

تحلیل الاستیک و الاستیک - پلاستیک تغییر شکل های بزرگ به روش اجزاء محدود لاگرانژی همگرد*

مهرداد جبارزاده^(۱) رضا نقد آبادی^(۲) مسعود طهانی^(۳)

چکیده در این مقاله روش اجزاء محدود لاگرانژی همگرد برای تحلیل مسائل غیر خطی هندسی و مادی، با به کارگیری المان های سه بعدی و تغییر شکل یافته پوسته، ارائه شده است. در این تحلیل از روش لاگرانژی بهنگام همراه با همه عبارات های خطی و غیر خطی کرنش گرین-لاگرانژ، برای حذف تقریب محاسبه تنش کوشی در فرمول بندی اجزاء محدود استفاده شده است. برای تحلیل غیر خطی مادی، رفتار ماده در محدوده پلاستیک با کار سختی خطی مدل سازی شده و همچنین قاعده سیلان پراوتل-راس و معیار تسلیم فون میسز مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاده از فرمول بندی مورد نظر، مثال هایی برای تغییر شکل های بزرگ الاستیک و الاستیک-پلاستیک به کمک المان های سه بعدی و تغییر شکل یافته پوسته تحلیل شده و با نتایج دیگر روش های همگرد مقایسه شده است.

واژه های کلیدی المان سه بعدی، المان تغییر شکل یافته پوسته، اجزاء محدود همگرد، الاستیک - پلاستیک.

Corotational Lagrangian Formulation for Elastic and Elastic-Plastic Large Deformation Analysis Using FEM

M. Jabbarzadeh

R. Naghdabadi

M. Tahani

Abstract In this paper, a corotational Lagrangian finite element method is presented to analyze the geometric and material nonlinearity problems using degenerated shell and solid elements. The formulation is based on the updated - Lagrangian conjugate stress and strain tensors with the linear and nonlinear terms to eliminate the approximation of the Cauchy stress in the finite element formulation. Linear work hardening and Prandtl-Reuss flow rule along with von-Mises yield criterion is used to model material nonlinearity. To investigate the accuracy and computational efficiency of the formulation, some examples in elastic and elastic-plastic regime is presented. Also, the results obtained from this method are compared with those available using other corotational finite element formulations.

Key Words Solid Element, Degenerated Shell Element, Corotational Finite Element, Elastic-Plastic.

* نسخه اولیه مقاله در تاریخ ۸۳/۴/۲۷ و نسخه نهایی آن در تاریخ ۸۴/۷/۱۶ به دفتر نشریه رسیده است.

(۱) دانشجوی دوره دکترا، واحد علوم و تحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی - عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

(۲) دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

(۳) استادیار، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

مقدمه

گسترش رور افزون استفاده از روش های اجزاء محدود برای تحلیل قطعات زیر بار، افزایش دقت این تحلیل ها را ضروری می سازد. هنگامی که تغییر شکل ها از مقدار مشخصی بیشتر شود، انجام تحلیل های غیرخطی الزامی می باشد. بدین منظور روش های مختلفی برای تحلیل های غیرخطی ارائه گردیده است [1,2]. از آنجا که تحلیل های غیرخطی به صورت نموی انجام می شوند و همچنین به خاطر ساده سازی های مورد استفاده در فرمولبندی اجزاء محدود، تعداد نمو های مورد استفاده برای این گونه تحلیل ها افزون بر تأثیر بر زمان، بر دقت محاسبات نیز مؤثرند. ساده سازی های مورد استفاده باعث تأثیر دوران های صلب گونه بر نتایج محاسبات می گردد. برای کاهش اثر این ساده سازی ها دو روش مورد استفاده قرار می گیرد: ۱- افزایش تعداد نمو ها به صورتی که مقدار دوران های صلب گونه به ازاء هر نمو مقدار ناچیزی شود که در این صورت از فرمولبندی خطی اجزاء محدود استفاده می گردد. اشکال این روش افزایش زیاد زمان محاسبات است ۲- استفاده از روش هایی که اثر دوران های صلب گونه را در هر نمو از محاسبات حذف نماید؛ این روش ها، روش های همگرد نامیده می شوند.

روش های همگرد در ابتدا توسط Wempner [3] و Belytschko و همکارش [4] ارائه گردید. در آغاز روش های ارائه شده به سینماتیک المان وابسته بود که روش های "consistent formulation" نامیده شد [5,6,7]. در این روش ها فرمولبندی های همگرد برای هر نوع المان به صورت مجزا ارائه می شد. Rankin و Brogan [8] مفهوم دیگری از فرمولبندی همگرد ارائه دادند که بر مبنای فرمولبندی مستقل از سینماتیک المان پایه ریزی شده بود. این روش بر پایه تجزیه قطبی در

نقاط انتگرال گیری المان استوار می باشد. در این روش به کمک تجزیه قطبی، دوران های صلب گونه از تغییر شکل خالص جدا می گردد و محور مختصات محلی متصل به نقاط انتگرال گیری به اندازه دوران های صلب گونه المان دوران یافته و کرنش ها نسبت به مختصات دوران یافته محاسبه می شود. این روش مختص مسائل کرنش کوچک می باشد. Moita و Crisfield [9] بر همین اساس روابطی برای تحلیل های دو بعدی و سه بعدی ارائه دادند با این تفاوت که در روش آنها فقط از یک محور مختصات محلی در مرکز المان استفاده شده و تجزیه قطبی فقط در این نقطه انجام می شود.

محققان با استفاده از روش های یاد شده سعی بر آن دارند تا با تغییراتی که در ماتریس سختی فرمولبندی تغییر شکل های بزرگ ایجاد می کنند، تأثیر تقریب مورد استفاده در فرمولبندی غیر خطی را در محاسبات کاهش دهند. خلاصه ای از روش های همگرد ارائه شده توسط محققان در مرجع [10] ارائه گردیده است.

نقدآبادی و جبارزاده [11] برای حذف اثرات تغییر شکل های صلب گونه بر تنش ها روش دیگری ارائه کرده اند. روش یاد شده بر استفاده از تانسورهای لاگرانژی استوار می باشد. کرنش های لاگرانژی همچون کرنش گرین - لاگرانژ و کرنش بيو (Biot Stress)، خود و نرخ مادیشان همگرد هستند. دوران های صلب گونه بر نتایج محاسبات تنش ها و کرنش های لاگرانژی اثر نمی گذارند و حال آنکه نرخ مادی کرنش های اوپلری غیر همگرد می باشند. برای هدف مورد نظر می توان از جفت تنش و کرنش گرین - لاگرانژ و تنش پیولا - کیرشهف دوم استفاده نمود که افزون بر همگرد بودن از نظر انرژی نیز مزدوج (Energetically conjugate pair) [12] می باشند. با این عمل می توان با کاهش تعداد

جفت تنش پیولا- کیرشسف دوم و کرنش گرین- لاگرانژ که از نظر انرژی مزدوج هستند، به صورت زیر می‌باشد:

$$\int_{V^t} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} \quad (1)$$

برای آنکه رابطه (1) به صورت ماتریسی نوشته شود از روابط نموی زیر استفاده می‌شود:

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t \sigma_{ij} + \Delta t S \quad (2)$$

$$\Delta t S_{ij} \approx C_{ijkl} \Delta t \epsilon_{kl} \quad (3)$$

به خاطر استفاده از تقریب رابطه (3) دوران‌های صلب گونه بر تنش‌ها اثر می‌گذارند. به همین دلیل استفاده از روش‌های همگرد برای از بین بردن این اثرات باعث افزایش دقت و کاهش زمان محاسبات می‌شود. با استفاده از روابط نموی یاد شده، معادلات تعادل به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\int_{V^t} {}^t C_{ijkl} \epsilon_{kl} \delta {}^t \epsilon_{ij} dV + \int_{V^t} {}^t \sigma_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} - \int_{V^t} {}^t \sigma_{ij} \delta {}^t \epsilon_{ij} dV \quad (4)$$

فرمولبندی کلی اجزاء محدود، برای تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ به روش لاگرانژی بهنگام با توجه به رابطه (4) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$({}^t K_L + {}^t K_{NL}) \Delta u^{(i)} = {}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \quad (5)$$

در رابطه (5) ماتریس‌های سختی خطی و غیر خطی و همچنین بردار نیروهای داخلی به صورت زیر محاسبه می‌شود [13]:

نموها زمان محاسبات را کاهش داد بدون آنکه از دقت محاسبات کاسته شود.

در این مقاله برای تحلیل‌های غیرخطی نخست فرمولبندی همگرد به کمک روش لاگرانژی بهنگام ارائه گردیده و سپس فرمولبندی همگرد برای تحلیل پوسته‌ها به کمک المان تغییر شکل یافته ارائه می‌گردد. برای این منظور از تمامی عبارات‌های نمو کرنش گرین- لاگرانژ در هر تکرار استفاده می‌شود. همچنین در ادامه فرمولبندی مورد لزوم برای تحلیل الاستیک - پلاستیک مسائل ارائه گردیده است. برای نشان دادن دقت و کارایی روش همگرد سه دسته مثال ارائه شده است ۱- مثال‌های تغییر شکل بزرگ الاستیک. در این قسمت مثال‌هایی به کمک المان تغییر شکل یافته پوسته و المان سه بعدی ارائه شده و با نتایج دیگر روش‌های همگرد مقایسه شده است. همچنین پدیده پرش که یکی از مسائل پیچیده در تحلیل‌های غیر خطی بوده و با دوران‌های صلب گونه زیادی همراه می‌باشد، برای نشان دادن دقت بالای روش ارائه شده تحلیل گردیده است. ۲- مثال‌های تغییر شکل بزرگ الاستیک - پلاستیک. در این قسمت مثال‌های در محدوده پلاستیک مدل سازی شده با کار سختی خطی همراه با قاعده سیلان پراوتل- راس و معیار تسلیم فون میسز مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته شده است. ۳- در انتها برای نشان دادن تأثیر روش همگرد مورد نظر در کاهش زمان و با حفظ دقت محاسبات مثال‌هایی ارائه گردیده است.

فرمولبندی اجزاء محدود لاگرانژی همگرد
در تحلیل‌های غیر خطی به روش اجزاء محدود از روش کار مجازی برای بیان تعادل جسم در آرایش جاری استفاده می‌گردد. بیان ریاضی این اصل به کمک

فرمولبندی لاگرانژی همگرد برای المان تغییر شکل یافته پوسته (Degenerated shell element). از میان المان‌های پیشنهاد شده برای تحلیل پوسته‌ها، المان تغییر شکل یافته پوسته بیشتر مورد توجه می‌باشد. المان یاد شده دارای هشت گره با پنج درجه آزادی در هر گره است. این المان با انتقال جابه‌جایی گره‌های یک المان آجری بیست گره‌ای به کمک بردارهای عمود بر سطح به درجات آزادی سطوح میانی المان پوسته، ایجاد می‌گردد.

مولفه‌های جابه‌جایی و مختصات عمومی هر نقطه از المان بر حسب مولفه‌های جابه‌جایی و مختصات گره‌های سطح میانی پوسته به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 f_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 f_i \zeta(t_i/2) \mu_i \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 f_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 f_i \zeta(t_i/2) \begin{Bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

برای محاسبه ماتریس‌های کرنش تغییر مکان خطی و غیرخطی، محاسبه مشتق تغییر مکان‌ها نسبت به محور مختصات مورد نیاز می‌باشد، بنابراین ابتدا باید از رابطه (۱۵) نسبت به مختصات محلی مشتق گرفته و سپس به کمک ماتریس جاکوبین طبق رابطه زیر مشتق نسبت به محور مختصات محاسبه گردد:

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ \dots \\ w_{,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J^* & 0 & 0 \\ 0 & J^* & 0 \\ 0 & 0 & J^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ \dots \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix} = B_{NL} U \quad (17)$$

$${}^t K_L = \int_{V'} {}^t B_L^T C_i {}^t B_L dV \quad (6)$$

$${}^t K_{NL} = \int_{V'} {}^t B_{NL}^T \sigma_i {}^t B_{NL} dV \quad (7)$$

$${}^{t+\Delta t} F = \int_{V'} {}^t B_L^T \sigma dV \quad (8)$$

به منظور همگرد نمودن روابط اجزاء محدود به کمک روش لاگرانژی همگرد، باید مولفه‌های کرنش را در هر تکرار به طور کامل برحسب عبارت‌های خطی و غیر خطی اصلاح نمود. با توجه به تعریف نمو کرنش گرین- لاگرانژی، کرنش یاد شده به صورت زیر به بخش‌های خطی و غیر خطی تجزیه می‌شود:

$$\Delta t \varepsilon_{ij} = \Delta t (\varepsilon_i)_{ij} + \Delta t (\varepsilon_{NL})_{ij} \quad (9)$$

که

$$\Delta t (\varepsilon_L)_{ij} = (1/2)(\Delta t u_{i,j} + \Delta t u_{j,i}) \quad (10)$$

$$\Delta t (\varepsilon_{NL})_{ij} = (1/2)(\Delta t u_{k,i} \Delta t u_{k,j}) \quad (11)$$

برای محاسبه تنش‌های کوشی در رابطه (۴) ابتدا به کمک نمو کرنش گرین- لاگرانژی، نمو تنش پیولا- کیرشهف دوم به کمک رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

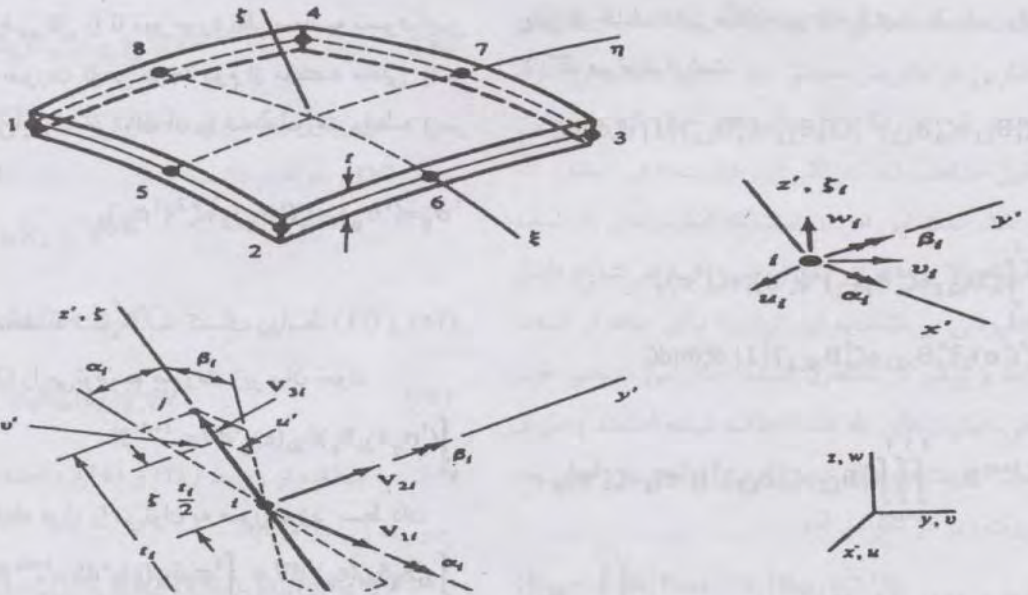
$$\Delta t S_{ij} = C_{ijkl} \Delta t \varepsilon_{kl} \quad (12)$$

به طور معمول، مقدار ${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}$ با ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$ تقریب زده شده و به کمک رابطه زیر مقدار آن را در هر نمو محاسبه می‌نمایند:

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} = {}^t \sigma_{ij} + \Delta t S_{ij} \quad (13)$$

روش ارائه شده در صورتی دقت و کارایی مورد نظر را دارد که از مقدار واقعی تنش کوشی که به کمک رابطه زیر محاسبه می‌گردد، استفاده نماید:

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} = ({}^{t+\Delta t} \rho / {}^t \rho) {}^{t+\Delta t} X_{i,m} {}^t S_{mn} {}^{t+\Delta t} X_{n,j} \quad (14)$$



شکل ۱ المان تغییر شکل یافته پوسته

بنابراین با توجه به روابط فوق و روابط (۹)، (۱۰) و (۱۱) قسمت‌های خطی و غیرخطی کرنش را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$${}^{t+\Delta t}_t \varepsilon_L = {}^{t+\Delta t}_t \varepsilon_{L1} + \zeta_1 {}^{t+\Delta t}_t \varepsilon_{L2} \quad (21)$$

$${}^{t+\Delta t}_t \varepsilon_{NL} = {}^{t+\Delta t}_t \varepsilon_{NL1} + \zeta_2 {}^{t+\Delta t}_t \varepsilon_{NL2} + \zeta_3 {}^{t+\Delta t}_t \varepsilon_{NL3} \quad (22)$$

با جمع نمودن روابط (۲۱) و (۲۲) تانسور کرنش را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$${}^{t+\Delta t}_t \varepsilon = {}^{t+\Delta t}_t \varepsilon_1 + \zeta_1 {}^{t+\Delta t}_t \varepsilon_2 + \zeta_2 {}^{t+\Delta t}_t \varepsilon_3 \quad (23)$$

در فرمولبندی‌های مرسوم به علت آنکه فقط از قسمت خطی کرنش استفاده می‌شود (رابطه (۲۱))، تابع کرنش به صورت تابع درجه اول می‌باشد. با توجه به رابطه (۲۳) نمو تنش پیولا-کیرشهف دوم به صورت زیر در می‌آید:

$$\Delta_t S_{ij} = (\Delta_t S_{ij})_1 + \zeta_1 (\Delta_t S_{ij})_2 + \zeta_2 (\Delta_t S_{ij})_3 \quad (24)$$

با استفاده از رابطه (۲) مقدار تنش ${}^{t+\Delta t}_t S_{ij}$

ماتریس کرنش تغییر مکان غیر خطی از جدا نمودن تغییر مکان‌های گره ای از رابطه (۱۷) و ماتریس کرنش تغییر مکان خطی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} u,x \\ v,y \\ w,z \\ u,y+v,x \\ v,z+w,y \\ w,x+u,z \end{bmatrix} = B_L U \quad (18)$$

با توجه به رابطه (۱۵) ملاحظه می‌شود که ماتریس‌های کرنش تغییر مکان خطی و غیرخطی توابع درجه اولی از ζ بوده و می‌توان آنها را به صورت زیر بیان نمود.

$${}^t B_L = {}^t B_{L1} + \zeta_1 {}^t B_{L2} \quad (19)$$

$${}^t B_{NL} = {}^t B_{NL1} + \zeta_1 {}^t B_{NL2} \quad (20)$$

جابه‌جایی خطی و غیرخطی (روابط (۱۹) و (۲۰)) و پس از حذف تغییر مکان‌های مجازی از طرفین رابطه (۳۰)، می‌توان نوشت:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_{L1} + \zeta_i \mathbf{B}_{L2})^T \mathbf{C}_i (\mathbf{B}_{L1} + \zeta_i \mathbf{B}_{L2}) |J| d\xi d\eta d\zeta +$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_{NL1} + \zeta_i \mathbf{B}_{NL2})^T [(\mathbf{t}\sigma)_1 + \zeta_i (\mathbf{t}\sigma)_2 + \zeta_i^2 (\mathbf{t}\sigma)_3] (\mathbf{B}_{NL1} + \zeta_i \mathbf{B}_{NL2}) |J| d\xi d\eta d\zeta$$

$$= {}^{t+\Delta t}R - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_{L1} + \zeta_i \mathbf{B}_{L2})^T [(\mathbf{t}\sigma)_1 + \zeta_i (\mathbf{t}\sigma)_2 + \zeta_i^2 (\mathbf{t}\sigma)_3] |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (31)$$

ماتریس‌های سختی خطی و غیر خطی و بردار نیروهای داخلی را می‌توان با ضرب ماتریس‌های رابطه (۳۱) و انتگرال‌گیری در جهت مختصه محلی ζ به صورت زیر بیان نمود:

$$\mathbf{K}_L = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2\mathbf{B}_{L1}^T \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_{L1} + (2/3)\mathbf{B}_{L2}^T \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_{L2}) |J| d\xi d\eta \quad (32)$$

$$\mathbf{K}_{NL} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [2\mathbf{B}_{NL1}^T \mathbf{t}\sigma_1 \mathbf{B}_{NL1} + (2/3)(\mathbf{B}_{NL1}^T \mathbf{t}\sigma_3 \mathbf{B}_{NL1}) + (2/3)(\mathbf{B}_{NL2}^T \mathbf{t}\sigma_2 \mathbf{B}_{NL2}) + (2/5)(\mathbf{B}_{NL2}^T \mathbf{t}\sigma_3 \mathbf{B}_{NL2}) + (2/3)(\mathbf{B}_{NL2}^T \mathbf{t}\sigma_2 \mathbf{B}_{NL1}) + (2/3)(\mathbf{B}_{NL1}^T \mathbf{t}\sigma_2 \mathbf{B}_{NL2})] |J| d\xi d\eta \quad (33)$$

$${}^{t+\Delta t}F = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [2\mathbf{B}_{L1}^T \mathbf{t}\sigma_1 + (2/3)\mathbf{B}_{L1}^T \mathbf{t}\sigma_3 + (2/3)\mathbf{B}_{L2}^T \mathbf{t}\sigma_2] |J| d\xi d\eta \quad (34)$$

محاسبه شده و در نهایت به کمک رابطه (۱۴) می‌توان تنش کوشی کل را تا نمو مورد نظر محاسبه نمود. این تنش به صورت تابعی درجه دوم از مختصه محلی ζ به دست می‌آید که می‌توان آن را به صورت رابطه زیر نشان داد:

$$\mathbf{t}\sigma_{ij} = (\mathbf{t}\sigma_{ij})_1 + \zeta_i (\mathbf{t}\sigma_{ij})_2 + \zeta_i^2 (\mathbf{t}\sigma_{ij})_3 \quad (25)$$

پس از محاسبه تنش‌ها به کمک روابط (۲۴) و (۲۵)، رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\int_{V^t} (\mathbf{t}\sigma_{ij} + \Delta t S_{ij}) \delta_{\Delta t}(\epsilon)_{ij} \mathbf{t}dV = {}^{t+\Delta t}gR \quad (26)$$

اکنون رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

$$\int_{V^t} \Delta t S_{ij} \delta_{\Delta t}(\epsilon)_{ij} \mathbf{t}dV + \int_{V^t} \mathbf{t}\sigma_{ij} \delta_{\Delta t}(\epsilon)_{ij} \mathbf{t}dV = {}^{t+\Delta t}gR \quad (27)$$

با بسط کرنش در انتگرال دوم به دو قسمت خطی و غیر خطی به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\int_{V^t} \Delta t S_{ij} \delta_{\Delta t}(\epsilon)_{ij} \mathbf{t}dV + \int_{V^t} \mathbf{t}\sigma_{ij} \delta_{\Delta t}(\epsilon_L)_{ij} \mathbf{t}dV + \int_{V^t} \mathbf{t}\sigma_{ij} \delta_{\Delta t}(\epsilon_{NL})_{ij} \mathbf{t}dV = {}^{t+\Delta t}gR \quad (28)$$

اگر انتگرال دوم را به سمت راست منتقل کرده و در انتگرال اول کرنش با قسمت خطی آن تقریب زده شود، رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\int_{V^t} \Delta t S_{ij} \delta_{\Delta t}(\epsilon)_{ij} \mathbf{t}dV + \int_{V^t} \mathbf{t}\sigma_{ij} \delta_{\Delta t}(\epsilon_{NL})_{ij} \mathbf{t}dV = {}^{t+\Delta t}gR - \int_{V^t} \mathbf{t}\sigma_{ij} \delta_{\Delta t}(\epsilon_L)_{ij} \mathbf{t}dV \quad (29)$$

با استفاده از رابطه (۳)، رابطه (۲۹) را می‌توان به صورت زیر بیان داشت:

$$\int_{V^t} \mathbf{t}C_{ijkl} \Delta t (\epsilon_L)_{kl} \delta_{\Delta t}(\epsilon_L)_{ij} \mathbf{t}dV + \int_{V^t} \mathbf{t}\sigma_{ij} \delta_{\Delta t}(\epsilon_{NL})_{ij} \mathbf{t}dV = {}^{t+\Delta t}gR - \int_{V^t} \mathbf{t}\sigma_{ij} \delta_{\Delta t}(\epsilon_L)_{ij} \mathbf{t}dV \quad (30)$$

با استفاده از رابطه (۲۵)، ماتریس‌های کرنش -

$$\int_{V^t} ({}^{t+\Delta t} S_{ij}) \delta_{\Delta t} (\epsilon_L)_{ij} {}^t dV + \int_{V^t} ({}^{t+\Delta t} S_{ij}) \delta_{\Delta t} (\epsilon_{NL})_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} \quad (37)$$

سپس با جایگذاری رابطه (۱۳) در انتگرال اول رابطه (۳۷)، خواهیم داشت:

$$\int_{V^t} \Delta t S_{ij} \delta_{\Delta t} (\epsilon_L)_{ij} {}^t dV + \int_{V^t} ({}^{t+\Delta t} S_{ij}) \delta_{\Delta t} (\epsilon_{NL})_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} - \int_{V^t} {}^t \sigma_{ij} \delta_{\Delta t} (\epsilon_L)_{ij} {}^t dV \quad (38)$$

با استفاده از روابط (۲۴) و (۲۵)، رابطه (۳۸) به صورت زیر در می آید:

$$\int_{V^t} [(\Delta t S_{ij})_1 + \zeta (\Delta t S_{ij})_2 + \zeta^2 (\Delta t S_{ij})_3] \delta_{\Delta t} (\epsilon_L)_{ij} {}^t dV + \int_{V^t} [({}^{t+\Delta t} S_{ij})_1 + \zeta ({}^{t+\Delta t} S_{ij})_2 + \zeta^2 ({}^{t+\Delta t} S_{ij})_3] \delta_{\Delta t} (\epsilon_{NL})_{ij} {}^t dV + \int_{V^t} [({}^t \sigma_{ij})_1 + \zeta ({}^t \sigma_{ij})_2 + \zeta^2 ({}^t \sigma_{ij})_3] \delta_{\Delta t} (\epsilon_L)_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} \quad (39)$$

منظور از عبارت $\pi - 1$ مقدار محاسبه شده برای ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$ تا تکرار قبل از هر نمو می باشد. با ترکیب عبارت های درجه اول و دوم ζ در انتگرال های اول و سوم رابطه بالا و استفاده از رابطه (۱۳)، رابطه (۳۹) به صورت زیر در می آید:

$$\int_{V^t} (\Delta t S_{ij})_1 \delta_{\Delta t} (\epsilon_L)_{ij} {}^t dV + \int_{V^t} [({}^{t+\Delta t} S_{ij})_1 + \zeta ({}^{t+\Delta t} S_{ij})_2 + \zeta^2 ({}^{t+\Delta t} S_{ij})_3] \delta_{\Delta t} (\epsilon_{NL})_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} - \int_{V^t} [({}^t \sigma_{ij})_1 + \zeta ({}^{t+\Delta t} S_{ij})_2 + \zeta^2 ({}^{t+\Delta t} S_{ij})_3] \delta_{\Delta t} (\epsilon_L)_{ij} {}^t dV \quad (40)$$

در هنگام ضرب ماتریس ها و انتگرال گیری در جهت مختصه محلی ξ در رابطه (۳۳)، عبارت های نامتقارنی در ماتریس سختی غیر خطی ایجاد می شود. با اعمال این عبارت ها در مثال های حل شده در این تحقیق مشاهده شد که تأثیر این عبارت ها در حدود ۴٪ می باشد، علت این امر آن است که عبارت های یاد شده از مرتبه بالا بوده و از این رو اثر آنها در نتایج قابل چشمپوشی می باشد. به این ترتیب، برای ساده تر شدن روابط و پرهیز از نامتقارن شدن ماتریس سختی غیر خطی، عبارت های یاد شده حذف شده است. پس از حذف عبارت های یاد شده ماتریس سختی غیر خطی به صورت زیر در خواهد آمد:

$${}^t K_{NL} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [2 {}^t B_{NLI} {}^t \sigma_1 {}^t B_{NLI} + (2/3) ({}^t B_{NLI} {}^t \sigma_3 {}^t B_{NLI}) + (2/3) ({}^t B_{NL2} {}^t \sigma_2 {}^t B_{NL2}) + (2/5) ({}^t B_{NL2} {}^t \sigma_3 {}^t B_{NL2})] |J| d\xi d\eta \quad (35)$$

از ماتریس های سختی خطی و غیرخطی و بردار نیروی های داخلی بیان شده در تکرار اول از هر نمو استفاده شده و یک تقریب اولیه برای تغییر مکان ها و کرنش ها و تنش های همگرد مربوطه محاسبه می شود. در تکرارهای دوم و به بعد برای کاهش ساده سازی مورد استفاده در معادله مشخصه و افزایش سرعت همگرایی به کمک مقدار اولیه ای که برای ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$ در تکرار اول به دست آمده است، می توان روابط را به صورت دیگری استفاده نمود. برای این منظور رابطه (۱) به کمک رابطه (۹) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\int_{V^t} ({}^{t+\Delta t} S_{ij}) \delta_{\Delta t} [(\epsilon_L)_{ij} + (\epsilon_{NL})_{ij}] {}^t dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} \quad (36)$$

رابطه (۳۶) را نیز می توان به صورت زیر بیان نمود:

همانگونه که ملاحظه می‌شود، با این تغییر در فرمولبندی به جای آنکه کل نمو تنش پیولا-کیرشف دوام با قسمت خطی کرنش تقریب زده شود، به کمک مقادیر اولیه محاسبه شده برای ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ فقط عبارت اول نمو تنش تقریب زده شده است. این عمل به افزایش سرعت همگرایی کمک می‌کند.

فرمولبندی تغییر شکل الاستیک و پلاستیک

در مرحله پلاستیک مقادیر تنش و کرنش، بر خلاف مرحله الاستیک، به مسیر بارگذاری وابسته است. در این نوع تحلیل نخست باید مرز بین مرحله الاستیک و پلاستیک را مشخص نمود. فرم عمومی مرحله تسلیم به کمک رابطه زیر بیان می‌شود:

$${}^tF({}^t\sigma, {}^t k(\alpha)) = 0 \quad (45)$$

در رابطه بالا ${}^t k(\alpha)$ مشخص کننده مرز تسلیم در هر مرحله از بارگذاری بوده که به مقدار کرنش پلاستیک و یا کار پلاستیک در هر مرحله وابسته است. در این تحلیل فرض می‌شود سطح تسلیم به صورت یکنواخت گسترش یافته (Isotropic hardening) است. α تابعی از کار پلاستیک می‌باشد. گفتنی است در حالتی که سطح تسلیم به صورت یکنواخت گسترش می‌یابد روابط به دست آمده در دو حالت کرنش - سختی و کار- سختی یکسان می‌باشد. در تحلیل مورد نظر از معیار تسلیم فون میسر استفاده شده که رابطه آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$${}^tF = (1/2) {}^t\bar{S}_{ij} {}^t\bar{S}_{ij} - {}^t k(\alpha) \quad (46)$$

در رابطه بالا ${}^t\bar{S}_{ij}$ مؤلفه های تنش انحرافی (Deviatoric stress) است و به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$${}^t\bar{S}_{ij} = {}^t\sigma_{ij} - {}^t\sigma_m \delta_{ij} \quad (47)$$

همانند قبل، با استفاده از ماتریس های کرنش- جابه جایی خطی و غیر خطی و پس از حذف تغییر مکان های مجازی از طرفین رابطه (ϵ_0) ، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ({}^tB_{L1} + \zeta {}^tB_{L2})^T {}^tC ({}^tB_{L1} + \zeta {}^tB_{L2}) |J| \\ & d\xi d\eta d\zeta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ({}^tB_{NL1} + \zeta {}^tB_{NL2})^T [({}^{t+\Delta t}S)_1 \\ & + \zeta ({}^{t+\Delta t}S)_2 + \zeta^2 ({}^{t+\Delta t}S)_3] ({}^tB_{NL1} + \zeta {}^tB_{NL2}) |J| \\ & d\xi d\eta d\zeta = {}^{t+\Delta t}R - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ({}^tB_{L1} + \zeta {}^tB_{L2})^T [({}^t\sigma)_1 \\ & + \zeta ({}^{t+\Delta t}S)_2 + \zeta^2 ({}^{t+\Delta t}S)_3] |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (41) \end{aligned}$$

با ضرب ماتریس های عبارت های رابطه (41) و انتگرال گیری در جهت مختصه محلی ζ ، ماتریس های سختی خطی و غیر خطی و بردار نیروهای داخلی به صورت زیر در می‌آیند:

$${}^tK_L = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2 {}^tB_{L1}^T {}^tC {}^tB_{L1} + (2/3) {}^tB_{L2}^T {}^tC {}^tB_{L2}) |J| d\xi d\eta \quad (42)$$

$$\begin{aligned} {}^tK_{NL} = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [2 {}^tB_{NL1}^T {}^{t+\Delta t}S_1 {}^tB_{NL1} + (2/3) \\ & ({}^tB_{NL1}^T {}^{t+\Delta t}S_3 {}^tB_{NL1}) + (2/3) ({}^tB_{NL2}^T {}^{t+\Delta t}S_1 {}^tB_{NL2}) \\ & + (2/5) ({}^tB_{NL2}^T {}^{t+\Delta t}S_3 {}^tB_{NL2})] |J| d\xi d\eta \quad (43) \end{aligned}$$

$${}^{t+\Delta t}F = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [2 {}^tB_{L1}^T {}^t\sigma_1 + (2/3) {}^tB_{L1}^T {}^{t+\Delta t}S_3 + (2/3) {}^tB_{L2}^T {}^{t+\Delta t}S_2] |J| d\xi d\eta \quad (44)$$

در رابطه بالا، C^E ماتریس تنش- کرنش الاستیک است. بنابراین $d\lambda$ را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$d\lambda = \frac{{}^t q^T C^E de}{{}^t p^T {}^t q + {}^t q^T C^E {}^t q} \quad (56)$$

با جایگذاری روابط (54) و (56) در رابطه (55)

خواهیم داشت:

$$d\sigma = C^{EP} de \quad (57)$$

که C^{EP} ماتریس تنش- کرنش الاستیک - پلاستیک در هر لحظه از حرکت در مسیر پلاستیک بوده و مقدار آن عبارت است از:

$$C^{EP} = C^E - \frac{C^E {}^t q (C^E {}^t q)^T}{{}^t p^T {}^t q + {}^t q^T C^E {}^t q} \quad (58)$$

به کمک تئوری فون- میسز و با در نظر گرفتن حالت کار سختی خطی مقادیر ${}^t p_{ij}$ و ${}^t q_{ij}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$${}^t p_{ij} = {}^t H {}^t \sigma_{ij} \quad (59)$$

$${}^t q_{ij} = {}^t \bar{S}_{ij} \quad (60)$$

که در روابط بالا مقدار ${}^t H$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$${}^t H = (2/3) \left(\frac{E E_T}{E - E_T} \right) \quad (61)$$

E_T شیب مرحله پلاستیک در منحنی تنش-کرنش می‌باشد.

مثال‌های عددی

تحلیل‌های الاستیک. مثال ۱- در این مثال تغییر شکل‌های بزرگ یک تیر یک سرگیردار سه بعدی که تحت بار متمرکز P در انتها می‌باشد، مورد بررسی قرار می‌گیرد، (شکل ۲). به علت هندسه و نوع بارگذاری، تیر همزمان تحت خمش و پیچش می‌باشد. تیر در

$${}^t k(\alpha) = (1/3) {}^t \sigma_Y(\alpha) \quad (48)$$

${}^t \sigma_Y$ معرف تنش تسلیم در زمان t می‌باشد. از آنجا که تغییر شکل پلاستیک (${}^t F = 0$) می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial {}^t F}{\partial {}^t \sigma_{ij}} d {}^t \sigma_{ij} + \frac{\partial {}^t F}{\partial {}^t e_{ij}} d {}^t e_{ij} = 0 \quad (49)$$

در ادامه برای سادگی از روابط زیر استفاده می‌شود:

$${}^t q_{ij} = \frac{\partial {}^t F}{\partial {}^t \sigma_{ij}} \quad (50)$$

$${}^t p_{ij} = - \frac{\partial {}^t F}{\partial {}^t e_{ij}} \quad (51)$$

مقادیر بالا را می‌توان به شکل ماتریسی نوشت:

$${}^t q^T = \begin{bmatrix} {}^t q_{11} & {}^t q_{22} & {}^t q_{33} & 2 {}^t q_{12} & 2 {}^t q_{23} & 2 {}^t q_{31} \end{bmatrix} \quad (52)$$

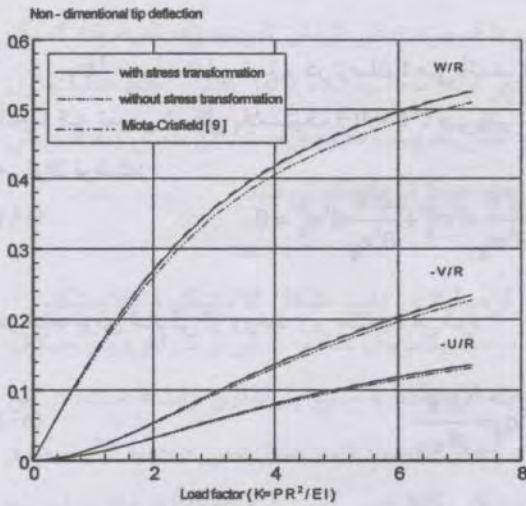
$${}^t p^T = \begin{bmatrix} {}^t p_{11} & {}^t p_{22} & {}^t p_{33} & 2 {}^t p_{12} & 2 {}^t p_{23} & 2 {}^t p_{31} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$d {}^t e_{ij}^p$ بیان کننده تغییرات کرنش پلاستیک در نمود مورد نظر می‌باشد که به روش محاسبه آن قانون جریان گفته می‌شود و به صورت عمومی زیر بیان می‌شود:

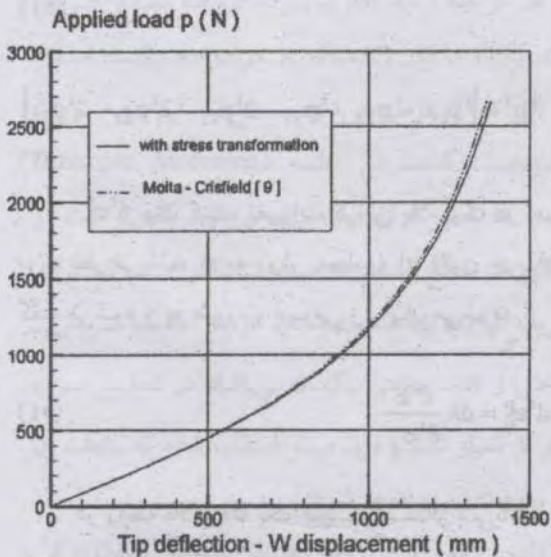
$$d {}^t e_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial {}^t F}{\partial {}^t \sigma_{ij}} \quad (54)$$

در رابطه بالا، $d\lambda$ یک کمیت اسکالر می‌باشد. رابطه بین کل نمو کرنش و نمو کرنش‌های الاستیک و پلاستیک به دو صورت تجزیه ضربی و جمع‌ی بیان می‌شود. در اینجا از تجزیه جمع‌ی استفاده شده است. طبق این تئوری نمو تنش با رابطه زیر نشان داده می‌شود:

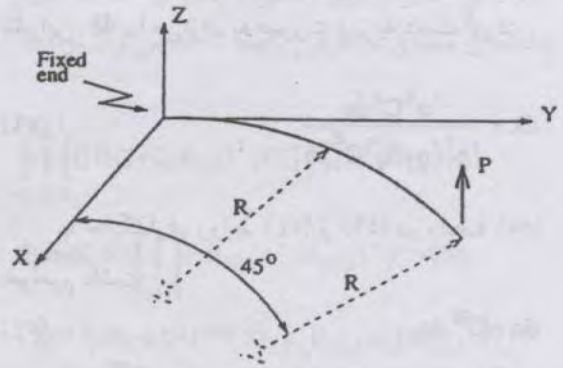
$$d\sigma = C^E (de - de^p) \quad (55)$$



شکل ۳ نمودار تغییرات خیز انتهای تیر در برابر ضریب نیرو
($v = 0$)



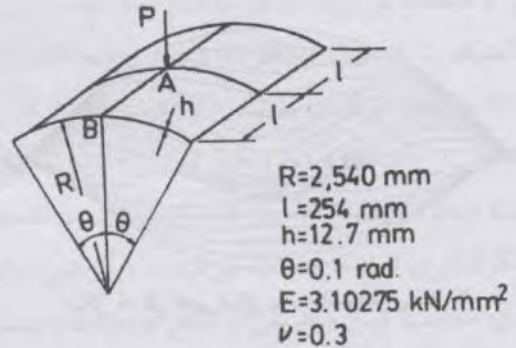
شکل ۴ نمودار تغییرات خیز انتهای تیر در برابر ضریب نیرو
($v = 0.49$)



شکل ۲ تیر یک سر گیر دار تحت نیروی متمرکز در انتها

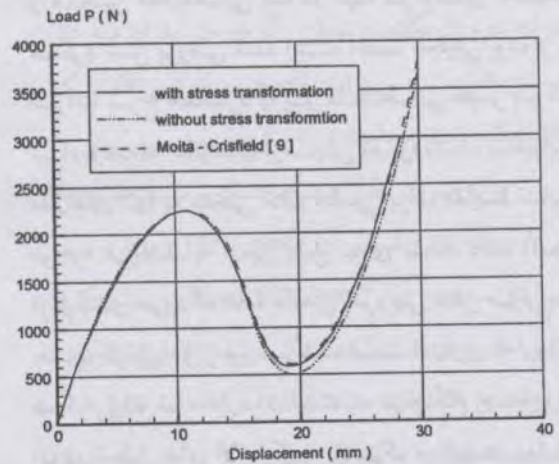
صفحه X-Y قرار داشته و سطح مقطع آن 645.16mm^2 می‌باشد. تیر دارای شعاع انحناء متوسط $R = 2540\text{mm}$ و زاویه 45° می‌باشد. نیرو در یک انتها و در جهت محور Z به تیر اعمال می‌شود. مدول الاستیسیته $E = 69\text{MPa}$ و تحلیل در دو حالت $v = 0$ و $v = 0.49$ انجام می‌گیرد. کل نیروی اعمالی 2600N بوده و در ۱۲ نمو به تیر اعمال می‌شود. برای تحلیل تیر از ۸ المان به صورت 2×4 استفاده شده است. در شکل (۳) نمودار خیز انتهای تیر در برابر ضریب نیرو در حالت $v = 0$ در دو حالت، با تبدیل تنش کوشی و بدون تبدیل تنش کوشی، ترسیم گردیده و با نتایج به دست آمده از روش همگرد Moita و Crisfield [9] مقایسه شده است. همانگونه که مشاهده می‌گردد، نتایج در صورتی با نتایج این مرجع تطابق دارد که از مقدار واقعی تنش کوشی (رابطه (۱۸)) استفاده شود. گفتنی است که در مرجع [9] برای تحلیل از ۱۲ المان استفاده شده است. در شکل (۴) نمودار خیز تیر در برابر نیروی اعمالی در حالت $v = 0.49$ ترسیم شده و با نتایج مرجع یاد شده مقایسه گردیده است.

مثال ۳- محققان روش های همگردي را که در مقدمه به آنها اشاره شد برای کم کردن تقریب مورد استفاده در تحلیل های اجزاء محدود غیر خطی مورد استفاده قرار داده و در مقالاتی که به بررسی این روش ها پرداخته اند برای نشان دادن قوت فرمولبندی مورد نظر، نتایج تحلیل پدیده پرش در یک پوسته استوانه ای را با نتایج دیگر روش ها مقایسه نموده اند [6,9,15]. دلیل انتخاب مسئله یاد شده، دوران های صلب گونه زیادی است که در لحظه پرش پوسته اتفاق می افتد.



شکل ۵ مشخصات هندسی پوسته استوانه ای مثال ۲

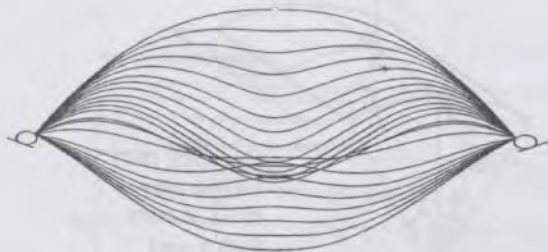
پدیده پرش به تغییر شکل لحظه ای که در بعضی از اشکال هندسی و با شرایط مرزی خاص پوسته ها اتفاق می افتد اطلاق می گردد. گفتنی است که این تغییر شکل خاص تا ضخامت مشخصی ایجاد می شود. تحلیل پدیده پرش از جمله مسایل پیچیده در تحلیل های غیر خطی است. از آنجا که فروریزی پوسته در نیروی خاصی اتفاق افتاده و به ازاء نیروی یاد شده جابه جایی و دوران های صلب گونه زیادی صورت می گیرد، برای نشان دادن لحظه فروریزی پوسته از یک تحلیل مجازی استفاده می شود [15]. این تحلیل مجازی از سه مرحله تشکیل می شود ۱- مرحله اول: این مرحله به وسیله روش کنترل جابه جایی (Displacement control) تحلیل گردیده و جابه جایی نقطه میانی پوسته تا جایی ادامه می یابد که شیب منحنی نیرو بر حسب جابه جایی به سمت صفر میل نماید. این بدان معنی است که برای ادامه جابه جایی نقطه میانی پوسته به نیروی نیاز نمی باشد. ۲- مرحله دوم: از آنجا که پوسته در حال حرکت به سمت پایین و از دست دادن پایداری خود است، برای ادامه مسیر نیاز به اعمال نیرو در خلاف جهت حرکت می باشد. بنابراین در مرحله دوم به روش کنترل نیرو (Force control) نیرویی در خلاف جهت حرکت به آن اعمال می گردد. این کار با کاهش نیروی اعمالی که پوسته را به این مرحله رسانده است، انجام می گردد. این منحنی تا جایی ادامه می یابد که شیب منحنی نیرو- جابه جایی به سمت صفر میل کند، این



شکل ۶ نمودار نیرو- جابه جایی نقطه میانی پوسته استوانه ای

مثال ۲

مثال ۲- در این مثال تغییر شکل بزرگ پوسته استوانه ای شکل (۵) با مشخصات هندسی و مادی زیر تحلیل می شود: ضخامت $E = 3.10275 \text{ kN/mm}^2$, $h = 12.7 \text{ mm}$ ، $r = 2540 \text{ mm}$ و $L = 254 \text{ mm}$ ، $\nu = 0.3$ شرایط مرزی مفصلی در دو طرف، بدون انحنا و تحت بار متمرکز P در وسط آن می باشد. برای تحلیل اجزاء محدود، ۸ المان در یک چهارم پوسته استوانه ای در نظر گرفته شده است. تغییرات نیرو بر حسب جابه جایی نقطه میانی در شکل (۶) آورده شده و با نتایج به دست آمده در مرجع [9] مقایسه شده است.



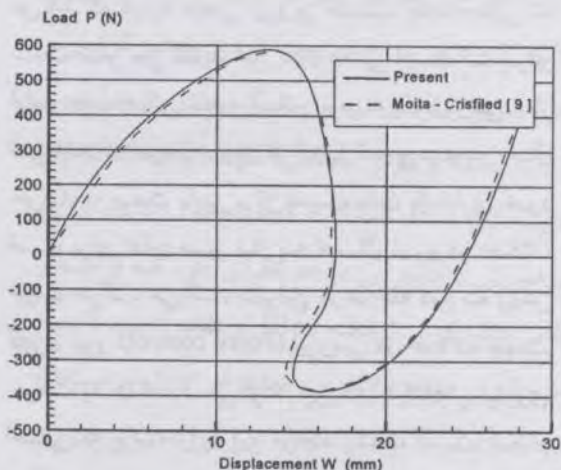
شکل ۸ کل تغییر شکل پوسته استوانه ای مثال ۳

ارائه می‌شود. مقاله‌هایی که در زمینه ارائه روش همگرد و کاربرد آن در محیط الاستیک - پلاستیک ارائه شده است و همچنین مقاله‌هایی که در آنها نرخ‌های مختلف همگرد تنش بررسی شده است، اغلب تحلیلی بوده و یا اثرات نرخ همگرد را بر مثال‌هایی نظیر برش ساده (simple shear) آزمایش نموده‌اند. بنابراین مثال‌های آنها به سختی مثال مناسبی برای مقایسه نتایج موجود می‌باشد. به همین دلیل برای نشان دادن دقت فرمولبندی مورد استفاده منحنی خروجی تنش مؤثر بر حسب کرنش مؤثر بررسی شده است. امتیازی که روش همگرد ارائه شده دارد آن است که در هنگام استفاده از آن در تحلیل‌های الاستیک - پلاستیک مستقیم در روابط الاستیک - پلاستیک، وارد نمی‌شود و فقط قبل از محاسبه ماتریس الاستیک - پلاستیک تنش را به صورت همگرد در می‌آورد.

مثال ۴- در اینجا مثالی در محیط الاستیک - پلاستیک به کمک المان تغییر شکل یافته ارائه می‌شود. المان‌های تغییر شکل یافته برای تحلیل‌های الاستیک - پلاستیک چندان مناسب نبوده و نباید انتظار داشت که نتایج از دقت بالایی برخوردار باشند. علت این امر محاسبات مربوط به مقدار تنش‌های مورد استفاده در ماتریس الاستیک - پلاستیک می‌باشد. بعد از هر تکرار مانند تحلیل‌های الاستیک، تنش به صورت تابع درجه دوم

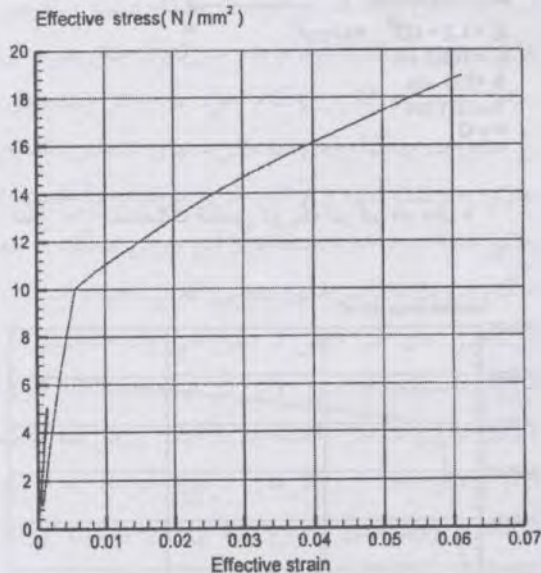
بدان معنی است که پوسته پرش خود را انجام داده و برای ادامه مسیر به افزایش نیرو نیاز می‌باشد. ۳- مرحله سوم: پس از گذر از مرحله دوم، پوسته پرش خود را انجام داده و برای ادامه مسیر به افزایش نیرو نیاز است. در این مرحله با استفاده از روش کنترل جابه‌جایی تغییر شکل پوسته ادامه می‌یابد. از آنجا که حد فاصل بین مراحل پدیده پرش را به صورت دقیق نمی‌توان محاسبه نمود برای به دست آوردن این نقاط از یک روش ریاضی استفاده می‌کنند. در مرجع [15] یک نمونه از این روش‌ها را می‌توان مشاهده نمود. شکل (۷) نمودار نیرو - تغییر مکان نقطه میانی پوسته را نشان می‌دهد. این منحنی با نتایج به دست آمده از روش همگرد مرجع [9] مقایسه شده است. گفتنی است متوسط تعداد تکرارهایی که در این مرجع به دست آمده 4.1 بوده و متوسط تعداد تکرارهای مورد استفاده در روش لاگرانژی همگرد ارائه شده 3.04 می‌باشد. همچنین شکل (۸) تغییر شکل پوسته را در خلال فرآیند پرش نمایش می‌دهد.

تحلیل‌های الاستیک - پلاستیک. در اینجا تحلیل الاستیک - پلاستیک دو مثال یکی به وسیله المان تغییر شکل یافته و دیگری به کمک المان مکعبی بیست گره ای



شکل ۷ منحنی نیرو - تغییر مکان برای تحلیل مجازی پوسته

با درصدی خطا نسبت به نمودار ورودی به دست آمده است.



شکل ۹ نمودار تنش- کرنش مؤثر برای تحلیل الاستیک- پلاستیک پوسته استوانه ای

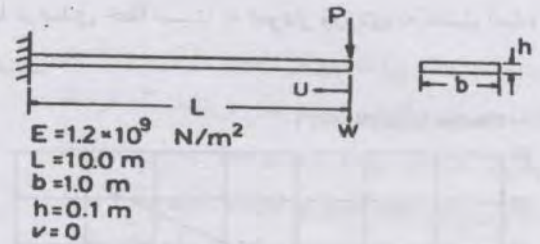
مثال ۵- در اینجا تحلیل الاستیک- پلاستیک یک تیر یک سر گیر دار تحت بار متمرکز در انتها ارائه می شود. مشخصات هندسی این تیر در شکل (۱۰) آورده شده است. برای این مثال تنش تسلیم $\sigma_{yp} = 5 \times 5N/m^2$ و مدول کرنش سختی $E_T = 60 \times 6N/m^2$ در نظر گرفته شده است. تیر مورد نظر تا نیروی 240N بارگذاری شده است. برای بررسی عملکرد این تحلیل نیز نمودار خروجی تنش مؤثر بر حسب کرنش مؤثر رسم شده است، (شکل ۱۱). همانگونه که از این نمودار مشاهده می شود، به علت آنکه برای محاسبه تنش، تنش به صورت کامل، مورد استفاده قرار گرفته شده است، نمودارهای خروجی و ورودی بسیار به هم نزدیک می باشند.

از ϵ محاسبه می گردد. اما در هنگام محاسبه ماتریس الاستیک - پلاستیک همانگونه که در روابط (۵۸) تا (۶۰) ملاحظه می گردد، به تنش های کوشی و تنش های انحرافی ارجاع شده از تکرار قبل نیاز می باشد. از آنجا که ماتریس های الاستیک- پلاستیک در نقاط انتگرال گیری المان ها محاسبه می گردند، دیگر نمی توان برای محاسبه این ماتریس از تابع درجه دوم تنش استفاده نمود و فقط قسمت ثابت تابع تنش وارد محاسبات می شود. البته بعد از محاسبه این ماتریس و ضرب آن در کرنش ها مجدداً تنش به صورت تابع درجه دوم از مختصه محلی ϵ در می آید اما به علت همین تقریب مورد استفاده در ماتریس الاستیک - پلاستیک، دقت محاسبات کاهش می یابد.

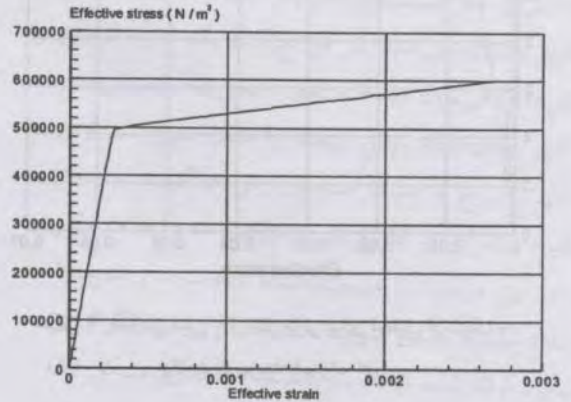
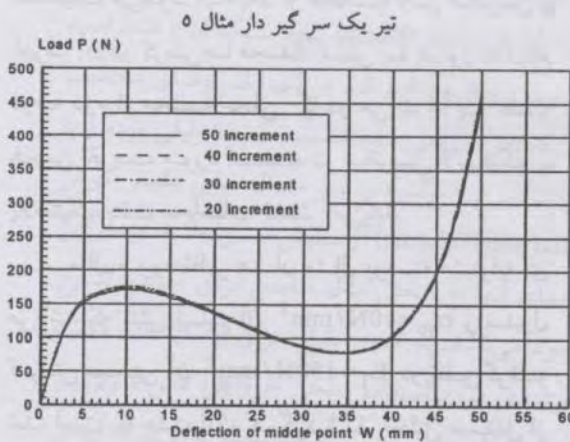
مثال مورد نظر همان مثال پوسته استوانه ای می باشد که تنش تسلیم آن $\sigma_{yp} = 10N/mm^2$ و مدول کرنش سختی آن $E_T = 150N/mm^2$ در نظر گرفته شده است. به علت آنکه همگرد شدن تحلیل مستقل از فرمولبندی الاستیک - پلاستیک می باشد، کافی است صحت تحلیل را با نمودار تنش مؤثر بر حسب کرنش مؤثر نشان دهیم. گفتنی است که مرحله پلاستیک در این تحلیل به صورت کرنش سختی خطی در نظر گرفته شده است. همانگونه که در شکل (۹) ملاحظه می شود، نمودار تنش - کرنش مؤثر نیز به صورت خطی با تنش تسلیم مؤثر ۱۰ به دست آمده است. در این شکل نمودار مرحله الاستیک دارای دو قسمت می باشد. دلیل این امر کاهش نیروی تغییر شکل است که در تحلیل کنترل- نیرویی پوسته اتفاق می افتد. این کاهش نیرو را در نمودار شماره (۶) می توان مشاهده نمود. همانگونه که در نمودار تنش مؤثر بر حسب کرنش مؤثر مشاهده می شود، به علت تقریب مورد استفاده نمودار خروجی

تعداد نمو ۲/۵ برابر کاهش پیدا کرده است اما تغییر نتایج بسیار ناچیز می‌باشد.

شکل (۱۳) تأثیر تبدیل تنش‌ها را در هنگام کاهش نموها بر تحلیل پوسته کمانی شکل را نشان می‌دهد. نمودارهای یاد شده برای ۱۵ نمو ترسیم شده است. یکی از نمودارها تحلیل را در حالتی که تبدیل‌ها انجام شده و دیگری تحلیل در حالت بدون تبدیل تنش نشان می‌دهد.

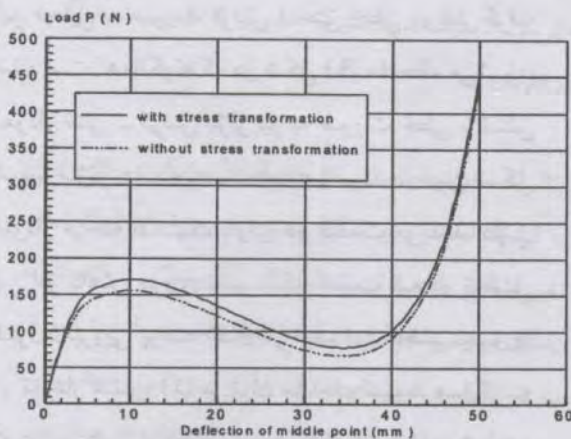


شکل ۱۰ مشخصات هندسی تیر یک سر گیر دار مثال ۵



شکل ۱۱ نمودار تنش - کرنش مؤثر برای تحلیل الاستیک - پلاستیک

شکل ۱۲ تأثیر تعداد نمو بر محاسبات پوسته کمانی شکل مثال ۶



شکل ۱۳ تأثیر تبدیل تنش‌ها در هنگام کاهش نموها

بررسی تأثیر روش همگرد ارائه شده بر زمان محاسبات همانگونه که در آغاز این تحقیق آورده شد، با استفاده از روش‌های همگرد می‌توان زمان محاسبات را به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش داد. برای نشان دادن اثر این روش، مجدداً مثال شماره ۲ برای تعداد نمو مختلف تحلیل شده است.

مثال ۶- در این مثال تأثیر روش همگرد ارائه شده بر پوسته کمانی شکل بررسی می‌شود. این مثال در مقالات مختلف با ۵۰ نمو تحلیل شده اما در اینجا نتایج حاصل از تحلیل برای تعداد نموهای مختلف بررسی می‌گردد. شکل (۱۲) تغییرات کاهش نمو را تا ۲۰ عدد بر نتایج نشان می‌دهد. همانگونه که مشاهده می‌شود با آنکه

بحث و نتیجه گیری

اولین تکرار، برای ماتریس‌های سختی یک مقدار اولیه به دست می‌آید. در این تحلیل‌ها برای محاسبه متغیرها در تکرارهای بعد، هم می‌توان از مقدار اولیه ماتریس‌های سختی استفاده نمود و هم می‌توان ماتریس‌های سختی را در هر تکرار به‌نگام نمود. در روش پیشنهادی، در صورت به‌نگام نمودن ماتریس‌های سختی، نتایج بهتری به دست آمده و از این طریق می‌توان با اطمینان بالاتری ادعا نمود که با استفاده از این روش همگردد و به‌نگام نمودن ماتریس‌های سختی، تقریب مورد استفاده در تحلیل‌های غیر خطی از بین می‌رود. همچنین در صورت استفاده از این روش در هنگام به کارگیری المان تغییر شکل یافته عملاً این روش به یک فرمول‌بندی مجزا از روش‌های مرسوم خواهد رسید که استفاده از روش‌های مرسوم فقط برای به دست آوردن یک مقدار اولیه در تکرار اول هر نمو می‌باشد.

فهرست نشانه‌ها

W	تانسور چرخش مادی
Ω	تانسور چرخش جسمی
ε	تانسور کرنش گرین-لاگرانژ
	قسمت خطی و غیر خطی کرنش گرین-لاگرانژ
$\varepsilon_L, \varepsilon_{NL}$	
S	تانسور تنش پیولا-کیرشهف دوم
σ	تانسور تنش کوشی
ξ, η, ζ	مختصات محلی المان
	ماتریس‌های کرنش - جابه‌جائی خطی و غیر خطی
B_L, B_{NL}	
\mathfrak{R}	کار مجازی نیروهای سطحی و جسمی
R	بردار نیروهای سطحی و جسمی
K_L, K_{NL}	ماتریس سختی خطی و غیر خطی
η, e	بخش‌های خطی و غیرخطی مولفه‌های نمو کرنش
F	مولفه‌های تانسور الاستیسیته داخلی
Δu	بردار نمو تغییر مکان‌های گره‌ای

برای حذف اثرات دوران‌های صلب گونه بر تنش‌ها در فرمول‌بندی اجزاء محدود غیر خطی، روش‌های مختلفی ارائه شده است. در این روش‌ها از مفاهیمی چون حذف دوران‌های صلب گونه از کل تغییر شکل و همچنین نرخ‌های همگرد تنش کوشی استفاده می‌گردد. تعدادی از این روش‌ها دوران‌های صلب گونه را به کمک تجزیه قطبی در نقاط انتگرال‌گیری المان از محاسبات حذف می‌نمایند. این روش‌ها در ابتدا وابسته به سینماتیک المان بود و برای هر المان به صورت مستقل ارائه می‌گردید. سپس روش‌هایی ارائه گردید که مستقل از سینماتیک المان، دوران‌های صلب گونه را از محاسبات حذف می‌نمایند. از دیگر روش‌ها استفاده از نرخ‌های همگرد تنش کوشی در فرمول‌بندی اجزاء محدود تغییر شکل‌های بزرگ می‌باشد که از آن جمله می‌توان به نرخ‌های همگرد تنش Jaumann و Green-Naghdi اشاره نمود. در این تحقیق یک روش همگرد برای تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ ارائه شد. روش پیشنهادی یک روش عمومی بوده و برای استفاده در هر نوع تحلیل تغییر شکل بزرگ مناسب می‌باشد. استفاده از روش یاد شده چندین مزیت دارد: ۱- قابل استفاده بودن توسط هر نوع المان به غیر از المان‌های تغییر شکل یافته بدون تغییر در فرمول‌بندی‌های مرسوم ۲- سرعت بالای همگرایی روش یاد شده. این مسئله به دو علت اتفاق می‌افتد: الف- فرمول‌بندی ارائه شده تغییرات ناچیزی در فرمول‌بندی مرسوم تحلیل‌های غیر خطی ایجاد می‌کند. ب- همگرایی سریع این روش مخصوصاً در تحلیل پدیده پرش پوسته‌ها ۳- قابلیت بسیار در همگرد نمودن تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ که این نکته از مقایسه نتایج این روش با نتایج دیگر روش‌ها قابل مشاهده می‌باشد. ۴- قابل استفاده بودن و نیز، سادگی استفاده از آن در تحلیل‌های الاستیک - پلاستیک بدون آنکه تغییری در فرمول‌بندی الاستیک - پلاستیک ایجاد کند. در تحلیل‌های اجزاء محدود در

β, α	دوران‌ها حول دو محور محلی مماسی	ρ	چگالی
f	توانع شکلی المان	X	تانسور گرادینان تغییر شکل
n_3, a_3, n_3	کسینوس های هادی بردار v_3	ζ	مختصات محلی در جهت ضخامت

مراجع

1. Ugural, A. C. "Stresses in plates and shell", 2nd ed., McGraw-Hill, (1999).
2. Belytschko, T., Liu, W. K., and Moran, B., "Nonlinear finite element for continua and structures", 3rd ed., McGraw-Hill (2001).
3. Wempner, G. "Finite elements, finite Rotations and small strains of flexible shells", Int. J. Solids and Structures, Vol. 5, pp.117-153, (1969).
4. Belytschko, T., and Hsieh, B. J., "Non-linear transient finite element analysis convected coordinates", Int. J. Numer. Methods. Eng. Vol. 7, pp. 255-271, (1973).
5. Crisfield, M. A., "A consistent corotational formulation for nonlinear, three-dimensional, beam element", Comput. Methods. Appl. Mech. Eng., Vol. 81, pp. 131-150, (1990).
6. Peng, X., and Crisfield, M. A., "A consistent corotational formulation for shells using the constant stress/constant moment triangle", Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 35, pp. 1829-1847, (1992).
7. Nour-Omid, B., and Rankin, C. C., "Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors", Comput. Methods. Appl. Mech. Eng., Vol. 93, pp. 353-384, (1991).
8. Rankin, C. C., and Brogan, F. A., "An element independent corotational procedure for the treatment of large rotation", ASME J. Pressure Vessel Technol., Vol. 108, pp. 165-174, (1986).
9. Moita, G. F., and Crisfield, M. A., "A finite element formulation for 3-D continua using the corotational technique", Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 39, pp. 3775-3792, (1996).
10. Henry, Y., Saigal, S., Masud, A., and Kpania, R., "A survey of recent shell finite element", Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 47, pp. 101-127, (2000).
11. Naghdabadi, R., and Jabbarzadeh, M., "A modified corotational finite element formulation for large deformation analysis of shells Structures", 5th International and 9th Annual Mechanical Engineering Conference (ISME2001), pp. 427-433, (2001), Gilan, Iran, (in Farsi).
12. Farahani, K., Naghdabadi, R., "Conjugate stresses of the Seth-Hill strain tensors", Int. J. Solids and Struc., Vol. 37, pp. 5247-5255, (2000).
13. Bathe, K. J., "Finite element procedures in engineering analysis", 2nd ed. Prentice-Hall, (1996).
14. Pergjin, F. Pai., Palazotto Antony. N ., and Fellow, "Polar decomposition theory in nonlinear analyses of solids and structures", J. Eng. mech. 121, No. 4, pp.568-581, (1995).
15. Crisfield, M. A., "A fast incremental / iterative solution procedure that handles snap-through", Computers & Structures., Vol. 13, pp.55-62, (1981).