي عدد مناسب $t \in \mathbb{Z}$، اعداد طبيعي $x_0 = x + bt$ و $y_0 = y - at$ موجودند به طوري كه $n = ax_0 + by_0$.

براي اين منظور t را بزرگترين عددي اختيار مي كنيم كه $at \le y$ (يعني $t=[y/a]$ جزوصحيح y/a مي‌باشد). بنابراين $y-a \le at$، زيرا در غير اين صورت اگر $at < y-a$ آنگاه $a(t+1)=at+a<y$ كه با انتخاب t در تناقض است. از اين رو با استفاده از شرط $at \le y$، داريم $y_0 = y-at \ge 0$. از طرف ديگر $n = ax_0 + by_0 > g(a,b)$ در نتيجه

$$\begin{aligned} ax_0 > ab-(a+b)-by_0 &= ab-(a+b)-b(y-at) \\ &= b[at-(y-a)]-(a+b) \ge b-(a+b) = -a \end{aligned}$$

بنابراين $ax_0 > -a$ و لذا $x_0 \ge -1$. از اين رو $x_0 \ge 0$ كه اين شرط اثبات قضيه را كامل مي‌كند.

در زير تعداد اعداد كمتر از عدد فرابنيوس را مي يابيم كه نسبت به مجموعه هاي دو عضوي تجزيه پذيرند.

قضيه ۳.۲. دو عدد متباين طبيعي a و b را در نظر بگيريد. در اين صورت تعداد اعداد $0 \le n \le g(a,b) = g$ كه نسبت به $\{a,b\}$ تجزيه پذيرند، برابر است با $\dfrac{g+1}{2}$

اثبات. فرض كنيد $n_1 + n_2 = g$، كه $n_1 + n_2 \in N_0$، توجه داريم كه n_1 و n_2 هر دو با هم نمي توانند تجزيه شوند، زيرا در غير اين صورت عدد فرابنيوس $g(a,b) = g$ و نيز تجزيه پذير خواهد بود كه ناممكن است. از اين رو بدون اينكه به كليت خللي وارد آيد، فرض كنيم n_1 تجزيه‌ناپذير باشد. اگر به ازاي $x', y' \in \mathbb{Z}$، $n_1 = x'a + y'b$ آنگاه بنابر لم ۲.۱، عدد n_1 داراي تجزيه‌ی ديگري به صورت زير است:

$$n_1 = xa + yb \quad , \qquad 0 \le x \le b-1$$

ولي چون n_1 در N_0 تجزيه ناپذير است، بايستي $y \le -1$. بنابر قضيه‌ی ۲.۲،

$$g = g(a,b) = ab - a - b.$$

از اين رو

$$n_2 = g - n_1 = ab - a - xa - yb = (b-1-x)a + (-y-1)b,$$

كه در آن ضرايب a و b مثبت و لذا n_2 در N_0 تجزيه پذير است.

ملاحظه مي‌شود كه عدد فرابنيوس $g = g(a,b)$ فرد است، زيرا

$$g = ab - a - b = (a-1)(b-1) - 1$$

و $(a,b)=1$.

به آساني ملاحظه مي‌شود که با فرض $g = n_1 + n_2$ ، اگر $0 \le n_1 \le \frac{g-1}{2}$ ، آنگاه

$$g \ge n_2 \ge g - \frac{g-1}{2} = \frac{g+1}{2}.$$

اکنون تمام جفتهاي متفاوت $\{n_1, n_2\}$ را جستجو مي‌کنيم که $g = n_1 + n_2$ و $n_i \in \mathbf{N}_\circ$.

از طرفي چون هر دو عدد n_1 و n_2 نمي‌توانند در شرط $n_i \ge \frac{g+1}{2}$ صدق کنند، در نتيجه بدون اينکه به کليت خللي وارد آيد، فرض مي‌کنيم $n_1 \le \frac{g-1}{2}$ و همان طور که در فوق ديديم $n_2 \ge \frac{g+1}{2}.$ در اين صورت به ازاي هر n_1 اي که $0 \le n_1 \le \frac{g-1}{2}$ تغيير کند، دقيقا يک مجموعه‌ي $\{n_1, n_2\}$ با شرط $g = n_1 + n_2$ ($n_i \in N_0$) حاصل مي‌شود، که در آن عدد n_2 تجزيه پذير است. بنابراين دقيقا $\frac{g+1}{2}$ عدد تجزيه پذير با شرط فوق به دست مي آيد، يعني تعداد اعداد تجزيه پذير کمتر از عدد فرابنيوس برابر است با

$$\frac{g(a,b)+1}{2}.$$

تعيين عدد فرابنيوس در حالت مجموعه‌هاي سه عضوي

تعيين عدد فرابنيوس براي مجموعه‌هاي دلخواه بسيار دشوار است. ما در اين بخش با ملحوظ کردن يک شرط، عدد فرابنيوس مجموعه‌هاي سه عضوي را تعيين مي‌کنيم. در اين بخش a ، b و c را سه عدد دلخواه طبيعي در نظر مي‌گيريم که $(a,b,c)=1$.

نتايج زير اثبات قضيه‌ی اصلي را کوتاهتر مي‌کند.

لم ۱.۳. فرض کنيد a ، b و c سه عدد طبيعي باشند که $(a,b,c)=1$ و $a+c=db$. در اين صورت $(a,b)=1$ و $(b,c)=1$.

لم ۲.۳. فرض کنيد $(a,b,c)=1$ و $a+c=db$ ، به‌طوري که به ازاي هر $x,y,z \in \mathbb{Z}$ ،

$$g = xa + yb + zc$$

$\mathbb{Z}$

در اين صورت $x', y', z' \in$ وجود دارند به طوري که

$$g = x'a + y'b + z'c.$$

اثبات. به ازاي پارامتر $t \in \mathbb{Z}$ سه تبديل بر روي سه‌تايي‌هاي $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ با ضابطه‌هاي زير تعريف مي‌كنيم.

$$(x, y, z)T_1(t) = (x - bt, y + at, z)$$
$$(x, y, z)T_2(t) = (x, y + ct, z - bt)$$
$$(x, y, z)T_3(t) = (x - t, y + dt, z - t)$$

ملاحظه مي‌شود كه هر سه تبديل فوق ضرايب $g = xa + yb + zc$ را به ضرايبي تبديل مي‌كنند كه اين تساوي همواره برقرار مي‌ماند. مثلا با توجه به شرط $a + c = bd$ ، داريم

$$(x - t)a + (y + dt)b + (z - t)c = xa + yb + cz = g,$$

كه با تغيير t ميتوان ضرايب را به طور دلخواه اختيار نمود.

از لم فوق نتيجه جالب زير حاصل مي‌شود:

نتيجه ۳.۳. عدد g داراي تجزيه‌اي بر پايه $\{a, b, c\}$ بر روي $\mathbf{N}_\circ$ است اگر و فقط اگر g داراي تجزيه هايي بر حسب $\{a, b\}$ و $\{b, c\}$ باشد.

اثبات. فرض كنيم $g = xa + yb + zc$ كه $x, y, z \in \mathbf{N}_\circ$. اكنون اگر $x \le z$ تبديل $T_3(x)$ را به كار مي‌بريم

$$(x, y, z)T_3(x) = (0, y + dx, z - x)$$

و بنابر لم ۲.۳،

$$g = (y + dx)b + (z - x)c$$

در حالتي كه $z \le x$ ، تبديل $T_3(z)$ را مورد استفاده قرار مي‌دهيم،

$$g = (x - z)a + (y + dz)b,$$

كه در هر دو حالت ضرايب به $\mathbf{N}_\circ$ تعلق دارند. در نتيجه g در $\mathbf{N}_\circ$ داراي تجزيه‌هايي برحسب $\{a, b\}$ و $\{b, c\}$ است و از اين رو حكم برقرار خواهد شد.

اكنون تكنيكهاي لازم براي تعيين عدد فرابنيوس مجموعه هاي سه عضوي موجود است، كه در زير به ارايه آن مي‌پردازيم.

قضيه۴.۳. فرض کنيد $\{a,b,c\}$ مجموعه اي از اعداد طبيعي باشد، که $(a,b,c)=1$ و $a+c=db$. در اين صورت عدد فرابنيوس به صورت زير است:

$$g=g(a,b,c)=\max\{g_1,g_2\},$$

که در آن $g_2=\left[\frac{c}{d}\right]a-b \quad , \quad g_1=\left[\frac{a}{d}\right]c-b$

اثبات. نخست نشان مي‌دهيم که g به وسيله‌ی مجموعه‌ی $\{a,b,c\}$ با ضرايب در $\mathbb{N}_\circ$ تجزيه‌پذير نيست. بنابر نتيجه‌ی۳.۳، کافي است نشان دهيم که g بر حسب هيچ يک از مجموعه‌هاي $\{a,b\}$ و $\{b,c\}$ تجزيه‌پذير نمي‌باشد.

ميتوان فرض کرد که $g_1 \geq g_2$ و لذا $g=g(a,b,c)=g_1$. از طرفي داريم $g_1=yb+zc$ ، که در آن $y=-1$ و $z=\left[\frac{a}{d}\right]$. ولي

$$\left[\frac{a}{d}\right]\leq\frac{a}{d}<\frac{a+c}{d}=b.$$

اکنون فرض کنيم g_1 نسبت به پايه‌ی $\{b,c\}$ تجزيه‌پذير باشد. بنابر لم ۲.۳، تبديل $T_2(t)$ وجود دارد به قسمي که

$$(0,-1,\left[\frac{a}{d}\right])T_2(t)=(0,y',z')$$

که $g_1=y'b+z'c$ و $y',z'\in\mathbb{N}_\circ$. ولي چون $y=-1$ در نتيجه $t\geq 1$ ، که از آنجا

$$z'=\left[\frac{a}{d}\right]-bt\leq(b-1)-b=-1$$

حاصل مي‌شود. بنابراين g_1 نمي‌تواند برحسب b و c داراي تجزيه‌اي در $\mathbb{N}_\circ$ باشد.

اکنون با استفاده مکرر از لم ۲.۳، داريم

$$\begin{aligned}(0,-1,\left[\frac{a}{d}\right])T_3(\left[\frac{a}{d}\right])T_1(-1) &= (-\left[\frac{a}{d}\right],-1+d\left[\frac{a}{d}\right],0)T_1(-1)\\ &= (b-\left[\frac{a}{d}\right],d\left[\frac{a}{d}\right]-a-1,0).\end{aligned}$$

در نتيجه $g_1=x_1a+y_1b$ ، که در آن

$$x_1=b-\left[\frac{a}{d}\right] \quad , \quad y_1=d\left[\frac{a}{d}\right]-a-1,$$

$\mathbb{N}$

که ملاحظه مي‌شود $y_1 \le -1$. از این رو فرض کنیم که g_1 برحسب $\{a,b\}$ در $_\circ$ تجزیه ناپذیر باشد. سپس بنابه لم ۲,۳، تبدیل $T_1(t)$ به صورت زیر وجود دارد:

$$(x_1, y_1, 0)T_1(t) = (x'_1, y'_1, 0),$$

که در آن $x'_1, y'_1 \in \mathbf{N}_\circ$ و $g_1 = x_1{'}a + y_1{'}b$. ولي چون $y_1 \le -1$ ، در نتیجه $t \ge 1$. از طرفي چون $\left[\frac{c}{d}\right] = 0$ و $g_1 \ge g_2$ ، در نتیجه $a < d$ و $c < d$. از این رو

$$a + c < 2d \le bd = a + c$$

که یک تناقض است و لذا g_1 نمي‌تواند در $\mathbf{N}_\circ$ تجزیه‌اي برحسب a و b داشته باشد.

حال نشان مي‌دهیم در N_0 ، هر $n_0 > g = g_1$ داراي تجزیه‌اي برحسب $\{a,b,c\}$ است. چون $(b,c) = 1$ ، در نتیجه $y', z' \in \mathbf{N}$ وجود دارند به قسمي که $n_0 = y'b + z'c$. بنابر لم ۲.۳، میتوان تبدیلي انتخاب کرد که $0 \le z \le b-1$, $n_0 = yb + zc$ اگر $z \le \left[\frac{a}{d}\right]$, آنگاه

$$yb = n_0 - zc > g - zc \ge g - \left[\frac{a}{d}\right]c = -b.$$

در نتیجه $y > -1$ و لذا $y \ge 0$. در حالت دیگر، اگر $\left[\frac{a}{d}\right] < z < b$ آنگاه

$$b = \frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \left[\frac{a}{d}\right] + \varepsilon_1 + \left[\frac{c}{d}\right] + \varepsilon_2 \qquad , \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 2.$$

بنابراین $b \le \left[\frac{a}{d}\right] + \left[\frac{c}{d}\right] + 1.$

ولي چون b عددي است صحیح، در نتیجه $b - z < b - \left[\frac{a}{d}\right] \le \left[\frac{c}{d}\right] + 1$ پس

$$0 \le b - z \le \left[\frac{c}{d}\right]$$

با به کار بردن لم ۲,۳،

$$\begin{aligned}(0, y, z)T_3(z)T_1(-1) &= (-z, y + dz, 0)T_1(-1)\\ &= (b - z, y + dz - a, 0)\end{aligned}$$

از این رو $n_0 = x'a + y'b$ ، که در آن

$$y' = y + dz - a \qquad , \qquad x' = b - z$$

از طرف ديگر $\left[\frac{c}{d}\right] \geq 0 \leq x' = b - z \leq$ و

$$y'b = n_0 - x'a > g_2 - \left[\frac{c}{d}\right]a = -b.$$

در نتيجه $y' \geq 0$ ، يعني ضرايب تجزيه‌ی $n_0 = x'a + y'b$ در $\mathbb{N}_\circ$ قرار دارند و لذا حكم برقرار است.

مثال. عدد فرابنيوس مجموعه‌ی $\{17, 2, 7\}$ را تعيين كنيد.

ملاحظه مي شود كه $17 + 7 = 2 \times 12$، يعني $d = 12$. حال بنابر قضيه‌ی فوق ماكسيمم دو عدد g_1 و g_2 را كه همان عدد فرابنيوس است به دست مي‌آوريم.

$$g(17,2,7) = g_1 = \left[\frac{a}{d}\right]c - b = \left[\frac{17}{12}\right] \times 7 - 2 = 7 - 2 = 5.$$

تعيين عدد فرابنيوس در حالتهاي خاص

در اين بخش پاياني سعي مي‌شود كه عدد فرابنيوس را براي مجموعه‌هاي چند عضوي محاسبه و تعيين كنيم.

لم زير براي اثبات قضيه‌ی اصلي اين بخش مفيد است.

لم ۱.٤، اعداد طبيعي $x_\circ, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ وجود دارند به‌طوري‌كه $X = x_0 + x_1, \ldots + x_n$ و $Y = x_1 + 2x_2, \ldots + nx_n$ اگر و فقط اگر $nX \geq Y$، كه $X, Y \in \mathbb{N}_\circ$.

اثبات. فرض كنيد به ازاي $x_\circ, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$،

$$X = x_0 + x_1 + \ldots + x_n \qquad \text{و} \qquad Y = x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n$$

در اين صورت $nX - Y = nx_0 + (n-1)x_1 + \ldots + x_{n-1} \geq 0$.

بعكس، فرض كنيد به ازاي $X, Y \in N_\circ$ ، نامساوي $nX \geq Y$ برقرار باشد. عدد n' را كوچكترين عددي انتخاب مي‌كنيم كه

$$n'X \geq Y \quad , \quad n' \leq n$$

در اين صورت $(n'-1)X < Y$. حال قرار مي‌دهيم $x_{n'} = Y - (n'-1)X$ و $x_{n'-1} = n'X - Y$.

سپس به ازاي هر $0 \leq i \leq n$، $x_i = 0$ به جز n' و $i = (n'-1)$. بنابراين

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = x_{n'-1} + x_{n'} = (n'X - Y) + (Y - (n'-1)X) = X$$

و همچنين

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n &= (n'-1)x_{n'-1} + n'x_{n'} \\ &= (n'-1)(n'X - Y) + n'(Y - (n'-1)X) \\ &= n'Y - (n'-1)Y = Y. \end{aligned}$$

با استفاده از لم فوق، نتيجه زير حاصل مي‌شود:

قضيه ٢.٤. فرض كنيد $a,k \in \mathbf{N}$، در اين صورت شرط لازم و كافي براي آنكه عدد طبيعي $g \in \mathbf{N}$ نسبت به مجموعه‌ی $\{a, a+k, a+2k, \ldots, a+nk\}$ با ضرايب $\mathbf{N}_\circ$ تجزيه‌پذير باشد آن است كه $nX > Y$, $g = aX + kY$ كه $X, Y \in \mathbf{N}_\circ$.

اثبات. قرار مي‌دهيم $a_i = a + ik$، كه $0 \le i \le n$ و فرض كنيم در $\circ$ عدد g به وسيله‌ی مجموعه‌ی $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ تجزيه پذير باشد. در اين صورت $x_\circ, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{N}_\circ$ وجود دارند به طوري كه

$$\begin{aligned} g &= a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a_0x_0 + (a+k)x_1 + \ldots + (a+nk)x_n \\ &= a(x_0 + x_1 + \ldots + x_n) + k(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n) \\ &= aX + kY \end{aligned}$$

كه در آن $X, Y \in N_0$. بنابر لم ١.٤، نامساوي $nX > Y$ برقرار است.

بعكس، فرض كنيد به ازاي $X, Y \in N_0$ و با شرط $nX > Y$ داشته باشيم $g = aX + kY$. در اين صورت

$$\begin{aligned} g &= aX + kY = a(x_0 + x_1 + \ldots + x_n) + k(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n) \\ &= a_0x_0 + (a+k)x_1 + \ldots + (a+nk)x_n \\ &= a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \end{aligned}$$

يعني g به وسيله‌ی مجموعه‌ی $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ در N_0 قابل تجزيه است.

حال قادريم عدد فرابنيوس را براي مجموعه‌ی $\{a, a+k, a+2k, \ldots, a+nk\}$، كه $(a,k) = 1$ محاسبه و فرمول جامعي براي آن ارايه دهيم.

قضيه٣.٤. اعداد طبيعي a، k و n را با شرط $(a,k) = 1$ در نظر بگيريد. در اين صورت عدد فرابنيوس مجموعه‌ی $\{a, a+k, a+2k, \ldots, a+nk\}$ به قرار زير است:

$$g = g(a, a+k, \ldots, a+nk) = \begin{cases} \frac{a-n-1}{n}a + k(a-1) & , \quad n \mid (a-1) \\ \left[\left[\frac{a-1}{n}\right]\right]a + k(a-1) & , \quad otherwise \end{cases}$$

اثبات. دو حالت را در نظر مي گيريم، ابتدا فرض كنيد $n \nmid (a-1)$. در اين صورت با فرض $z = \left[\frac{a-1}{n}\right]$ نتيجه مي شود $nz < a-1$ و همچنين

١ $n(z+1) > a-1$

اكنون اگر $g = aX + kY$ برقرار باشد، آنگاه نشان مي‌دهيم كه به ازاي هر $X, Y \in N_0$ ، نامساوي $nX < Y$ همواره برقرار است، و بنابر قضيه‌ى ٢.٤، عدد g تجزيه ناپذير مي‌باشد. از اين رو Y را كوچكترين عدد طبيعي ممكن انتخاب مي‌كنيم و بنابر لم ٢.١، اعداد صحيح $X', Y' \in \mathbb{Z}$ با شرايط

$$X' = X - kt \quad , \quad Y' = Y + at$$

وجود دارند به قسمي كه $g = aX' + kY'$. از طرف ديگر

$$nX' = nX - kt \le nX < Y \le at + Y = Y'.$$

در واقع مطلب فوق را بايستي به ازاي $X = z$ و $Y = a-1$ تحقيق كنيم، كه بنابر تعريف z ، داريم

$$nX = nz < a - 1 = Y.$$

حال بايستي نشان دهيم كه هر $n_0 > g$ در N_0 تجزيه ناپذير است.

چون $(a,k) = 1$، اعداد $X, Y \in \mathbb{Z}$ موجودند به قسمي كه

$$n_0 = aX + kY$$

با استفاده از لم ١.٢، ميتوان فرض كرد كه $0 \le Y \le a-1$.

بنابراين $aX = n_0 - kY > g - kY \ge az,$

كه از آنجا $X > z$ ، لذا $X \ge z+1$. حال با استفاده از (١) داريم

$$nX \ge n(z+1) > a - 1 \ge Y,$$

كه بنابر قضيه‌ى ٢.٤، عدد n_0 تجزيه‌پذير مي‌باشد.

در حالت ديگر، فرض مي‌كنيم $n\,|\,(a-1)$، كه از آنجا $z=\dfrac{a-1}{n}$

و در نتيجه $g=(z-1)a+(a-1)k$

همانند قسمت قبل ميتوان نشان داد به ازاي هر $X,Y\in\mathbf{N}_\circ$ با فرض $g=aX+kY$ نامساوي $nX<Y$ همواره برقرار است، كه در حالت خاص

$$X=z-1 \quad , \quad Y=a-1$$

نتيجه مي‌شود:

$$nX=n(\frac{a-1}{n}-1)=a-1-n<a-1=Y.$$

از اين رو بنابه قضيه‌ی ٢.٤، عدد g تجزيه ناپذير است.

اكنون نشان مي‌دهيم كه هر $n_0>g$ تجزيه پذير است. بنابر لم ١.١، ميتوان فرض كرد كه $0\le Y\le a-1$. از طرفي داريم

$$aX=n_0-kY>g-k(a-1)=a(z-1)$$

و لذا $X>(z-1)$، كه از آنجا $X\ge z$. در نتيجه $nX\ge nz$ و بنابراين $a-1\ge Y$. حال بنابر قضيه‌ی ٢.٤، عدد n_0 تجزيه پذير و حكم برقرار است.

مثال. عدد فرابنيوس مجموعه‌ی $\{a,a+k\}$، كه $n=1\,|\,(a-1)$ به صورت زير است:

$$\begin{aligned} g(a,a+k) &= (a-2)a+k(a-1)=a^2-2a+ka-k \\ &= a(a+k)-a-(a+k) \end{aligned}$$

اين دقيقا همان فرمول حاصل براي مجموعه هاي دو عضوي است كه در قضيه‌ی ٢.٢، به دست آمده بود.

اگر $n>a-1$، آنگاه $g=k(a-1)$ و به ازاي $k=1$ عدد فرابنيوس برابر است با $g=a-1$.

منابع

۱- مهدي جوادي و محمدرضا رجب‌زاده مقدم، "مسايل سکه و تمبر فرابنيوس و مجموعه‌هاي مطلوب"، فرهنگ و انديشيه رياضي، شماره ۳۱، (۱۳۸۲)، صص ٤۰-۲٥.

۲. Brauer, A., "On a problem of partitions," Amer. J. Math ٦٤ (۱۹٤۲), ۲۹۹-۳۱۲.

۳. Djawadi, M., "Untersuchung eines speziellen Beispliels Zueinen problem von Frobenius," Diplomarbeit Math. Inst. Joh. Gutenberg - Univ Mainz, ۱۹۷۲.

٤. Djawadi, M., & "Kennzeichnung von Megen mit einer additiven Minimal igenschaft," J. Rein Angew. Math. ۳۱۱/۳۱۲ (۱۹۷۹), ۳۰۷-۳۱٤.

٥. Djawadi, M., and Hofmeister, G., "Linear diophantine problems," Arch. der Math. , Vol. ٦٦ (۱۹۹٦), ۱۹-۲۹.

٦. Djawadi, M., and Hofmeister, G., "Linear diophantine problems, "Number Theory, New York Seminar, Springer-Verlag (۱۹۹٦), ۹۱-۹٥.

۷. Hofmeister, G., "Linear diophantine problems," Bull. Iran. Math. Soc. Vol. ۸, No. ۲ (۱۹۸۱), ۱۲۱ - ۱٥٥.

۸. Selmer, E. S., "Associate bases postage stamp problem," J. of Number Theory ٤۲ No. ۳ (۱۹۹۲) ۳۲۰-۳۳٦.