برخی مثالهای نقض در وابستگی منفی

محمد امینی [۱] ـحمید رضا نیلی ثانی [۲] ـمهد یس آزاد بخش [۳]
۱و۳ـگروه ریاضی دانشگاه سیستان و بلوچستان ، ۲ـگروه آمار دانشگاه بیرجند
amini@math.usb.ac.ir
nilisani@yahoo.com
ma_azadbakhsh@yahoo.com

چکیده
در این مقاله برخی مثال های نقض را ارائه می دهیم که نشان می دهند ، بعضی از مفاهیم وابستگی به طور اکید ازمفاهیم دیگر قوی تر هستند . علاوه بر این مفاهیم جدیدی از وابستگی منفی که در سال های اخیر مورد توجه بسیاری از آماردانان قرار گرفته است را معرفی می نماییم . در ادامه ارتباط این مفاهیم از وابستگی با مفاهیم قبلی بررسی می شود .

کلمات کلیدی :
وابستگی منفی [۱]ـارتباط منفی [۲]ـوابستگی زبر جمعی منفی [۳]ـوابستگی منفی خطی [۴].

۱ — مقدمه

مفاهیم متعددی از وابستگی تصادفی در چهل سال گذشته معرفی شده و تحقیقات بسیاری در این زمینه انجام شده است . برخی از این مفاهیم مفاهیم دیگر را ایجاب می کنند . چون تمام مفاهیم وابستگی ، موارد کاربرد متعددی در آمار دارند ، بنابراین ، دانش ارتباط بین این مفاهیم موضوع مورد توجه بسیاری از آماردانان می باشد . بسیاری از روابط بین مفاهیم وابستگی توسط آماردانان مطالعه شده است . ([۲],[۳],[۶]) . در این مقاله ، برخی مثال های نقض را که نشان می دهند بعضی از مفاهیم وابستگی قوی تر از مفاهیم دیگر هستند را ارائه می دهیم . علاوه بر این ، مفهوم وابستگی زبر جمعی منفی مطرح می شود و ارتباط این مفهوم با مفاهیم دیگر وابستگی بررسی می شود .

تعریف ۱ — متغیرهای تصادفی $X_1, ..., X_n$ را :

الف)— وابسته منفی از پایین (LND) نامند ، اگر برای تمام مقادیر حقیقی $x_1, ..., x_n$:

---

[۱] *Negatively dependent*
[۲] *Negative associated*
[۳] *Negative superadditive dependence*
[۴] *Linearly negative dependence*

$$P[\bigcap_{j=1}^{n}(X_j \leq x_j)] \leq \prod_{j=1}^{n} P[X_j \leq x_j] \qquad (۱)$$

ب) وابسته منفی از بالا (UND) نامند ، اگر برای تمام مقادیر حقیقی $x_1, ..., x_n$:

$$P[\bigcap_{j=1}^{n}(X_j > x_j)] \leq \prod_{j=1}^{n} P[X_j > x_j] \qquad (۲)$$

ج) وابسته منفی (ND) ، نامند اگر نا مساوی های (۱) و (۲) هر دو برقرار باشند .

تعریف ۲ — متغیرهای تصادفی $X_1, ..., X_n$ را دو به دو وابسته (PND) نامند ، اگر برای هر $i \neq j$ ، X_i و X_j وابسته منفی باشند .

تعریف ۳ — متغیرهای تصادفی $X_1, ..., X_n$ را مرتبط منفی (NA) نامند اگر برای توابع بطور مختصاتی نا نزولی f و g :

$$Cov(f(X_A), g(X_B)) \leq 0 \qquad (۳)$$

که در آن A و B دو زیر مجموعه مجزا از $\{1, 2, ..., n\}$ هستند و X_A شامل متغیر هایی است که اندیس آنها در A هست .

تعریف ۴ — متغیرهای تصادفی $X_1, ..., X_n$ را بطور خطی وابسته منفی $(LIND)$ نامند ، اگر برای هر دو مجموعه مجزای A و B از $\{1, 2, ..., n\}$ و اعداد حقیقی مثبت $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ، متغیر های تصادفی $\sum_{j\in A} \lambda_j X_j$ و $\sum_{k\in B} \lambda_k X_k$ وابسته منفی باشند .

تبصره ۱ — الف) دنباله $\{X_n, n \geq 1\}$ از متغیر های تصادفی در هر مفهوم از مفاهیم فوق وابسته است ، اگر تعداد متناهی از آن وابسته باشند .

ب) برای دو متغیر تصادفی X و Y وابستگی منفی و ارتباط منفی معادلند :

$$NA \Leftrightarrow ND$$

۲— وابستگیهای ND ، NA و $LIND$:

در این بخش روابط بین ND ، NA و $LIND$ را بررسی می نماییم .

قضیه ۱([٦]) — اگر $X_1, ..., X_n$ ، متغیر های تصادفی NA باشند ، آنگاه ND نیز هستند :

$$NA \Rightarrow ND$$

گزاره ۱ — ویژگی ND ، NA را نتیجه نمی دهد .

مثال ۱ — فرض کنید X_1, X_2, X_3 ، متغیر های تصادفی تعریف شده روی فضای احتمال $([0, 1], B, P)$ باشند و $X_1(w) = I_{[0,\frac{1}{2}]}(w)$ ، $X_2(w) = I_{[\frac{3}{10},\frac{8}{10}]}(w)$ و

$X_3(w) = I_{[\frac{4}{10},\frac{6}{10}]\cup[\frac{8}{10},1]}(w)$ ، داریم :

$P(0,0,1)=\frac{2}{10}$ ، $P(0,1,0)=\frac{2}{10}$ ، $P(0,0,0)=0$

$P(0,1,1)=\frac{1}{10}$ ، $P(1,0,0)=\frac{3}{10}$ ، $P(1,0,1)=0$

$P(1,1,0)=P(1,1,1)=\frac{1}{10}$

متغیر های تصادفی X_1,X_2,X_3 ،ND هستند ، ولی اگر توابع غیر نزولی (نسبت به هر مولفه) f و g را به صورت زیر در نظر بگیریم ، داریم :

$$f(X_1,X_2)=\begin{cases}1 & X_1>\frac{1}{2}, X_2>\frac{1}{2}\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

و

$$g(X_3)=I_{(\frac{1}{2},\infty)}(X_3)$$

$$Cov(f(X_1,X_2),g(X_3))=P[\cap_{i=1}^{3}(X_i>\frac{1}{2})]-P[X_1>\frac{1}{2},X_2>\frac{1}{2}].P[X_3>\frac{1}{2}]$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{2}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{2}{100}>0$$

در نتیجه X_1,X_2,X_3 ، NA نیستند .

گزاره ۲ — اگر $X_1,X_2,...,X_n$ متغیر های تصادفی ND باشند ، در حالت کلی الزاماً $f_1(X_1),...,f_n(X_n)$، برای تمام توابع ND نیستند .

مثال ۲ ([۱]) — فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توام زیر باشند :

$$P(-1,-1)=P(1,0)=0 \quad , \quad P(-1,1)=P(1,-1)=\frac{2}{9}$$

$$P(0,1)=P(-1,0)=P(0,0)=P(0,-1)=P(1,1)=\frac{1}{9}$$

الف) متغیر های X_1 و X_2 ، ND هستند .

ب) متغیر های X_1 و ${X_2}^2$ ، ND نیستند .

ج) متغیر های ${X_1}^2$ و ${X_2}^2$ ، ND نیستند .

د) متغیر های $|X_1|$ و $|X_2|$ ، ND نیستند .

گزاره ۳ — ویژگی UND ، LND را نتیجه نمی دهد .

مثال ۳ ([۳]) — فرض کنید X_1,X_2,X_3 دارای تابع احتمال توام زیر باشند :

$$P(0,0,0)=P(1,1,0)=P(1,0,1)=P(0,1,1)=\frac{1}{4}$$

متغیر های $X_۱, X_۲, X_۳$ ، UND هستند ولی LND نیستند ، زیرا :

$$P[X_۱ \leq ۰, X_۲ \leq ۰, X_۳ \leq ۰] = \frac{۱}{۴} > P[X_۱ \leq ۰].P[X_۲ \leq ۰].P[X_۳ \leq ۰] = \frac{۱}{۸}$$

گزاره ۴ — ویژگی LND ، UND را نتیجه نمی دهد .

مثال ۴ ([۳]) — فرض کنید $X_۱, X_۲, X_۳$ دارای تابع احتمال توام زیر باشند :

$$P(۱,۱,۱) = P(۰,۰,۱) = P(۰,۱,۰) = P(۱,۰,۰) = \frac{۱}{۴}$$

متغیر های $X_۱, X_۲, X_۳$ ، LND هستند ولی UND نیستند ، زیرا :

$$P[X_۱ > ۰, X_۲ > ۰, X_۳ > ۰] = \frac{۱}{۴} > P[X_۱ > ۰].P[X_۲ > ۰].P[X_۳ > ۰] = \frac{۱}{۸}$$

گزاره ۵ — ویژگی PND ، ND را نتیجه نمی دهد .

مثال ۵ ([۳]) — فرض کنید $\Omega = \{۱, ۲, ..., ۸\}$ و $i = ۱, ..., ۸$ ، $P[\{i\}] = \frac{۱}{۸}$ و $A_۱ = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ $A_۲ = \{۳, ۴, ۵, ٦, ۸\}$ و $A_۳ = \{۲, ۴, ۵, ۷, ۸\}$. اگر $X_۱ = I_{A_۱}$ و $X_۲ = I_{A_۲}$ و $X_۳ = I_{A_۳}$ ، آنگاه برای هر $i \neq j$ ، X_i و X_j ، ND هستند ولی $X_۱, X_۲, X_۳$ ، ND نیستند ، زیرا :

$$P[X_۱ > ۰, X_۲ > ۰, X_۳ > ۰] = \frac{۲}{۸} > P[X_۱ > ۰].P[X_۲ > ۰].P[X_۳ > ۰] = (\frac{۵}{۸})^۳$$

گزاره ٦ — ویژگی ND ، $LIND$ را نتیجه نمی دهد .

مثال ٦ — فرض کنید $X_۱, X_۲, X_۳$ دارای تابع احتمال توام زیر باشند :

$$P(۰,۰,۰) = P(۱,۰,۱) = ۰ \quad , \quad P(۰,۰,۱) = P(۰,۱,۰) = \frac{۲}{۱۰}$$

$$P(۱,۰,۰) = \frac{۳}{۱۰} \quad , \quad P(۰,۱,۱) = P(۱,۱,۰) = P(۱,۱,۱) = \frac{۱}{۱۰}$$

الف) متغیر های $X_۱, X_۲, X_۳$ ، ND هستند([۳]) .

ب) متغیر های $X_۱, X_۲, X_۳$ ، $LIND$ نیستند ، زیرا اگر $Y = X_۱ + X_۲$ و $Z = X_۳$ و $P(i,j) = P[Y = i, Z = j]$ ، آنگاه :

$$P(۰,۱) = \frac{۲}{۱۰} \quad , \quad P(۰,۰) = ۰ \quad , \quad P(۱,۰) = \frac{۵}{۱۰}$$

$$P(۱,۱)=P(۲,۰)=P(۲,۱)=\frac{۱}{۱۰}$$

و

$$P[Y\leq ۱, Z\leq ۰]=P(۰,۰)+P(۱,۰)=\frac{۵}{۱۰}>P[Y\leq ۱].P[Z\leq ۰]=\frac{۸}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۰}=۰.۴۸$$

گزاره ۷ — $NA\Rightarrow LIND$

اثبات — با قرار دادن $f(X_A)=\sum_{j\in A}\lambda_j X_j$ و $g(X_B)=\sum_{k\in B}\lambda_k X_k$ که در آن $A\cap B=\phi$ ، بنا به تعریف متغیر های NA ، داریم :

$$Cov(f(X_A),g(X_B))\leq ۰$$

از اینکه در حالت دو متغیره مفاهیم NA و ND معادلند ، نتیجه می شود که متغیر های $\sum_{j\in A}\lambda_j x_j$ و $\sum_{k\in B}\lambda_k x_k$ ، ND هستندو بنابرین دنباله $\{X_n, n\geq ۱\}$ ، $LIND$ است .

گزاره ۸ — ویژگی $LIND$ ، NA را نتیجه نمی دهد .

مثال ۷ — فرض کنید $X_۱, X_۲, X_۳$ دارای تابع احتمال توام زیر باشند :

$$P(۰,۰,۰)=۰,\quad P(۱,۱,۱)=\frac{۳}{۱۵}$$

$$P(۰,۰,۱)=P(۰,۱,۰)=P(۱,۰,۰)=P(۱,۱,۰)=P(۰,۱,۱)=P(۱,۰,۱)=\frac{۲}{۱۵}$$

الف) به سادگی می توان نشان داد که متغیر های $X_۱, X_۲, X_۳$ ، $LIND$ هستند .

ب) متغیر های $X_۱, X_۲, X_۳$ ، NA نیستند ، زیرا اگر

$$f(X_۱,X_۲)=\begin{cases}(X_۱-\frac{۱}{۱۵})(X_۲-\frac{۱}{۱۵}), & X_۱>\frac{۱}{۲}, X_۲>\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۱۵^۲}, & o.w\end{cases}$$

و

$$g(X_۳)=\begin{cases}(X_۳-\frac{۱}{۱۵}), & X_۳>\frac{۱}{۲}\\ \frac{-۱}{۱۵}, & X_۳\leq\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

آنگاه :

$$Cov(f(X_1, X_2),\ g(X_3)) = \frac{7920}{15^4} - \frac{5940}{15^4} = \frac{1980}{15^4} > 0.$$

۳– وابستگیهای NSD ، NA ، ND و $LIND$:

در این بخش یک مفهوم جدید وابستگی را معرفی و سپس ارتباط این مفهوم با مفاهیم دیگر وابستگی بررسی می شود .

تعریف ۱ — تابع $f : R^n \to R$ را زبر پیمانه ای $(supermodular)$ نامند (زبر جمعی یا Lـزبر جمعی نیز می گویند) ، اگر :

$$f(x \vee y) + f(x \wedge y) \geq f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in R^n \qquad (1)$$

که در آن $x \vee y = (max(x_1, y_1), ..., max(x_n, y_n))$ و $x \wedge y = (min(x_1, y_1), ..., min(x_n, y_n))$.

همچنین تابع $f(.)$ را زیر پیمانه ای $(submodular)$ (زیرجمعی یا Lـزیر جمعی)نامند ، اگر عکس نامساوی فوق برقرار باشد .

تبصره ۱ — الف) تابع $f(.)$ زبر پیمانه ای است اگر و تنها اگر $-f$ ، زیر پیمانه ای باشد .

ب)اگر $f(.)$ دو بار مشتق پذیر باشد ،آنگاه f زبر پیمانه ای است اگر و تنها اگر برای هر $i \neq j$ و $x \in R^n$ ، $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i . \partial x_j} \geq 0$.

تعریف ۲ — متغیر تصادفی X کوچکتر از Y در ترتیب محدب صعودی است و با نماد $X \preceq_{icx} Y$ نشان داده می شود ، اگر برای هر تابع محدب صعودی f که امید ریاضی ها وجود دارد ،

$$Ef(X) \leq Ef(Y)$$

تعریف ۳ — بردار تصادفی $X = (X_1, ..., X_n)$ کوچکتر از بردار تصادفی $Y = (Y_1, .., Y_n)$ در ترتیب زبر پیمانه ای نامیده می شود و با نماد $X <\preceq_{sm} Y$ نشان می دهند اگر برای تمام توابع f که زبرپیمانه ای هستند و $Ef(X) < \infty$ و $Ef(Y) < \infty$،آنگاه $Ef(X) \leq Ef(Y)$

قضیه ۱ ([۲]) — فرض کنید $X_1, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی مرتبط منفی (NA) و ${X_1}^*, ..., {X_n}^*$ متغیر های تصادفی مستقل و هم توزیع با X_i ها باشند ،آنگاه :

$$(X_1, ..., X_n) \preceq_{sm} ({X_1}^*, ..., {X_n}^*)$$

گزاره ۱ ([۲]) — تحت شرایط قضیه ۱ برای هر تابع φ که یکنوا و زبر پیمانه‌ای است ،

$$\varphi(X_1, ..., X_n) \preceq_{icx} \varphi({X_1}^*, ..., {X_n}^*)$$

تبصره ۲ — اگر $f : R \to R$ یک تابع محدب صعودی و $\varphi : R^n \to R$ یک تابع یکنوا و زبر پیمانه ای باشد ، آنگاه $fo\varphi$ یک تابع زبر پیمانه ای است .

ب) توابع $f_1(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ و $f_2(x_1, ..., x_n) = max_{1<k\leq n} \sum_{i=1}^{k} x_i$ و $f_3(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ ، $(a_i > 0)$ ، نسبت به هر مولفه صعودی و زبر پیمانه ای هستند .

مثال ۱ — فرض کنید $X_1, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی مرتبط منفی (NA) و $X_{(1)}$ و $X_{(n)}$ ، آماره های مرتب اول و اخر آنها باشند ،

الف) توابع $f_1(x) = x_{(1)}$ و $f_2(x) = x_{(n)}$ به ترتیب زبر پیمانه ای و زیر پیمانه ای هستند ، بنابرین با استفاده از قضیهٔ۱ داریم :

$$EX_{(1)} \leq EX^*_{(1)} \leq EX^*_{(n)} \leq EX_{(n)}$$

ب)اگر $S_n{}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ آنگاه $S_n{}^2$ ، یک تابع زیر پیمانه ای است و بنابراین :

$$ES_n{}^2 \geq ES_n{}^{*2}$$

که در آن $X_1{}^*, ..., X_n{}^*$ متغیر های تصادفی مستقل و هم توزیع X_i ها هستند و $S_n{}^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i{}^* - \overline{X^*})^2$.

تعریف ۴ — بردار تصادفی $X = (X_1, ..., X_n)$ وابسته زبر جمعی منفی (NSD) نامیده می شود ، اگر برای هر تابع زبر جمعی φ :

$$E\varphi(X) \leq E\varphi(X^*)$$

که در آن $X_i{}^*$ ها ،مستقل از هم و هم توزیع با X_i ها هستند

تعریف فوق توسط هو (۲۰۰۰) مطرح و ویژگیهای اساسی متغیرهای تصادفی NSD ، چند قضیهٔ اساسی و برخی توزیع های چند متغیرهٔ دارای این ویژگی مطالعه شد . علاوه بر این وی در مقاله خود این مسئله را مطرح کرد که آیا مفهوم NA مفهوم NSD را ایجاب می کند یا خیر ؟ این سوال در سال (۲۰۰۴) ، توسط کریستفید و واگلاتو ثابت شد .

قضیه ۲ ([۲]) — $NA \Rightarrow NSD$.

ویژگیهای متغیرهای تصادفی NSD ([۴]) :

۱— برای هر زوج تصادفی (X, Y)، $NA \Leftrightarrow NSD$.

۲— اگر $X_1, ..., X_n$ ، NSD باشند ، آنگاه ND هستند . ($NSD \Rightarrow ND$)

۳— اگر $X_1, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی NSD و $f_1(.), ..., f_n(.)$ توابع صعودی باشند ، آنگاه $f_1(X_1), ..., f_n(X_n)$ نیز NSD هستند .

۴– اگر $\mathbf{X}=(X_1,...,X_n)$ و $\mathbf{Y}=(Y_1,...,Y_m)$ بردار های مستقل از هم و $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ ، NSD باشند ، آنگاه بردار $(X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_m)$ نیز NSD است .

۵– تحت شرایط (۴) ، اگر $m=n$ ، آنگاه $(X_1+Y_1,...,X_n+Y_n)$ ، NSD است .

۶– اگر $X_1,...,X_n$ ، NSD و برای هر $i\neq j$ ، $\rho(X_i,X_j)=0$ آنگاه $X_1,...,X_n$ تواماً مستقلند .

۷– اگر $(X_1,...,X_n)$ ، NSD باشد ، آنگاه $(X_{\pi_1},...,X_{\pi_n})$ برای هر جایگشت $(\pi_1,...,\pi_n)$ از $\{1,2,...,n\}$ ، NSD است .

۸– اگر $(X_1,...,X_n)$ ، NSD باشد ، آنگاه $(X_{i_1},X_{i_2},...,X_{i_m})$ برای هر $1\leq i_1\leq i_2\leq...\leq i_m$ ، $2\leq m\leq n$ نیز NSD است .

گزاره ۲ – $NSD\Rightarrow PND$

گزاره ۳ – الف) ویژگی NSD ، $LIND$ را نتیجه نمی دهد .

ب) ویژگی NSD ، NA را نتیجه نمی دهد .

مثال ۲ – فرض کنید (X_1,X_2,X_3,X_4) دارای تابع احتمال توأم زیر باشد .

				(X_1,X_2)		
		$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	
	$(0,0)$	.۰۵۷۷	.۰۶۲۳	.۰۶۲۳	.۰۵۷۷	.۲۴
	$(0,1)$	.۰۶۲۳	.۰۶۷۷	.۰۶۷۷	.۰۶۲۳	.۲۶
(X_3,X_4)	$(1,0)$	.۰۶۲۳	.۰۶۷۷	.۰۶۷۷	.۰۶۲۳	.۲۶
	$(1,1)$	.۰۵۷۷	.۰۶۲۳	.۰۶۲۳	.۰۵۷۷	.۲۴
		.۲۴	.۲۶	.۲۶	.۲۴	

متغیر های تصادفی X_1,X_2,X_3,X_4 ، NSD هستند . ([۴])

الف) متغیر های X_1,X_2,X_3,X_4 ، $LIND$ نیستند زیرا اگر متغیر های X و Y را اینگونه تعریف کنیم : $X=X_1+X_2$ و $Y=X_3+X_4$ ، داریم : $P[X\leq 0,Y\leq 0]=0.0577>P[X\leq 0].P[Y\leq 0]=0.0576$ یعنی X و Y ، ND نیستند و در نتیجه بنا به تعریف ، X_1,X_2,X_3,X_4 ، $LIND$ نیستند .

ب) متغیر های X_1,X_2,X_3,X_4 ، ND هستند ([۶]) ولی NA نیستند زیرااگر :

$$f(X_1,X_2)=\begin{cases} 1 & X_1>0,X_2>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$g(X_3,X_4)=\begin{cases} 1 & X_3>0,X_4>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

آنگاه

$$Cov(f(X_۱,X_۲),g(X_۳,X_۴)) = P[\cap_{i=۱}^{۴}(X_i > ۰)] - P[X_۱ > ۰, X_۲ > ۰].P[X_۳ > ۰, X_۴ > ۰]$$

$$= P[X_۱ = X_۲ = X_۳ = X_۴ = ۱] - P[X_۱ = X_۲ = ۱].P[X_۳ = X_۴ = ۱]$$

$$= ۰.۰۵۷۷ - ۰.۲۴ \times ۰.۲۴ = ۰.۰۰۰۱$$

تبصره ۳ — هو ([۴]) ، نشان داد که برخی توزیع های چند متغیره ، مانند چند جمله ای ، فوق هندسی چند متغیره ، دیریکله ، توزیع های جایگشتی ، توزیع توام رتبه ها ، نرمال چند متغیره با ضرایب همبستگی منفی ، نمونه بدست آمده از یک جامعه متناهی به روش بدون جایگذاری و... ، NSD هستند . این نتایج هو به سادگی از قضیه (۱) و نتیجه (۱) بدست می آیند .

نتیجه گیری و پیشنهادات

الف)فرض کنید :

$G_{NA} \equiv$ خانواده کلیه توزیع های مرتبط منفی

$G_{ND} \equiv$ خانواده کلیه توزیع های وابسته منفی

$G_{NSD} \equiv$ خانواده کلیه توزیع های وابسته زبر جمعی منفی

$G_{LIND} \equiv$ خانواده کلیه توزیع های وابسته خطی منفی

$G_{PND} \equiv$ خانواده کلیه توزیع های دوبه دو وابسته منفی

آنگاه :

$$G_{NA} \subseteq G_{LIND} \subseteq G_{NSD} \subseteq G_{ND} \subseteq G_{PND}$$

ب) در خانواده G_{NA} ،قضایای کلاسیک حدی ـقضیه حد مرکزی ـلگاریتم مکررـقانون قوی و ضعیف اعداد بزرگ ـهمگرایی کامل و برخی آزمون های ناپارامتری اثبات شده است . در رابطه با ازمون های نا پارامتری هنوز مسائل حل نشده ای وجود دارند .

ج) در خانواده G_{LIND} نیز تحقیقات زیادی انجام شد ،(بزرگنیا و تیلور ـنزاکتی و ...)

د) در خانواده G_{NSD}،تحقیقات مقدماتی انجام گرفته است ، نا مساوی های ماکسیمال کلموگروف و هایک رنی ،نیز بدست امده اند . با این حال مسائل حل نشده متعددی هنوز وجود دارند .

ذ) در خانوادهG_{ND} تحقیقات زیادی انجام شده است . (بزرگنیا ، تیلور ـامینی ـنیلی و ...) مسائل حل نشده بسیاری هنوز باقی مانده اند .

ر) در خانواده G_{PND} نیز مطالعات متعددی انجام گرفته است .(نیلی ، امینی و...)

مراجع :

[۱] Amini.M and Bozorgnia.A.(2000).Negatively dependent bounded random variables probability inequalities and The strong law of large numbers.J.App.Math.And Stoch. Anal.13,3 ,261-267.

[۲] Christofies,T.C. and Vaggelatou,E.(2004).A connection between supermodular ordering and positive/nagative association. Journal of Multi.Analysis,88,138-151.

[۳] Ebrahimi,N. and Ghosh,M.(1981).Multivariate negative dependence .Comm.Statist. A10(4) 307-337.

[۴] Hu,T.(2000).Negatively superadditive dependence of random variables with applications.Chinese ,J.Appl.Probab.Statistic.16,133-144.

[۵] Hu,T.,Muller,A. and Scarsini,M.(2004).Some counterexamples in positive dependence.Journal of statistical planning and Inference.124,153-158.

[٦] Joag-Dev,K. and proschan,F.(1983).Negative association of random variables, with applications.Ann.Statist.11,286-295.

[۷] Tchen,A.H.(1980).Ineqalities for distributions with given marginals.Ann.Probab.8,814-827.