تأثیر خودگرانش بر ساختار تعادلی یک قرص ضخیم غیر چرخان در اطراف جسم فشرده مغناطیده مرکزی

قنبری،جمشید وعطائی،ساره*

گروه فیزیک دانشکده علوم دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

ما در این کار سعی می کنیم تأثیر خودگرانش را بر ساختار تعادلی یک قرص ضخیم غیرچرخان و در حضور میدان مغناطیسی دوقطبی ستاره مرکزی مورد بررسی قرار دهیم.معادلات اصلی را در سیستم مختصات کروی درنظرگرفتیم و فرض کردیم سیستم دارای تقارن محوری باشد. همچنین به دلیل غیرچرخان بودن قرص از مولفه v_φ صرفنظر کردیم. با توجه به فرضهای انجام شده و محاسبات لازم به رابطه ای بین مؤلفه های شعاعی وθ سرعت دست می یابیم. روش جداسازی متغیرها برای حل معادله پواسون به ارتباط بین چگالی و سرعت در راستای θ منجر می شود. سرانجام با استفاده از روشهای خودمشابهی به سه معادله نهایی برای سرعت، پتانسیل و فشار برحسب θ می رسیم که در آنها باید تأثیر سه کمیت بدون بعد B و C و D که B نشانگر نسبت انرژی های گرمایی به گرانشی، C نسبت انرژی های جنبشی به گرانشی و D معرف اهمیت خودگرانش می باشد، را مورد بررسی قرار دهیم.

مقدمه

قرصهای برافزایشی از لحاظ ساختار هندسی به دو دسته کلی نازک وضخیم تقسیم می شود.کارهای تئوری بسیاری تا کنون بر روی قرصهای نازک انجام گرفته است(Shakura & Sanyaev 1973) اما در مورد قرصهای ضخیم هنوز در مراحل اولیه می باشد(Banerjee et al.1995). تفاوت عمده این دو نوع درمیزان تأثیر خوگرانش بر ساختار آنها است. در بیشتر موارد در قرصهای نازک از خودگرانش صرفنظر می شود در حالیکه نادیده گرفتن این اثر در قرصهای ضخیم غیرممکن است. در بررسی قرصهای ضخیم معمولاً از دو روش استفاده می کنند: در روش اول که بسیار نیز متداول است سیستم را دردستگاه مختصات استوانه ای در نظر گرفته و انتگرالگیری در راستای عمودی به صورت لایه لایه انجام می شود. اما در روش دوم که ما نیز در این کار از آن استفاده کردیم تمام معادلات در سیستم مختصات کروی حل می شوند. امروزه تقریباً ثابت شده است که در این سیستمها از اثر میدان مغناطیسی نمی توان صرفنظر کرد(Blanford & Znajek 1977 ;Lubow et al.1994). به همین دلیل ما از معادلات مگنتوهیدرودینامیک(MHD) استفاده کردیم و میدان مغناطیسی جرم مرکزی را به صورت دوقطبی در معادلات وارد کردیم. به خاطر ساده سازی، سیستم را دارای تقارن محوری فرض کردیم و در این مرحله از کار اثرات وشکسانی را نیز در نظر نگرفتیم. همچنین به دلیل غیرچرخان بودن قرص مؤلفه سمتی سرعت را نیز صفر قرار دادیم که این خود منجر به صفر شدن مولفه سمتی میدان مغناطیسی در قرص نیز می شود.

فرمولبندی و محسبات

همانطور که در مقدمه اشاره شد میدان مغناطیسی جسم مرکزی را به صورت دوقطبی درنظر گرفتیم (Ghanbari & Abbassi 2004):

$$\vec{B} = 2B_0(R/r)^3 \cos\theta \hat{e}_r + B_0 (R/r)^3 \sin\theta \hat{e}_\theta$$

همچنین معادلات حاکم بر سیستم شامل معادلات MHD و به دلیل بررسی خودگرانش معادله پواسون و پایستگی جرم است که به صورت زیردر می آیند :

*ghanbari@ferdowsi.um.ac.ir, sara_a_virgo1989@yahoo.com

$$\rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}p - \rho\vec{\nabla}(\psi + \psi_{ext}) + \frac{1}{c}\vec{J} \times \vec{B} \qquad (1)$$

که ψ پتانسیل ناشی از خودگرانش قرص و ψ_{ext} پتانسیل گرانشی ستاره مرکزی است.

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \qquad (4)$$

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B} = 0 \qquad (5)$$

$$\nabla^2(\psi + \psi_{ext}) = 4\pi G(\rho + \rho_{ext}) \qquad (6)$$

$$\vec{\nabla}.(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (7)$$

با استفاده از معادلات (3) و (4) بدست می آوریم:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta(v_r B_\theta - v_\theta B_r)) = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta(v_r B_\theta - v_\theta B_r)) = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r(v_\varphi B_r - v_r B_\varphi)) - \frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta B_\varphi - v_\varphi B_\theta) = 0 \qquad (10)$$

پس

$$r\sin\theta(v_r B_\theta - v_\theta B_r) = A = cte \qquad (11)$$

با جاگذاری مقادیرمؤلفه میدان دوقطبی و با توجه به اینکه در r های بزرگ باید v_r وv_θ به سمت صفر میـل کننـد، مقدار ثابت A صفر می شود و خواهیم داشت:

$$v_r = 2v_\theta \cot\theta \qquad (12)$$

این رابطه را در (10) قرار می دهیم و بدست می آوریم:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}(2B_0)\frac{R^3}{r^2}\cos\theta - 3B_0 v_\varphi(\frac{R}{r})^3\cos\theta - 2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\cot\theta r B_\varphi - 2v_\theta\cot\theta B_\varphi - 2v_\theta r\cot\theta\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}$$
$$-\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}B_\varphi - v_\theta\frac{\partial B_\varphi}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}B_0(\frac{R}{r})^3\sin\theta = 0$$

(13)

با جایگذاری رابطه (12) در رابطه (7) و استفاده از روش جداسازی متغیرها داریم:

$$5 + \frac{2r}{\rho(r)v_\theta(r)}\frac{d}{dr}(\rho(r)v_\theta(r)) + \frac{1}{\cot\theta\rho(\theta)v_\theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}(\rho(\theta)v_\theta(\theta)) = 0 \qquad (14)$$

$$5 + \frac{2r}{\rho(r)v_\theta(r)}\frac{d}{dr}(\rho(r)v_\theta(r)) = 2n \qquad (15)$$

$$\frac{1}{\cot\theta\rho(\theta)v_\theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}(\rho(\theta)v_\theta(\theta)) = -2n \qquad (16)$$

که به نتیجه زیر می رسیم:

$$\rho v_\theta = \rho_0 v_0 (\frac{r}{R})^{n-5/2} \sin^{-2n}\theta \qquad (17)$$

چون در rهای بزرگ این مقدار باید صفر شود در نتیجه باید $n < 5/2$ باشد. از معادله(4) مؤلفه هـای بـردار J را بدست آورده وهمراه با رابطه(12) در معادله اولر قرار می دهیم.با توجه به تعریف فشار مؤثر به صورت زیر

$$\hat{P} = p_{gas} + \frac{B_\varphi^2}{8\pi} \qquad (18)$$

و صفر شدن مؤلفه سمتی بردار J به دلیل قطبیوار بودن میدان مغناطیسی به روابط زیر می رسیم:

$$\rho(4v_\theta \cot^2\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\cot\theta - 3\frac{v_\theta^2}{r} - \frac{2v_\theta^2}{r}\cot^2\theta - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{GM}{r^2}) + \frac{\partial \hat{P}}{\partial r} = -\frac{B_\varphi^2}{4\pi r} \qquad (19)$$

$$\rho(2\frac{v_\theta^2}{r}\cot\theta + 2v_\theta\cot\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi^2}{r}\cot\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{P}}{\partial \theta} = -\frac{B_\varphi^2}{4\pi r}\cot\theta \qquad (20)$$

$$\rho(3\frac{v_\theta v_\varphi}{r}\cot\theta + 2v_\theta\cot\theta\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta}) = \frac{B_0}{4\pi}\frac{R^3}{r^4}(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta B_\varphi) + 2r\cos\theta\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}) \qquad (21)$$

کمیت ها زیر را برای بدون بعد کردن معادلات تعریف می کنیم:

$$\tilde{\rho}(r,\theta) = \frac{\rho(r,\theta)}{\rho_0} \text{ ، } \tilde{P}(r,\theta) = \frac{\hat{P}(r,\theta)}{P_0} \text{ ، } \tilde{v}_\varphi(r,\theta) = \frac{v_\varphi(r,\theta)}{v_0} \text{ ، } \tilde{v}_\theta(r,\theta) = \frac{v_\theta(r,\theta)}{v_0}$$

$$\tilde{B}_\varphi = \frac{B_\varphi}{B_0} \text{ ، } x = \frac{r}{R} \text{ ، } \tilde{\psi}(r,\theta) = \frac{\psi(r,\theta)}{\psi_0}$$

که

$$M_d = \frac{4\pi}{3}R_d{}^3\rho_0 \text{ ، } \rho_0 = \rho(r,\theta)_{r=R_d,\theta=\pi/2} \text{ ، } \psi_0 = \frac{GM}{R_d}$$

از روابـط(19) و(20) $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ و $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ را بدسـت مـی آوریـم و در معادلـه پواسـون قـرار مـی دهـیم. بـا اسـتفاده ازرابطه(17) و اعمال فرضهای اولیه در مورد مؤلفه سمتی سرعت ومیدان مغناطیسی بدست می آوریم:

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} = -B\tilde{v}_\theta x^{5/2-n}\sin^{2n}\theta\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} - \frac{1}{x^2} + C(\frac{2\tilde{v}_\theta^2}{x}\cot^2\theta + \frac{3\tilde{v}_\theta^2}{x} - \frac{2\tilde{v}_\theta}{x}\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta}\cot\theta - 4\tilde{v}_\theta\cot^2\theta\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial x}) \qquad (22)$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta} = -B\tilde{v}_\theta x^{5/2-n}\sin^{2n}\theta\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} - C(\tilde{v}_\theta\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + 2\tilde{v}_\theta x\cot\theta\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial x} + 2\tilde{v}_\theta^2\cot\theta) \qquad (23)$$

$$\frac{\tilde{v}_\theta}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}) + \frac{\tilde{v}_\theta}{x^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta}) = Dx^{n-5/2}\sin^{-2n}\theta \qquad (24)$$

که در این معادلات B وC وD به صورت زیر تعریف می شوند وبه ترتیب بیانگر نسبت انرژی گرمـایی و انـرژی جنبشی به انرژی پتانسیل ستاره مرکزی وD معرف نقش خودگرانش می باشد.

$$D = \frac{3M_d}{M} \text{ ، } C = \frac{v_0^2}{\psi_0} \text{ ، } B = \frac{P_0/\rho_0}{\psi_0}$$

برای حل خودمشابهی معادلات متغیرهای خودمشابه زیر را در نظر می گیریم:

$$\tilde{v}_\theta(x,\theta)=\frac{\tilde{v}_\theta(\theta)}{x^{n_1}} \tag{25}$$

$$\tilde{\psi}(x,\theta)=\frac{\tilde{\psi}(\theta)}{x^{n_2}} \tag{26}$$

$$\tilde{P}(x,\theta)=\frac{\tilde{P}(\theta)}{x^{n_3}} \tag{27}$$

با جایگذاری این روابط در معادلات (22)،(23)و(24) و مساوی قرار دادن توانهای x بدست خواهیم آورد:

$$n_5=-1 \ ، \ n_3=4 \ ، \ n_2=1 \ ، \ n_1={}^1\!/_2$$

بنابراین معادلات نهایی به صورت زیر در می آیند:

$$\frac{d\tilde{v}_\theta(\theta)}{d\theta}=\frac{\tilde{\psi}(\theta)}{2\tilde{v}_\theta(\theta)C}\tan\theta+\frac{2B\tilde{P}(\theta)}{C\sin\theta\cos\theta}-\frac{\tan\theta}{2C\tilde{v}_\theta(\theta)}+\frac{3\tilde{v}_\theta(\theta)}{2}\tan\theta+2\tilde{v}_\theta(\theta)\cot\theta \tag{28}$$

$$\frac{d\tilde{\psi}(\theta)}{d\theta}=\frac{D\sin\ \theta}{\tilde{v}_\theta(\theta)}-\cot\theta\tilde{\psi}(\theta) \tag{29}$$

$$\frac{d\tilde{P}_\theta(\theta)}{d\theta}=\frac{\tilde{\psi}(\theta)}{\tilde{v}_\theta(\theta)}\left(\frac{\cos\theta\sin\theta}{B}-\frac{\sin^2\theta\tan\theta}{2B}\right)-\frac{D}{B}\frac{\sin^4\theta}{\tilde{v}_\theta(\theta)}-2\tan\theta\tilde{P}(\theta)+\frac{1}{2B}\frac{\sin^2\theta\tan\theta}{\tilde{v}_\theta(\theta)}$$
$$-\frac{3}{2B}\sin^2\theta\tilde{v}_\theta(\theta)(\tan\theta+2\cot\theta) \tag{30}$$

که این معادلات باید با شرایط مرزی مناسب به صورت عـددی حـل شـوند. شـرایط مـرزی را در $\theta={}^\pi\!/_2$ بـه صورت زیر در نظر گرفتیم(Narayan & Yi 1995):

$$\tilde{P}({}^\pi\!/_2)=P_0 \ ، \ \tilde{v}_\theta({}^\pi\!/_2)=1$$

که P_0 متغیر آزاد است.از رابطه(28) بدست می آوریم:

$$\tilde{\psi}({}^\pi\!/_2)=-4BP_0-3C+1$$

اکنون معادلات (28)،(29) و(30) با شرایط مرزی (31)،(32) و(33) را به روش ODIENT حل می کنـیم تـا تأثیر پارامترهای B، C وD را بر ساختار قرص مشاهده کنیم.

مراجع:

1. Banerjee D.,Bhatt J.R.,Das A.C.,Prasanna A.R., 1995, *APJ*, 449,789
2. Blandford R.D.,Znajek R.L.,1977*, MNRAS*, 179,433
3. Frank J.,King A.R., Raine D.J., 1995, *Accretion Power in Astrophysics, Cambridge University Press.*
4. Ghanbari J., Abbassi S.,2004, *MNRAS*, 350,1437-1444
5. Lubow S.H., Papoloizou J.C.B.,Pringle J.E.,1994*, MNRAS*, 267,235
6. Narayan R.,Yi I.,1994*, APJ*, 444,231
7. Shakura N.I., Sanyaev R.A.,1973, *A&A*, 24,337