

# تحلیل تنش‌های برون‌صفحه‌یی در تیر مرکب دوار

اصغر نئیر (استاد یار)

مسعود طهانی (دانشجوی دکترا)

محمدعلی حامد (دانشجوی دکترا)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

از آنجا که لایه‌لایه شدن یکی از عوامل مهم از کار افتادگی سازه‌های مرکب<sup>۱</sup> است، تحلیل تنش‌های برون‌صفحه‌یی در نزدیکی لبه‌ی آزاد این سازه‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است. در این تحقیق به منظور پیش‌بینی این تنش‌ها در تیر مرکب دوار با لایه‌گذاری دلخواه، با استفاده از یک میدان جابه‌جایی مناسب براساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم تیر<sup>۲</sup> و اصل هامیلتون<sup>۳</sup>، معادلات حرکت به دست آمد سپس با ارضاء شرایط مرزی<sup>۴</sup> معادلات به روش تحلیلی حل شد. با استفاده از قانون هوی و فرم انتگرال‌گیری شده‌ی معادلات موضعی حرکت، توزیع تنش سه‌بعدی به دست آمد. نتایج حاصل از این نظریه با حل اجزاء محدود معادلات کشسانی<sup>۵</sup> برای حالت‌های مختلف مقایسه شد. نتایج وجود تنش‌های برون‌صفحه‌یی را در لبه‌ی آزاد و تکیه‌گاه تیر نشان می‌دهد.

## مقدمه

مواد مرکب در سازه‌هایی کاربرد دارند که لازم است نسبت به وزن‌شان استحکام بالایی داشته باشند. به همین سبب، امروزه این مواد کاربرد بسیار وسیعی در صنایع هوایی پیدا کرده‌اند.

در به‌کارگیری این مواد، مهندسان با مشکلات فراوانی روبرو هستند. یکی از این مسائل، وجود تنش‌های بین لایه‌یی (برون‌صفحه‌یی) در نزدیکی لبه‌ی آزاد سازه‌های مرکب است، که به جدایش بین لایه‌یی<sup>۶</sup> می‌انجامد. این فرایند باعث کاهش سختی و استحکام سازه شده و در نهایت منجر به از کار افتادگی کلی سازه می‌شود. لذا جدایش لایه‌ها یکی از موانع مهم در کاربرد وسیع مواد لایه‌یی مرکب در سازه‌های مهندسی است.

نتایج آزمایشگاهی و مطالعات تحلیلی و عددی نشان می‌دهد که وضعیت تنش در نزدیکی لبه‌ی آزاد سازه‌ی مرکب پیچیده است و با تغییرات شدید مواجه است. این پدیده به علت وجود ناپیوستگی مادی و هندسی در جهت ضخامت و محوری این سازه‌هاست. نظریه‌های کلاسیک، به علت سه‌بعدی بودن وضعیت تنش در لایه‌ی مرزی (نزدیکی لبه‌ی آزاد) استفاده‌ی چندانی ندارند، و بنابراین برای تحلیل این تنش‌ها از نظریه‌های کامل‌تری استفاده می‌شود. به علت وجود پیچیدگی‌های موجود در مسئله - از جمله همسان نبودن مواد لایه‌ها، تغییرات سریع خواص مکانیکی در جهت ضخامت، عدم پیوستگی هندسی در راستای مرزها و کوبل بودن<sup>۸</sup> تغییر شکل‌های درون‌صفحه‌یی و تغییر شکل‌های برشی - پیشرفت تحقیقاتی در این

زمینه ابتدائاً کند بود. همچنین به علت موجود نبودن حل دقیق معادلات کشسانی، محققان بسیاری با روش‌های مختلف تقریبی (تحلیلی یا عددی) سعی کردند میدان تنش سه‌بعدی در لایه‌ی مرزی سازه‌ی مرکب را تحلیل کنند.

کانت و سوامیناتان کارهای انجام شده تا چند سال اخیر را به‌طور کامل گردآوری و ارائه کرده‌اند.<sup>[۱]</sup> یاپو و اونسن نیز برای اولین بار تنش‌های برشی برون‌صفحه‌یی را در یک ورق مرکب ایده‌آل که از لایه‌های ارتوتروپیک که توسط لایه‌های همسان جدا شده بود مورد بررسی قرار دادند.<sup>[۲]</sup> پیپس و پاگانو نیز اولین کسانی بودند که تنش‌های برون‌صفحه‌یی کامل (تنش‌های برشی و تنش‌های عمودی) را برای یک صفحه‌ی مرکب بلند و لایه‌گذاری شده‌ی متقارن که تحت کرنش محوری کششی قرار داشت، به دست آوردند. آنها معادلات خطی دوبعدی کشسان را به روش تفاضل محدود حل کردند.<sup>[۳]</sup> در این راستا می‌توان به روش‌های تقریبی تحلیلی مانند استفاده از نظریه‌ی صفحه‌یی مرتبه‌بالا<sup>[۴]</sup>، فنون اغتشاشات<sup>[۵]</sup>، روش لایه‌های مرزی<sup>[۶]</sup>، حل تقریبی معادلات کشسان ناهمسان<sup>[۷]</sup>، و نیز حل معادلات کشسانی ناهمسان با استفاده از توابع تنش لختیسی<sup>[۸]</sup> در حل معادلات تعادل نیرویی ورق مرکب براساس حداقل انرژی مکمل<sup>[۹،۱۰]</sup> اشاره کرد.

در میان روش‌های عددی موجود، روش اجزاء محدود بیشتر از سایر روش‌ها مورد توجه بوده است.<sup>[۱۱-۱۴]</sup> عده‌یی از محققان نیز روش لایه‌یی را به علت حجم محاسبات کمتر (نسبت به روش اجزاء

کشسان<sup>[۱۷]</sup>، روابط زیر برای کرنش‌ها به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x^* + z k_x^* + z^2 k_x^{\prime\prime}, \quad \epsilon_y = 0, \\ \epsilon_z &= \epsilon_z^* + z k_z^*, \quad \gamma_{yz} = \epsilon_{yz}^*, \\ \gamma_{xz} &= \epsilon_{xz}^* + z k_{xz}^* \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \epsilon_x^* &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad k_x^* = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad k_x^{\prime\prime} = \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2}, \quad k_x^{\prime} = \frac{\partial \eta_x}{\partial x}, \\ \epsilon_z^* &= \psi_z, \quad k_z^* = \psi_{z,z}, \quad \epsilon_{yz}^* = \psi_y, \quad \epsilon_{xz}^* = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ k_{xz}^* &= \psi_{xz} + \frac{\partial \psi_z}{\partial x}, \quad k_{xz}^{\prime} = \psi_{\eta_x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yz}^* = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad k_{xz}^{\prime} = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

### معادلات حرکت

برای به دست آوردن معادلات حرکت از اصل هامیلتون (معادله ۴) استفاده شده است<sup>[۱۷]</sup>:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta T) dt = 0 \quad (4)$$

که در آن  $U$  انرژی کرنشی سیستم مورد نظر،  $V$  انرژی پتانسیل بارهای خارجی،  $T$  انرژی جنبشی سیستم، و  $t_1$  و  $t_2$  دو لحظه دلخواه از زمان است. تغییرات انرژی کرنشی و انرژی جنبشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta U = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (5)$$

$$\delta T = \iiint_V \rho v_i \delta v_i dV \quad (6)$$

که در آن مؤلفه‌های تانسور تنش،  $\sigma_{ij}$  مؤلفه‌های تانسور کرنش، و  $v_i$  بردار سرعت‌اند و به صورت رابطه‌ی زیر بیان می‌شوند:

$$\vec{v} = v_i \vec{e}_i = [\dot{u}_x - \Omega(y + u_y)] \vec{e}_1 + [\dot{u}_y + \Omega(x + u_x)] \vec{e}_2 + \dot{u}_z \vec{e}_3 \quad (7)$$

با جایگذاری رابطه‌ی ۲ در رابطه‌ی ۵ و انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned} \delta U = b \int_0^L & \left[ -\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \psi_x - \frac{\partial L_x}{\partial x} \delta \phi_x - \frac{\partial P_x}{\partial x} \delta \eta_x \right. \\ & + N_z \delta v_z + \gamma M_z \delta \phi_z + Q_y \delta \psi_y - \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w + Q_x \delta \psi_x \\ & + \gamma R_x \delta \phi_x - \frac{\partial R_x}{\partial x} \delta \psi_z + \gamma S_x \delta \eta_x - \frac{\partial S_x}{\partial x} \delta \phi_z - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_y \\ & \left. - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta \psi_y \right] dx \end{aligned} \quad (8)$$

محدود) در محاسبه‌ی دقیق تنش‌های برون‌صفحه‌ی به کار گرفته‌اند.<sup>[۱۵]</sup> عده‌ی دیگر نیز به منظور ارضاء دقیق شرایط لبه‌ی آزاد و پیوستگی میدان جابه‌جایی و تنش‌های برون‌صفحه‌ی، روش اجزاء محدود هیبریدی را به کار گرفته‌اند.<sup>[۱۶]</sup>

اکثر تحلیل‌های انجام شده در مورد ورق‌های مرکب از نوع بارگذاری کششی بوده و حالت‌های دیگر هندسی و بارگذاری کمتر مورد مطالعه قرار گرفته است. در این پژوهش، تیر مرکب دوار با لایه‌گذاری دلخواه بررسی شده است. از جمله کاربردهای تیر دوار، ملخ چرخ‌بال (هلیکوپتر) یا پره‌های توربین بادی است.

در این نوشتار، با استفاده از یک روش ساده و یک میدان جابه‌جایی مناسب و به کمک اصل هامیلتون معادلات حرکت تیر دوار مرکب به دست آمده و سپس این معادلات به صورت تحلیلی حل شده است. نتایج به دست آمده، حاکی از وجود تنش‌های برون‌صفحه‌ی در نزدیکی لبه‌ی آزاد و محل تکیه‌گاه تیر است.

### روش تحقیق

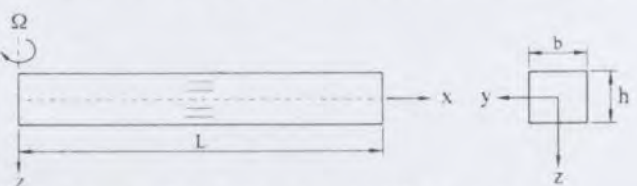
تیر دوار مرکبی را با لایه‌گذاری دلخواه، ضخامت  $h$ ، عرض  $b$  و طول  $L$  که از لایه‌های ارتوتروپیک تشکیل شده است در نظر می‌گیریم (شکل ۱). تیر با سرعت زاویه‌ی ثابت  $\Omega$  حول محور  $z$  دوران می‌کند. با توجه به این که میدان تنش در لبه‌ی آزاد و تکیه‌گاه تیر دوار سه‌بعدی است، استفاده از نظریه‌های کلاسیک برای بررسی مسئله مناسب به نظر نمی‌رسد. بنابراین باید از نظریه‌هایی استفاده کرد که در آنها امکان محاسبه‌ی تنش‌های میان‌لایه‌ی با دقت خوب وجود داشته باشد. میدان جابه‌جایی فرض شده از مرتبه‌ی سوم بوده و برای محاسبه‌ی دقیق تنش عمودی برون‌صفحه‌ی، تغییر ضخامت<sup>۹</sup> نیز در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} u_i(x, y, z, t) &= u_o(x, t) + z \psi_x(x, t) + z^2 \phi_x(x, t) + z^3 \eta_x(x, t) \\ u_y(x, y, z, t) &= v_o(x, t) + z \psi_y(x, t) \\ u_z(x, y, z, t) &= w(x, t) + z \psi_z(x, t) + z^2 \phi_z(x, t) \end{aligned} \quad (9)$$

در این رابطه،  $u_o$ ،  $v_o$  و  $w$  به ترتیب جابه‌جایی‌های صفحه‌ی میانی تیر در جهت  $x$ ،  $y$  و  $z$  هستند.

### روابط کرنش - جابه‌جایی

با جایگذاری میدان جابه‌جایی ۱ در روابط کرنش - جابه‌جایی خطی



شکل ۱. هندسه و بارگذاری تیر مرکب دوار با لایه‌گذاری دلخواه.



از آنجا که انتگرال گیری در کل ضخامت تیر انجام می شود، تغییرات انرژی پتانسیل بارهای خارجی برابر صفر خواهد بود. یعنی:

$$\delta V = 0 \quad (12)$$

با جایگذاری روابط ۸، ۱۰ و ۱۲ در اصل هامیلتون (رابطه ی ۴) معادلات حرکت به دست می آید:

$$\delta u_x: \frac{\partial N_x}{\partial x} = I_1 \ddot{u}_x + I_2 \ddot{\phi}_x - I_1 \Omega^T x - I_1 \Omega^T u_x - I_1 \Omega^T \phi_x - 2I_1 \Omega \dot{v}_x$$

$$\delta v_x: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_1 \ddot{v}_x - I_1 \Omega^T v_x + 2I_1 \Omega \dot{u}_x + 2I_1 \Omega \dot{\phi}_x$$

$$\delta w_x: \frac{\partial Q_x}{\partial x} = I_1 \ddot{w}_x + I_2 \ddot{\phi}_x$$

$$\delta \psi_x: \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = I_1 \ddot{\psi}_x + I_2 \ddot{\eta}_x - I_1 \Omega^T \psi_x - I_1 \Omega^T \eta_x - 2I_1 \Omega \dot{\psi}_y$$

$$\delta M_{xy}: \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = I_1 \ddot{\psi}_y - I_1 \Omega^T \psi_y + 2I_1 \Omega \dot{\psi}_x + 2I_1 \Omega \dot{\eta}_x$$

$$\delta \psi_z: \frac{\partial R_x}{\partial x} - N_z = I_1 \ddot{\psi}_z$$

$$\delta \phi_x: \frac{\partial L_x}{\partial x} - 2R_x = I_1 \ddot{u}_x + I_2 \ddot{\phi}_x - I_1 \Omega^T x - I_1 \Omega^T u_x - I_1 \Omega^T \phi_x - 2I_1 \Omega \dot{v}_x$$

$$\delta \phi_z: \frac{\partial S_x}{\partial x} - 2M_z = I_1 \ddot{w}_x + I_2 \ddot{\phi}_z$$

$$\delta \eta_x: \frac{\partial P_x}{\partial x} - 2S_x = I_1 \ddot{\psi}_x + I_2 \ddot{\eta}_x - I_1 \Omega^T \psi_x - I_1 \Omega^T \eta_x + 2I_1 \Omega \dot{\psi}_y \quad (13)$$

تغییر مکان ها و نیروهای عمومیت یافته ۱۰ در این نظریه چنین اند:

متغیرهای اولیه (اصلی):  $u_x, v_x, w, \psi_x, \psi_y, \psi_z, \phi_x, \phi_z, \eta_x$   
 متغیرهای ثانویه:  $N_x, N_{xy}, Q_x, M_x, M_{xy}, R_x, L_x, S_x, P_x$  (14)

با فرض این که سرعت زاویه یی تیر به آرامی به مقدار ثابت  $\Omega$  می رسد، عباراتی که دارای مشتقات زمانی اند، برابر با صفر خواهند بود. به علاوه عبارات باقی مانده در سمت راست معادلات ۱۳ در مقابل عبارات  $I_1 \Omega^T x$  و  $I_1 \Omega^T u_x$  قابل صرف نظر است. بنابراین روابط ۱۳ به صورت زیر ساده می شوند:

$$\delta u_x: \frac{dN_x}{dx} = -I_1 \Omega^T x, \quad \delta v_x: \frac{dN_{xy}}{dx} = 0,$$

$$\delta w_x: \frac{dQ_x}{dx} = 0, \quad \delta \psi_x: \frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0,$$

$$+ b [N_x \delta u_x]^L + b [M_x \delta \psi_x]^L + b [L_x \delta \phi_x]^L$$

$$+ b [P_x \delta \eta_x]^L + b [Q_x \delta w]^L + b [R_x \delta \psi_z]^L$$

$$+ b [S_x \delta \phi_z]^L + b [N_{xy} \delta v_x]^L + b [M_{xy} \delta \psi_y]^L$$

که در آن متوجه های تنش به صورت زیر تعریف شده اند:

$$[N_x, M_x, L_x, P_x] = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z [1, z, z^2, z^3] dz,$$

$$[N_{xy}, M_{xy}] = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} [1, z] dz,$$

$$[N_z, M_z] = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z [1, z] dz,$$

$$[Q_x, R_x, S_x] = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} [1, z, z^2] dz,$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz \quad (9)$$

همچنین با جایگذاری رابطه ی ۷ در رابطه ی ۶ داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt =$$

$$b \int_{t_1}^{t_2} \int_{-L}^L [ [-I_1 \ddot{u}_x - I_1 \ddot{\phi}_x + I_1 \Omega^T x + I_1 \Omega^T u_x + I_1 \Omega^T \phi_x + 2I_1 \Omega \dot{v}_x ] \delta u_x$$

$$+ [ -I_1 \ddot{v}_x + I_1 \Omega^T v_x - 2I_1 \Omega \dot{u}_x - 2I_1 \Omega \dot{\phi}_x ] \delta v_x + [ -I_1 \ddot{w}_x - I_1 \ddot{\phi}_z ] \delta w$$

$$+ [ -I_1 \ddot{\psi}_x - I_1 \ddot{\eta}_x + I_1 \Omega^T \psi_x + I_1 \Omega^T \eta_x + 2I_1 \Omega \dot{\psi}_y ] \delta \psi_x$$

$$+ [ -I_1 \ddot{\psi}_y + I_1 \Omega^T \psi_y - 2I_1 \Omega \dot{\psi}_x - 2I_1 \Omega \dot{\eta}_x ] \delta \psi_y - I_1 \ddot{\psi}_z \delta \psi_z$$

$$+ [ -I_1 \ddot{u}_x - I_1 \ddot{\phi}_x + I_1 \Omega^T x + I_1 \Omega^T u_x + I_1 \Omega^T \phi_x + 2I_1 \Omega \dot{v}_x ] \delta \phi_x$$

$$+ [ -I_1 \ddot{\psi}_x - I_1 \ddot{\eta}_x + I_1 \Omega^T \psi_x + I_1 \Omega^T \eta_x - 2I_1 \Omega \dot{\psi}_y ] \delta \eta_x$$

$$+ [ -I_1 \ddot{w}_x - I_1 \ddot{\phi}_z ] \delta \phi_z ] dx dt \quad (10)$$

در رابطه ی فوق ترم های اینرسی به صورت زیر است:

$$[I_1, I_2, I_3, I_4] = \int_{-h/2}^{h/2} \rho [1, z^2, z^4, z^6] dz \quad (11)$$

که در روابط فوق:

$$\begin{aligned} & [\bar{A}_{ij}, \bar{B}_{ij}, \bar{D}_{ij}, \bar{E}_{ij}, \bar{F}_{ij}, \bar{G}_{ij}, \bar{H}_{ij}] \\ & = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{ij} [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}] dz \quad (i, j = 1, 3, 6) \\ & [A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}] = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{ij} [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}] dz \\ & \quad (i, j = 4, 5) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_y: \frac{dM_{xy}}{dx} - Q_y &= 0, & \delta\psi_z: \frac{dR_x}{dx} - N_z &= 0, \\ \delta\phi_x: \frac{dL_x}{dx} - \gamma R_x &= -I_r \Omega^2 x, & \delta\phi_z: \frac{dS_x}{dx} - \gamma M_z &= 0, \\ \delta\eta_x: \frac{dP_x}{dx} - \gamma S_x &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

معادلات حاکم بر حرکت

برای به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت فرض می‌کنیم که تیر از لایه‌های ارتوتروپیک تشکیل شده باشد. بنابراین رابطه‌ی تنش-کرنش لایه‌ی  $k$ ام نسبت به محورهای مختصات  $x$ - $y$ - $z$  به صورت زیر است: [18]

$$\{\epsilon\}^{(k)} = [\bar{S}]^{(k)} \{\sigma\}^{(k)} \quad (16)$$

که در آن  $[\bar{S}]^{(k)}$  ماتریس نرمی در مختصات دوران یافته است. [18] برای به دست آوردن روابط تنش-کرنش تیر، با فرض این که در رابطه‌ی 16 داشته باشیم  $\sigma_y = 0$ ، معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta u_x: \bar{A}_{11} \frac{du_x}{dx} + \bar{A}_{16} \frac{dv_x}{dx} + \bar{B}_{11} \frac{d\psi_x}{dx} + \bar{B}_{16} \frac{d\psi_y}{dx} + \bar{A}_{13} \psi_z \\ + \bar{D}_{11} \frac{d\phi_x}{dx} + \gamma \bar{B}_{13} \phi_z + \bar{E}_{11} \frac{d\eta_x}{dx} = \frac{1}{\gamma} I_1 \Omega^2 [L^* - x^*] \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \delta v_x: \bar{A}_{16} \frac{du_x}{dx} + \bar{A}_{66} \frac{dv_x}{dx} + \bar{B}_{16} \frac{d\psi_x}{dx} + \bar{B}_{66} \frac{d\psi_y}{dx} + \bar{A}_{26} \psi_z \\ + \bar{D}_{16} \frac{d\phi_x}{dx} + \gamma \bar{B}_{26} \phi_z + \bar{E}_{16} \frac{d\eta_x}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \delta w: A_{00} \left[ \psi_x + \frac{dw}{dx} \right] + A_{\tau 0} \psi_y + B_{00} \left[ \gamma \phi_x + \frac{d\psi_z}{dx} \right] \\ + D_{00} \left[ \gamma \eta_x + \frac{d\phi_z}{dx} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_x: \bar{B}_{11} \frac{d^2 u_x}{dx^2} + \bar{B}_{16} \frac{d^2 v_x}{dx^2} - A_{00} \frac{dw}{dx} + \bar{D}_{11} \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} - A_{00} \psi_z \\ + \bar{D}_{16} \frac{d^2 \psi_y}{dx^2} - A_{\tau 0} \psi_y + [\bar{B}_{13} - B_{00}] \frac{d\psi_z}{dx} + \bar{E}_{11} \frac{d^2 \phi_x}{dx^2} \\ - \gamma B_{00} \phi_x + [\gamma \bar{D}_{13} - D_{00}] \frac{d\phi_z}{dx} + \bar{F}_{11} \frac{d^2 \eta_x}{dx^2} - \gamma D_{00} \eta_x = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{\tau\tau} & \bar{C}_{\tau 0} \\ \bar{C}_{\tau 0} & \bar{C}_{00} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (17)$$

با جایگذاری روابط 17 و 2 در رابطه‌ی 9 خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ L_x \\ P_x \\ N_z \\ M_z \\ N_{xy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{B}_{11} & \bar{D}_{11} & \bar{E}_{11} & \bar{A}_{13} & \bar{B}_{13} & \bar{A}_{16} & \bar{B}_{16} \\ \bar{B}_{11} & \bar{D}_{11} & \bar{E}_{11} & \bar{F}_{11} & \bar{B}_{13} & \bar{D}_{13} & \bar{B}_{16} & \bar{D}_{16} \\ \bar{D}_{11} & \bar{E}_{11} & \bar{F}_{11} & \bar{G}_{11} & \bar{D}_{13} & \bar{E}_{13} & \bar{D}_{16} & \bar{E}_{16} \\ \bar{E}_{11} & \bar{F}_{11} & \bar{G}_{11} & \bar{H}_{11} & \bar{E}_{13} & \bar{F}_{13} & \bar{E}_{16} & \bar{F}_{16} \\ \bar{A}_{13} & \bar{B}_{13} & \bar{D}_{13} & \bar{E}_{13} & \bar{A}_{\tau\tau} & \bar{B}_{\tau\tau} & \bar{A}_{\tau 6} & \bar{B}_{\tau 6} \\ \bar{B}_{13} & \bar{D}_{13} & \bar{E}_{13} & \bar{F}_{13} & \bar{B}_{\tau\tau} & \bar{D}_{\tau\tau} & \bar{B}_{\tau 6} & \bar{D}_{\tau 6} \\ \bar{A}_{16} & \bar{B}_{16} & \bar{D}_{16} & \bar{E}_{16} & \bar{A}_{\tau 6} & \bar{B}_{\tau 6} & \bar{A}_{\phi\phi} & \bar{B}_{\phi\phi} \\ \bar{B}_{16} & \bar{D}_{16} & \bar{E}_{16} & \bar{F}_{16} & \bar{B}_{\tau 6} & \bar{D}_{\tau 6} & \bar{B}_{\phi\phi} & \bar{D}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^* \\ \kappa_x^* \\ \kappa_1^* \\ \kappa_1^* \\ \kappa_1^* \\ \epsilon_y^* \\ \kappa_y^* \\ \epsilon_z^* \\ \kappa_z^* \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \\ R_x \\ S_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\tau\tau} & A_{\tau 0} & B_{\tau 0} & D_{\tau 0} \\ A_{\tau 0} & A_{00} & B_{00} & D_{00} \\ B_{\tau 0} & B_{00} & D_{00} & E_{00} \\ D_{\tau 0} & D_{00} & E_{00} & F_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_y^* \\ \epsilon_0^* \\ \kappa_0^* \\ \kappa_0^* \end{Bmatrix} \quad (18)$$



ضرایب ثابت است، و به همین دلیل به راحتی قابل تبدیل به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه یک با ضرایب ثابت است. از آنجا که روش تحلیلی حل این نوع معادلات با هر نوع ترکیبی از شرایط مرزی (ر.ک. متغیرهای اولیه و ثانویه معادله ۱۴) در کتاب‌های معادلات دیفرانسیل و کنترل خطی موجود است<sup>[۱۹]</sup>، جزئیات حل آنها را در این نوشتار شرح نداده‌ایم.

### تحلیل و بررسی نتایج

برای تمامی نتایج عددی ارائه شده، تیرهایی با ضخامت  $10\text{ mm}$  نسبت طول به ضخامت  $(L/h)$  برابر ۲۰ و لایه گذاری‌هایی به صورت  $[90^\circ/90^\circ]_5$ ،  $[90^\circ/0^\circ]_5$  و  $[10^\circ/30^\circ]_5$  در نظر گرفته شده است. تمام لایه‌ها از جنس گرافیت-اپوکسی  $T300/5208$  با خواص مکانیکی زیر در نظر گرفته شده‌اند:<sup>[۱۸]</sup>

$$\begin{aligned} E_1 &= 122\text{ GPa}, & E_T &= E_T = 10/8\text{ GPa}, \\ G_{12} &= G_{13} = 5/65\text{ GPa}, & G_{23} &= 0/49\text{ Msi} = 3/28\text{ GPa}, \\ \nu_{12} &= \nu_{13} = 0/24, & \nu_{23} &= 0/59, \\ \rho &= 1/54\text{ g/cm}^3 \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن ۱ موازی با امتداد فیبرها، ۲ عمود بر امتداد فیبرها، و ۳ در امتداد ضخامت لایه است. شرایط مرزی در نظر گرفته شده به شرح زیر است:

$$1\text{- تیر دوار گیردار در } x=0 \text{ و آزاد در } x=L$$

$$\begin{aligned} u_0 = v_0 = w_0 = \psi_x = \psi_y = \psi_z = \phi_x = \phi_z = \eta_x = 0 & \quad x=0 \text{ در} \\ N_x = N_{xy} = Q_x = M_x = M_{xy} = R_x = L_x = S_x = P_x = 0 & \quad x=L \text{ در} \end{aligned} \quad (22)$$

$$2\text{- تیر دوار به طول } 2L \text{ و لبه‌های آزاد در } x=\pm L$$

$$\begin{aligned} u_0 = v_0 = w_0 = \psi_x = \psi_y = R_x = \phi_x = S_x = \eta_x = 0 & \quad x=0 \text{ در} \\ N_x = N_{xy} = Q_x = M_x = M_{xy} = R_x = L_x = S_x = P_x = 0 & \quad x=L \text{ در} \end{aligned} \quad (23)$$

برای به دست آوردن تنش‌های بسوزن صفحه‌یی، شکل انتگرال‌گیری شده‌ی معادلات موضعی حرکت در راستای ضخامت تیر مورد استفاده قرار گرفته است و این نتایج با حل سه بعدی اجزاء محدود (نرم‌افزار ANSYS) مقایسه شده است. به علت دقیق بودن نتایج این نظریه در لایه‌ی میانی تیر و نیز کاهش دقت جواب‌ها با حرکت از لایه‌ی میانی به سوی سطوح بالایی و پایینی، تمامی نمودارها در راستای محوری سطح مشترک لایه‌ی اول و لایه‌ی دوم تیر رسم شده است. در نتایج عددی، متغیرهای بی‌بعد مورد استفاده عبارتند از: طول بی‌بعد  $x/L$  و تنش‌های عمودی و برشی بی‌بعد  $(\bar{\sigma}_z, \bar{\sigma}_{xz}) = (\sigma_z, \sigma_{xz}) / (\rho\Omega^2 Lh)$

$$\begin{aligned} \delta\psi_y: \bar{B}_{15} \frac{d^2 u_x}{dx^2} + \bar{B}_{16} \frac{d^2 v_x}{dx^2} - A_{10} \frac{dw}{dx} + \bar{D}_{15} \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} - A_{10} \psi_x \\ + \bar{D}_{16} \frac{d^2 \psi_y}{dx^2} - A_{11} \psi_y + \bar{E}_{15} \frac{d^2 \phi_x}{dx^2} + [\bar{B}_{17} - \bar{B}_{10}] \frac{d\psi_z}{dx} \\ - 2\bar{B}_{10} \phi_x + [2\bar{D}_{17} - \bar{D}_{10}] \frac{d\phi_z}{dx} + \bar{F}_{15} \frac{d^2 \eta_x}{dx^2} - 3\bar{D}_{10} \eta_x = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

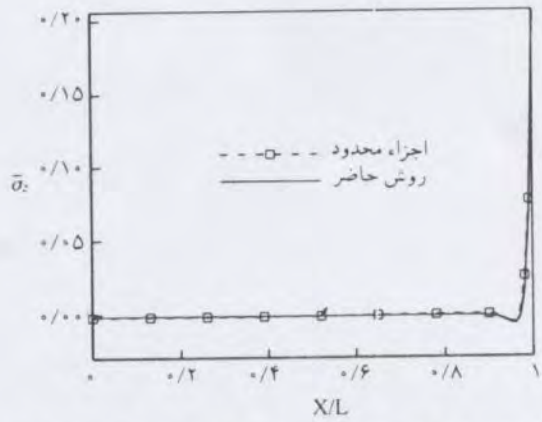
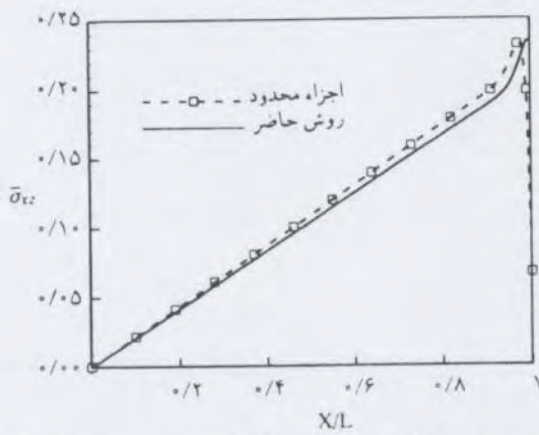
$$\begin{aligned} \delta\psi_z: -\bar{A}_{12} \frac{du_x}{dx} - \bar{A}_{13} \frac{dv_x}{dx} + B_{00} \frac{d^2 w}{dx^2} + [B_{00} - \bar{B}_{12}] \frac{d\psi_x}{dx} \\ [B_{10} - \bar{B}_{17}] \frac{d\psi_y}{dx} + D_{00} \frac{d^2 \psi_z}{dx^2} - \bar{A}_{12} \psi_z \\ + [2D_{00} - \bar{D}_{12}] \frac{d\phi_x}{dx} + E_{00} \frac{d^2 \phi_z}{dx^2} - 2\bar{B}_{10} \phi_x \\ + [3E_{00} - \bar{E}_{12}] \frac{d\eta_x}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \delta\phi_x: \bar{D}_{11} \frac{d^2 u_x}{dx^2} + \bar{D}_{12} \frac{d^2 v_x}{dx^2} - 2\bar{B}_{00} \frac{dw}{dx} + \bar{E}_{11} \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} - 2\bar{B}_{00} \psi_x \\ + \bar{E}_{12} \frac{d^2 \psi_y}{dx^2} - 2\bar{B}_{10} \psi_y + \bar{F}_{11} \frac{d^2 \phi_x}{dx^2} + \\ [\bar{D}_{12} - 2\bar{D}_{00}] \frac{d\psi_z}{dx} - 4\bar{D}_{00} \phi_x + 2[\bar{E}_{12} - E_{00}] \frac{d\phi_z}{dx} \\ + \bar{G}_{11} \frac{d^2 \eta_x}{dx^2} - 6E_{00} \eta_x = -I_T \Omega^2 x \end{aligned} \quad (7.20)$$

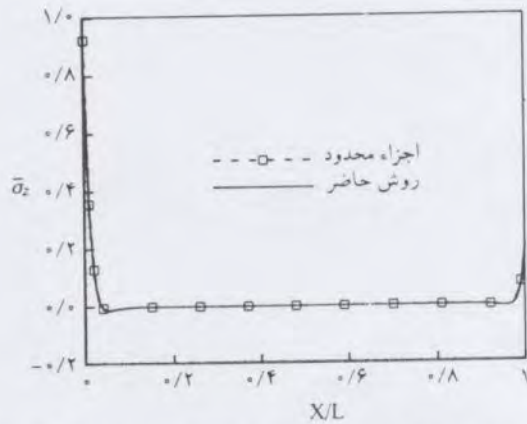
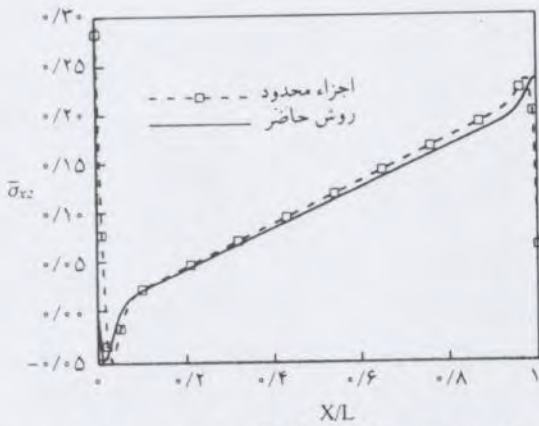
$$\begin{aligned} \delta\phi_z: -2\bar{B}_{12} \frac{du_x}{dx} - 2\bar{B}_{13} \frac{dv_x}{dx} + D_{00} \frac{d^2 w}{dx^2} + [D_{00} - 2\bar{D}_{12}] \frac{d\psi_x}{dx} \\ + [D_{10} - 2\bar{D}_{17}] \frac{d\psi_y}{dx} - 2\bar{B}_{10} \psi_z + E_{00} \frac{d^2 \psi_z}{dx^2} \\ + 2[E_{00} - \bar{E}_{12}] \frac{d\phi_x}{dx} + F_{00} \frac{d^2 \phi_z}{dx^2} - 4\bar{D}_{10} \phi_x \\ + [3F_{00} - 2\bar{F}_{12}] \frac{d\eta_x}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$\begin{aligned} \delta\eta_x: \bar{E}_{11} \frac{d^2 u_x}{dx^2} + \bar{E}_{12} \frac{d^2 v_x}{dx^2} - 3\bar{D}_{00} \frac{dw}{dx} + \bar{F}_{11} \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} - 3\bar{D}_{00} \psi_x \\ + \bar{F}_{12} \frac{d^2 \psi_y}{dx^2} - 3\bar{D}_{10} \psi_y + \bar{G}_{11} \frac{d^2 \phi_x}{dx^2} + [\bar{E}_{12} - 3E_{00}] \frac{d\psi_z}{dx} \\ - 6E_{00} \phi_x + [2\bar{F}_{12} - 3F_{00}] \frac{d\phi_z}{dx} + \bar{H}_{11} \frac{d^2 \eta_x}{dx^2} - 9F_{00} \eta_x = 0 \end{aligned} \quad (9.20)$$

در معادلات ۱.۲۰ تا ۳.۲۰ پس از یک بار انتگرال‌گیری، شرایط مرزی  $N_x = N_{xy} = Q_x = 0$  در  $x=L$  اعمال شده است. یادآور می‌شویم که این معادلات از نوع دیفرانسیل معمولی با



شکل ۲. توزیع تنش‌های  $\bar{\sigma}_z$  و  $\bar{\sigma}_{xz}$  در راستای محوری سطح مشترک لایه‌ی اول و لایه‌ی دوم تیر دوار با لایه گذاری  $[\theta/90]_2$  به طول  $2L$  و لبه‌های آزاد در  $x = \pm L$ .



شکل ۳. توزیع تنش‌های  $\bar{\sigma}_z$  و  $\bar{\sigma}_{xz}$  در راستای محوری سطح مشترک لایه‌ی اول و لایه‌ی دوم تیر دوار با لایه گذاری  $[\theta/90]_2$  و شرایط مرزی گیردار در  $x = 0$  و آزاد در  $x = L$ .

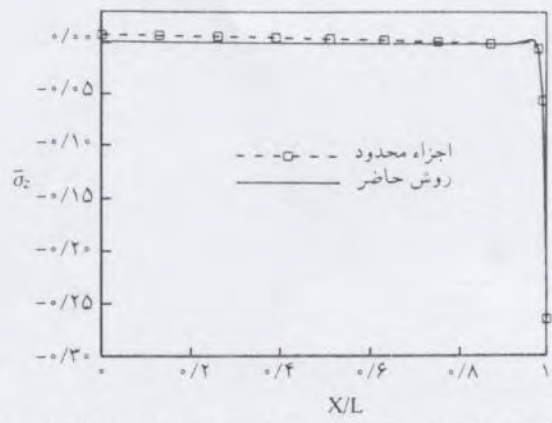
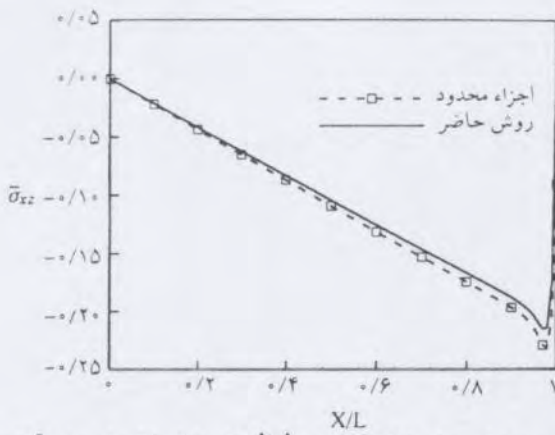
لبه‌ی آزاد صفر نمی‌شود و اختلاف نتایج با حل اجزاء محدود نسبتاً زیاد است. با توجه به این که نظریه‌ی استفاده شده یک تک‌لایه‌ی معادل است، نباید انتظار داشت که تنش‌های برون‌صفحه‌ی با دقت بالایی در لایه‌هایی به جز لایه‌ی میانی تیر محاسبه شود. این نظریه‌ها قدرت پیش‌بینی پاسخ‌های کلی نظیر خیز، فرکانس‌های طبیعی، بار کماتش و... را دارند، ولی قادر به پیش‌بینی دقیق متغیرهای محلی مانند میدان سه‌بعدی تنش نیستند. برای افزایش دقت نتایج می‌توان از نظریه‌های دقیق‌تری مانند Layerwise استفاده کرد.

شکل ۳ نیز توزیع تنش‌های بین لایه‌ی بی و  $\bar{\sigma}_{xz}$  در راستای محوری سطح مشترک لایه‌ی اول و لایه‌ی دوم تیر دوار با لایه گذاری  $[\theta/90]_2$  و با شرایط مرزی گیردار در  $x = 0$  و آزاد در  $x = L$  را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج در نزدیکی لبه‌ی آزاد مشابه شکل ۲ است، اما تنش‌های بین لایه‌ی بی و برون‌صفحه‌ی محدود به لبه‌ی آزاد تیر نیست و در هر محلی که ناپیوستگی فیزیکی موجود

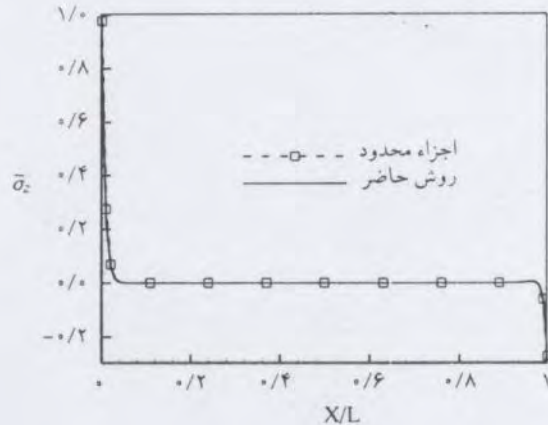
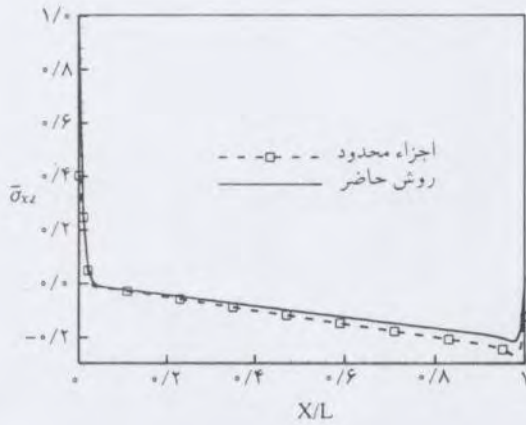
شکل ۲ توزیع تنش‌های بین لایه‌ی بی و  $\bar{\sigma}_{xz}$  در راستای محوری سطح مشترک لایه‌ی اول و لایه‌ی دوم تیر دوار با لایه‌گذاری  $[\theta/90]_2$  را نشان می‌دهد. تیر در نظر گرفته شده به طول  $2L$  و با لبه‌های آزاد در  $x = \pm L$  است. با توجه به شکل، در نزدیکی لبه‌ی آزاد تیر (لایه‌ی مرزی) تنش‌های برون‌صفحه‌ی ایجاد می‌شود و طول این ناحیه در حدود ضخامت تیر است. همچنین دیده می‌شود که تنش برون‌صفحه‌ی بی در ناحیه‌ی درونی تیر برابر صفر نیست و در فاصله‌های دور از لبه به صورت خطی تغییر می‌کند. در نتیجه تیر دوار یک مسئله‌ی تنش صفحه‌ی بی نیست.

از مقایسه‌ی نتایج به دست آمده از این نظریه با نتایج به دست آمده از حل معادلات سه‌بعدی کشسان به روش اجزاء محدود، نتیجه می‌گیریم که تطابق نتایج در ناحیه‌ی درونی تیر در مورد هر دو مؤلفه‌ی  $\bar{\sigma}_z$  و  $\bar{\sigma}_{xz}$  خوب است. تطابق جواب‌ها در مورد  $\bar{\sigma}_z$  در لایه‌ی مرزی نیز خوب است، اما مؤلفه‌ی  $\bar{\sigma}_{xz}$  طی نظریه‌ی بسط داده شده، در

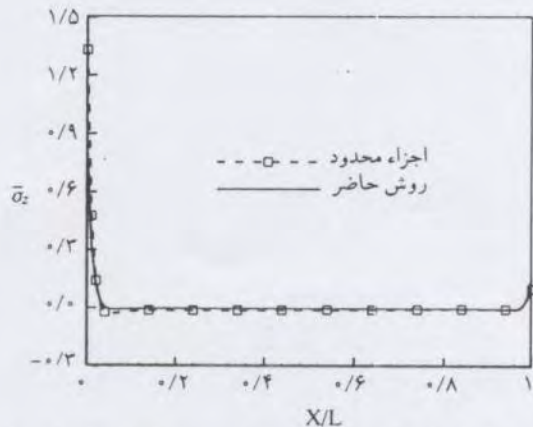
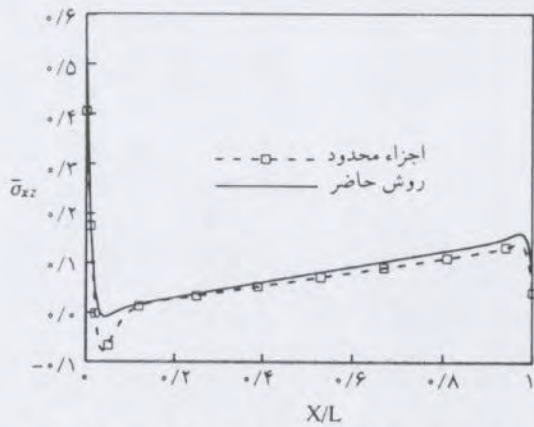




شکل ۴. توزیع تنش‌های  $\bar{\sigma}_{xz}$  و  $\bar{\sigma}_z$  در راستای محوری سطح مشترک لایه‌ی اول و لایه‌ی دوم تیر دوار با لایه گذاری  $[\theta/90^\circ]$  به طول  $2L$  و لبه‌های آزاد در  $x = \pm L$



شکل ۵. توزیع تنش‌های  $\bar{\sigma}_{xz}$  و  $\bar{\sigma}_z$  در راستای محوری سطح مشترک لایه‌ی اول و لایه‌ی دوم تیر دوار با لایه گذاری  $[\theta/90^\circ]$  و شرایط مرزی گیردار در  $x = 0$  و آزاد در  $x = L$



شکل ۶. توزیع تنش‌های  $\bar{\sigma}_{xz}$  و  $\bar{\sigma}_z$  در راستای محوری سطح مشترک لایه‌ی اول و لایه‌ی دوم تیر دوار با لایه گذاری  $[\theta/30^\circ]$  و شرایط مرزی گیردار در  $x = 0$  و آزاد در  $x = L$

$[\theta/30^\circ]$  را برای دو نوع شرایط مرزی ذکر شده در رابطه‌های ۲۲ و ۲۳ نشان می‌دهد. در این نتیجه‌ها نیز تنش‌های بیرون‌صفحه‌یی در لبه‌ی آزاد تیر مشهود است و تطابق خوبی بین نتایج این نظریه با تحلیل اجزاء محدود مشاهده می‌شود. در حالتی که تیرها در  $x = 0$

باشد، این تنش‌ها ایجاد می‌شود. به همین لحاظ نام‌گذاری این اثرها به «اثرهای لبه‌آزاد» صحیح نیست.

شکل‌های ۴ تا ۶ تنش‌های برشی و عمودی بین لایه‌یی در راستای سطح مشترک لایه‌ی اول و لایه‌ی دوم تیرهای  $[\theta/90^\circ]$  و

نتایج نشانگر دقت و صحت این نظریه در پیش‌بینی تنش‌های برون‌صفحه‌یی است. نتایج نشان می‌دهد تنش‌های برون‌صفحه‌یی محدود به لبه‌ی آزاد تیر نیست، بلکه تنش‌های بزرگی نیز در محل تکیه‌گاه ایجاد می‌شود.

به‌طور کلی می‌توان گفت وجود ناپیوستگی مادی در مرزهای تیر منجر به ایجاد تنش‌های بین‌لایه‌یی می‌شود. همچنین به دلیل غیرهمگن بودن تیر در جهت ضخامت و در نظر گرفتن نیروهای جسمی، فرض تنش صفحه‌یی معتبر نیست (شکل‌های ۲ تا ۶).

دارای شرط مرزی گیردارند. تنش‌های برون‌صفحه‌یی نسبتاً بزرگی در تکیه‌گاه تیر ایجاد می‌شوند. همچنین تنش برشی  $\sigma_{xz}$  در ناحیه‌ی درونی تیر صفر نیست و به‌صورت خطی تغییر می‌کند.

### نتیجه‌گیری

در این نوشتار ضمن بررسی توزیع تنش در تیر مرکب دوار با لایه‌گذاری دلخواه با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه سوم تیر، نتایج به دست آمده از این روش با روش اجزاء محدود مقایسه شد. تطبیق

### پانوشته‌ها

- Wang, S.S. and Choi, I. "Boundary-layer effects in composite laminates: Part 1- Free-edge stress singularities", *J. of Appl. Mech.*, **49**, pp. 541-548 (1982).
- Wang, S.S. and Choi, I. "Boundary-layer effects in composite laminates: Part 1- Free-edge stress solutions and basic characteristics", *J. of Appl. Mech.*, **49**, pp. 549-560 (1982).
- Kassapoglou, C. and Lagace, P.A. "An efficient method for the calculation of interlaminar stresses in composite materials", *J. of Appl. Mech.*, **53**, pp. 744-750 (1986).
- Rose, C.A. and Herakovich, C.T. "An approximate solution for interlaminar stresses in composite laminates", *Compos. Eng.*, **3** (3), pp. 271-285 (1993).
- Yang, H.T.Y. and He, C.C. "Three-dimensional finite element analysis of free edge stresses and delamination of composite laminates", *J. of Compos. Mater.*, **28**(15), pp. 1394-1412 (1994).
- Gaudenzi, P., Mannini, A., and Carbonaro, R. "Multi-layer higher-order finite elements for the analysis of free-edge stresses in composite laminates", *int. J. for Numer. Meth in Eng.*, **41**, pp. 851-873 (1998).
- Lessard, L.B., Schmidt, A.S., and Shokrieh, M.M. "Three-dimensional stress analysis of free-edge effects in a simple composite cross-ply laminate", *int. J. Solids Struct.*, **33**(15), pp. 2243-2259 (1996).
- Robbins, D.H. and Reddy, J.N. "Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory", *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, **36**, pp. 655-677 (1993).
- Spilker, R.L. and Chou, S.C. "Edge effects in symmetric composite laminates: importance of satisfying the traction-free-edge condition", *J. of Compos. Mater.*, **14**, pp. 2-20 (1980).
- Fung, Y.C. "Foundation of Solid Mechanics", *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey* (1965).
- Herakovich, C.T. "Mechanics of fibrous composites", *John Wiley & Sons, Inc., USA* (1998).
- Gopal, M. "Modern control system theory", *New Age International (P) Limited, Publishers, 2nd Edn.* (1993).

- composite structures
- third-order shear deformation theory
- Hamilton's principle
- boundary conditions
- elasticity
- delamination
- isotropic
- coupling
- thickness stretching
- generalized displacements and generalized forces
- Free-edge effects

### منابع

- Kant, T. and Swaminathan, K. "Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites-a selective review and survey of current developments", *Composite Structures*, **49**, pp. 65-76 (2000).
- Puppo, A.H., and Evensen, H.A. "Interlaminar shear in laminated composites under generalized plane stress", *J. of Compos. Mater.*, **4**, pp. 204-220 (1970).
- Pipes, R.B. and Pagano, N.J. "Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension." *J. of compos. mater.*, **4**, pp. 538-548 (1970).
- Pagano, N.J., "On the calculation of interlaminar normal stress in composite laminate", *J. of compos. mater.*, **8**, pp. 65-81 (1974).
- Hsu, P.W. and Herakovich, C.T. "Edge effects in angle-ply composite laminates", *J. of Compos. Mater.*, **11**, pp. 422-428 (1977).
- Tang, S. and Levy, A. "A boundary layer theory: part II: extension of laminated finite strip", *J. of Compos. Mater.*, **9**, pp. 42-52 (1975).
- Pipes, R.B. and Pagano, N.J. "Interlaminar stresses in composite laminates-an approximate elasticity solution", *J. of Appl. Mech.* **41**, pp. 668-672 (1974).