

بسمه تعالی



تلفن: ۰۲۱-۶۶۱۶۵۶۲۷  
دورنگار: ۰۲۱-۶۶۰۰۵۱۱۷  
صندوق پستی: ۹۴۱۴-۱۱۳۶۵  
پست الکترونیکی: [iorc2007@sharif.edu](mailto:iorc2007@sharif.edu)

دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده علوم ریاضی

دبیرخانه اولین کنفرانس بین‌المللی تحقیق در عملیات



### «بنام آنکه جان را فکرت آموخت»

بدینوسیله گواهی می‌شود که براساس «چکیده مقاله» با عنوان

تحلیل ارتعاش تیرها به کمک الگوریتم بهینه سازی BFGS

که توسط پژوهشگران محترم

۱- آقای دکتر حمید اختراعی طوسی

۲- آقای مجتبی صادقیان

۳- آقای مرتضی پاکدامن

به دبیرخانه اولین کنفرانس بین‌المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات ارسال گردیده است، چکیده مذکور جهت سخنرانی در کنفرانس پذیرفته شده است.

با احترام  
کوروش عسفی

دبیر کمیته علمی کنفرانس

## BFGS

<p><b>مجتبی صادقیان</b> دانشجوی دکتری مکانیک - دانشگاه فردوسی mo_sa10@stu-mail.um.ac.ir</p>	<p><b>مرتضی پاکدامن</b> کارشناس ارشد ریاضی کاربردی - دانشگاه تربیت معلم سبزوار pakdaman.m@gmail.com</p>	<p><b>حمید اختراعی طوسی</b> استادیار گروه مکانیک - دانشگاه فردوسی مشهد ekhteraee@um.ac.ir</p>
---	---	---

اندیس‌های + و - جهت عبور موج به راست یا چپ را مشخص می‌کند.

### ۴ انتشار، انعکاس و انتقال موج

دو نقطه A و B در فاصله X از یکدیگر بر روی یک تیر یکنواخت انعطاف پذیر قرار دارند. با در نظر گرفتن حرکت بردارهای موج در سمت چپ و راست نقاط A و B به عنوان  $\mathbf{a}^+$  و  $\mathbf{a}^-$  و  $\mathbf{b}^+$  و  $\mathbf{b}^-$  رابطه بین آنها بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathbf{b}^+ = \mathbf{f}(x)\mathbf{a}^+ \quad (۳ الف)$$

$$\mathbf{a}^- = \mathbf{f}(x)\mathbf{b}^- \quad (۳ ب)$$

که در اینجا  $\mathbf{a}^+ = \begin{Bmatrix} a_1^+ \\ a_2^+ \end{Bmatrix}$ ,  $\mathbf{a}^- = \begin{Bmatrix} a_1^- \\ a_2^- \end{Bmatrix}$ ,  $\mathbf{b}^+ = \begin{Bmatrix} b_1^+ \\ b_2^+ \end{Bmatrix}$ ,  $\mathbf{b}^- = \begin{Bmatrix} b_1^- \\ b_2^- \end{Bmatrix}$

ماتریس انتشار بر حسب فاصله X به صورت زیر می‌باشد [۱۶]:

$$\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} e^{-iK_1x} & 0 \\ 0 & e^{-K_2x} \end{bmatrix} \quad (۳ ج)$$

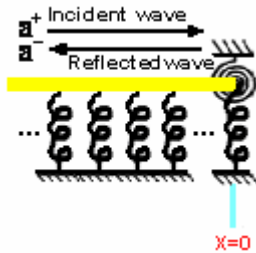
در ادامه ماتریسهای انعکاس و انتقال برای اقسام مختلفی از ناپیوستگی‌ها بدست می‌آید.

#### ۱-۴ مرز

با توجه به اینکه در مرز پدیده انتقال روی نمی‌دهد لذا در مورد مرز تنها ماتریس انعکاس محاسبه می‌شود. یک مرز کلی در شکل (۱) نشان داده شده است موج ورودی  $\mathbf{a}^+$  تولید کننده موج انعکاسی  $\mathbf{a}^-$  می‌باشد که با هم بصورت زیر ارتباط دارند.

$$\mathbf{a}^- = \mathbf{r}\mathbf{a}^+ \quad (۴)$$

ماتریس انعکاس  $\mathbf{r}$  با توجه به معادلات تعادل در مرزها به شرحی که در متن مقاله اصلی آورده شده به شکل زیر بدست می‌آید.



شکل ۱: شرایط مرزی عمومی

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_{12}^{-1}\mathbf{a}_{11} \quad (۵)$$

که در آن

$$\mathbf{a}_{11} = \begin{bmatrix} -EIPK_1 + iPK_R & EINK_2 + NK_R \\ iPEIK_1^2 - iP\rho I\omega^2 - iFK_1 + K_T & -NEIK_2^2 - N\rho I\omega^2 - FK_2 + K_T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{12} = \begin{bmatrix} EIPK_1 + iPK_R & -EINK_2 + NK_R \\ iPEIK_1^2 - iP\rho I\omega^2 - iFK_1 - K_T & -NEIK_2^2 - N\rho I\omega^2 - FK_2 - K_T \end{bmatrix}$$

**چکیده:** هنگامی که یک موج تغییر شکل داخل یک محیط ارتجاعی نظیر یک تیر منتشر شود وجود هر نوع ناپیوستگی در مسیر موج می‌تواند حرکت آنرا مختل نماید. از محلی که حرکت موج توسط مانعی محدود شود بخشی از موج انتقال و قسمتی انعکاس می‌یابد. در این مقاله ماتریسهای انتقال و انعکاس برای انواع مختلفی از ناپیوستگی‌ها مانند ترک، مرز یا تغییر در سطح مقطع برای تیری که روی بستر شناوری مانند آب قرار داده شده، بدست آمده است. در مرحله حل معادله فرکانسی و استخراج فرکانسهای تیر از روش بهینه سازی BFGS استفاده شده است.

**کلمات کلیدی -** ارتعاش تیر، تجزیه فرکانس، روش حل موج، تحلیل ماتریسی، الگوریتم BFGS.

بر اساس کیفیت عبور یا انعکاس از روی موانع امواج به سه گروه منتشر شده، انتقال یافته و منعکس شده تقسیم بندی می‌شوند [۱-۴]. مشخصه‌های انعکاسی و انتقالی امواج توسط تعدادی از محققان مورد مطالعه قرار گرفته است [۵-۷]. آنان ارتباط بین امواج منتشر شده با موجهای انتقالی و انعکاسی را در قالب ماتریسهای انتقال و انعکاس ارائه نموده‌اند. در این مطالعه نیز ماتریسهای انتقال و انعکاس برای انواع مختلفی از ناپیوستگی‌ها روی یک تیر تیموشنکو بدست آمده است. این ناپیوستگی‌ها می‌توانند شامل ترک، تغییر سطح مقطع و حتی شرایط کرانی باشند. از ماتریسهای تبدیل حاصل می‌توان برای تشکیل معادله فرکانسی بهره گرفت. به کمک روش بهینه سازی BFGS می‌توان برای ریشه یابی معادله فرکانسی تیری که دارای اقسام مختلفی از عوامل ناپیوستگی باشد استفاده نمود.

معادلات حرکت یک تیر با بار محوری ضمن در نظر گرفتن تاثیر تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی اینگونه بدست آمده است:

$$GAK \left[ \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + K^* y + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (۱ الف)$$

$$EI \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + GAK \left[ -\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t) \right] - \rho I \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (۱ ب)$$

با فرض حرکت هارمونیک با فرکانس  $\omega$  و استفاده از روش جداسازی متغیرها نتیجه می‌شود:

$$y(x) = a_1^+ e^{-iK_1x} + a_2^+ e^{-K_2x} + a_1^- e^{iK_1x} + a_2^- e^{K_2x} \quad (۲ الف)$$

$$\psi(x) = -iPa_1^+ e^{-iK_1x} - Na_2^+ e^{-K_2x} + iPa_1^- e^{iK_1x} + Na_2^- e^{K_2x} \quad (۲ ب)$$

که در آن (a) ها ضرایب نوسان خیز  $y(x)$  و  $K$ ها اعداد موج می‌باشند و داریم،

$$N = K_2 \left( 1 + \frac{\rho A \omega^2 - K^*}{K_2^2 GAK} \right) \quad \text{و} \quad P = K_1 \left( 1 - \frac{\rho A \omega^2 - K^*}{K_1^2 GAK} \right)$$

$$ER = \operatorname{Re} |A(\omega)|$$

$$EI = \operatorname{Im} |A(\omega)|$$

و در نهایت اگر فرض شود  $TE = ER^2 + EI^2$  مساله ریشه یابی به مسئله بهینه یابی نامقید تابع  $TE(\omega)$  تبدیل می‌گردد. یعنی:

$$\text{Minimize } TE(\omega)$$

بدین منظور میتوان از روشهای بهینه یابی نامقید مثل روش تندترین شیب، نیوتن یا گرادین مزدوج استفاده نمود. در این مقاله برای بهینه یابی از الگوریتم BFGS استفاده شده است. بطور کلی الگوریتم BFGS در بهینه یابی توابع چند متغیره کاربرد دارد و مبنای آن تقریبی از ماتریس هسیان (Hessian) است. بطوریکه در مرجع [۸] اشاره شده است، مرتبه همگرایی بهینه یابی بر پایه الگوریتم BFGS بالاست. استفاده از این الگوریتم امکان پرداختن به مسائل بهینه‌یابی از قبیل بهینه سازی شکل تیر را ممکن می‌نماید.

#### ۷ نتیجه‌گیری:

در این مقاله روش موسوم به حل موج برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو بر روی بستر الاستیک با ناپیوستگی‌های ساختاری متفاوت مورد استفاده قرار گرفته و ضمن محاسبه ماتریس‌های انتشار، انعکاس و انتقال، تحلیل دقیقی از ارتعاشات آزاد صورت گرفته است. توسعه این روش تحلیل بر پایه روش بهینه یابی BFGS توسط چند مثال تشریح شده و تاثیر عواملی مانند ترک، بستر و تغییر سطح مقطع در کیفیت ارتعاشات مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج تحلیل در قالب تعدادی نمودار و جدول گردآوری شده است. از مزایای استفاده از الگوریتم BFGS سرعت همگرایی بالای آن است که از نظر زمان پاسخ‌یابی در مقایسه با روشهای موجود، سریعتر به جواب می‌رسد.

#### مراجع اصلی

- [۱]. Graff K.F., ۱۹۷۵, Wave Motion in Elastic Solids, Ohio State University Press, Ohio.
- [۲]- Cremer L., Heckel M., Ungar E.E., ۱۹۸۷, Structure-Borne Sound, Springer, Berlin.
- [۳]- Doyle J.F., ۱۹۸۹, Wave Propagation in Structures, Springer, New York.
- [۴]- Mace B.R., ۱۹۸۴, Wave reflection and transmission in beams, Journal of Sound and Vibration ۹۷ ۲۳۷-۲۴۶.
- [۵]- Tan C.A., Kang B., ۱۹۹۸, Wave reflection and transmission in an axially strained, rotating Timoshenko shaft, Journal of Sound and Vibration ۲۱۳ (۳) ۴۸۳-۵۱۰.
- [۶]- Harland N.R., Mace B.R., Jones R.W., ۲۰۰۱, Wave propagation, reflection and transmission in tunable fluid-filled beams, Journal of Sound and Vibration ۲۴۱ (۵) ۷۳۵-۷۵۴.
- [۷]- Mei C., Mace B.R., ۲۰۰۵, Wave reflection and transmission in Timoshenko beams and wave analysis of Timoshenko beam structures, ASME Journal of Vibration and Acoustics ۱۲۷ (۴) ۳۸۲-۳۹۴.
- [۸]. M. S. Bazaraa, John J. Jarvis, H. D. Sherali, *Nonlinear programming*, John Wiley and Sons, New York, ۱۹۹۲.

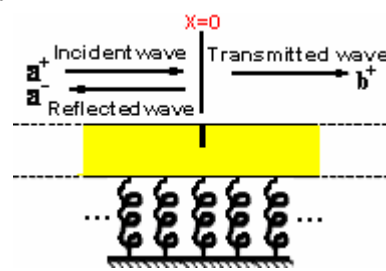
همچنین  $K_T$  و  $K_R$  ثوابت فنرهای فشاری و پیچشی می باشند. در متن مقاله تکیه گاههای ساده، درگیر و آزاد بررسی شده‌اند.

#### ۲-۴ ترک

بعنوان نوع مهمی از ناپیوستگی‌ها اکنون تاثیر ترک بررسی می‌شود. با در نظر گرفتن یک ترک لبه ای در  $x=0$  همانطور که در شکل (۲) نشان داده شده است یک مجموعه از موجهای ارسالی  $a^+$  به ترک می رسند و سپس به موجهای انتقالی و انعکاسی  $b^+$  و  $a^-$  که از طریق ماتریس انتقال و انعکاس به موج ارسالی مربوط هستند تقسیم می شود:

$$b^+ = t a^+ \quad (۶ \text{ الف})$$

$$a^- = r a^+ \quad (۶ \text{ ب})$$



شکل ۲: ترک باز

با در نظر گرفتن شرایط مرزی خاص برای محل ترک ماتریسهای انتقال و انعکاس بصورت زیر بدست می آیند.

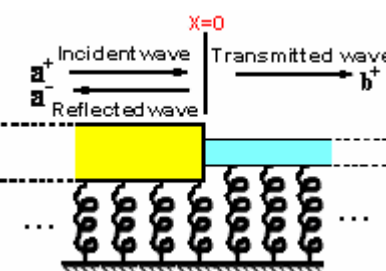
$$t = (\beta_{21} - \beta_{22}\beta_{12}^{-1}\beta_{11})^{-1} (\beta_{23} - \beta_{22}\beta_{12}^{-1}\beta_{13}) \quad (۷ \text{ الف})$$

$$r = (\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{11}^{-1}\beta_{12})^{-1} (\beta_{23} - \beta_{21}\beta_{11}^{-1}\beta_{13}) \quad (۷ \text{ ب})$$

در روابط (۲۵-الف و ب) ماتریس‌های  $2 \times 2$   $\beta$  تابع خواص ارتعاشی و هندسی تیر و ترک هستند و در متن مقاله اصلی ارائه شده‌اند.

#### ۳-۴ تغییر مقطع

فرض کنید مانند شکل (۳) دو تیر با خصوصیات متفاوت در  $x=0$  به یکدیگر متصل شده‌اند لذا در محل تقاطع موج عبوری به امواج انعکاسی و انتقالی قابل تفکیک است. ماتریس‌های انتقال و انعکاس از شرایط تعادل و پیوستگی بدست می‌آیند. این ماتریسها در متن مقال اصلی ارائه گردیده است.



شکل ۳: تغییر سطح مقطع

#### ۶ رویکرد بهینه سازی با استفاده از الگوریتم BFGS

برای تحلیل ارتعاشات تیر با اقسام مختلفی از ناپیوستگی‌ها با تلفیق ماتریسهای انتقال، انعکاس و انتشار به ماتریسی کلی که آن را  $A$  می نامیم دست پیدا می کنیم. تنها متغیر ماتریس  $A$ ، فرکانس  $(\omega)$  است. برای بدست آوردن فرکانسهای طبیعی بایستی مقادیری از  $\omega$  که دترمینان ماتریس  $A$  یعنی  $|A(\omega)|$  را صفر میکنند، بدست آوریم. دترمینان  $A$  یک تابع مختلط است. لذا می توان اجزاء حقیقی و موهومی آنرا جدا نمود.