



## بررسی انتقال حرارت در مساله جریان سکون متقارن محوری بر روی استوانه نامحدود دارای حرکت دورانی همراه با نفوذ سطحی متغیر با زمان سیال از دیواره آن

بهراد حقیقی<sup>۱</sup>، بهرنگ محمدی خلخالیان<sup>۲</sup>، اصغر برادران رحیمی<sup>۳</sup>  
 دانشکده مهندسی - دانشگاه فردوسی مشهد - صندوق پستی ۹۱۷۷۵ - ۱۱۱۱

### چکیده

جریان سکون شعاعی بر روی یک استوانه نامحدود با قدرت اولیه جریان آزاد  $\bar{k}$  دارای حرکت دورانی تابع زمان همراه با مکش و دمش سطحی متغیر با زمان سیال از دیواره استوانه و همچنین انتقال حرارت از آن برای حالت‌های دما و شار حرارتی دیواره تابع زمان، مورد بررسی و تحقیق واقع شده است. به ازای توابع زمانی خاص برای سرعت دورانی، دمای دیواره و شار حرارتی دیواره استوانه، با استفاده از تغییر متغیرهای مناسبی معادلات ناویراستوکس و معادله انرژی به معادلات کاملاً تشابهی تبدیل شده و با حل این معادلات، تعدادی حل دقیق و کاملاً تشابهی برای میدانهای سرعت و دما بدست آمده است. عمومی‌ترین شکل این توابع زمانی خاص، تابع نوسانی واگرا و میرا می‌باشد که البته خود شامل توابع زمانی ساده‌تر نوسانی هارمونیک و نمایی نیز می‌باشد. برای سایر توابع زمانی، معادلات ناویراستوکس و معادله انرژی به صورت عددی و با استفاده از روش اختلاف محدود مرکزی حل شده‌اند و بر این اساس تعدادی حل نیمه‌تشابهی نیز بدست آمده‌اند. کلیه حل‌های فوق به ازای مقادیر مختلف اعداد رینولدز  $Re = \frac{\bar{k}a^2}{2\nu}$  و پرانتل  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$  و مقادیر انتخابی نرخ نفوذ سطحی بدون بعد  $S(\tau) = \frac{U_0(\tau)}{\bar{k}a}$  بیان شده‌اند. که در آنها  $a$  شعاع استوانه،  $\nu$  لزجت سینماتیکی،  $\alpha$  ضریب پخش حرارت می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** جریان سکون متقارن محوری، مکش و دمش سطحی متغیر با زمان، معادله انرژی، حل نیمه تشابهی، حل کاملاً تشابهی.

### مقدمه

یافتن حل دقیق برای معادلات ناویراستوکس با توجه به غیرخطی بودن این معادلات بسیار دشوار می‌باشد، به طوری که اصل برهم نهی که در جریان پتانسیل کارساز است، دیگر قابل اعمال نیست. هایمنز [۱] حل دقیقی برای معادلات ناویراستوکس حاکم بر جریان دو بعدی روی صفحه تخت ارائه داد. هومان [۲] یک حل دقیق برای حالت سه بعدی معادلات ناویراستوکس از جریان سکون متقارن محوری در مقابل صفحه تخت بدست آورد. هوارث [۳] و دیوی [۴] جریان سکون سه بعدی در مقابل یک صفحه تخت را برای حالت‌های غیرمقارن بررسی کرده و نتایج خود را منتشر کرده‌اند. اولین بار وانگ [۵] حل دقیقی برای مسأله جریان سکون متقارن، روی یک استوانه نامحدود ساکن ارائه داد. گورلا [۶-۱۰] در یک سری از مقالات، جریان پایا و ناپایا و همچنین مسأله انتقال حرارت را برای جریان سکون متقارن روی استوانه متحرک با سرعت ثابت و نیز یک حالت خاص که استوانه دارای حرکت محوری نوسانی و بدون حرکت دورانی بود، را مورد بررسی قرار داد. این حالت‌های خاص در دو حالت حدی فرکانس نوسانی خیلی پایین و خیلی بالا به روش پرتوربیشن حل گردیدند. حسنین و همکارانش [۱۱] جریان متقارن محوری یک سیال ریزقطبی روی یک استوانه به طول بی‌نهایت را بررسی کردند و همچنین حل دقیقی برای مسأله انتقال حرارت در جریان متقارن محوری یک سیال ریزقطبی، روی استوانه برای حالت دما ثابت ارائه دادند. کانینگ، دیویس و ویدمان [۱۲]، مسأله جریان سکون روی استوانه چرخان با سرعت چرخشی ثابت و همراه با مکش و دمش سطحی با نرخ ثابت را بررسی کردند. تاخار، چامخا و نس [۱۳] اثر ناپایا بودن جریان سکون شعاعی متقارن محوری روی استوانه را همراه با اثر حرکت استوانه با سرعت محوری وابسته به زمان مورد مطالعه قرار دادند.

برادران رحیمی [۱۴] مسأله انتقال حرارت در جریان متقارن محوری روی یک استوانه را برای اعداد پرانتل بزرگ با استفاده از روش پرتوربیشن بررسی کرده است. اخیراً صالح و برادران رحیمی [۱۵-۱۹] در مجموعه‌ای از مقالات مسأله جریان سکون متقارن محوری بر روی استوانه نامحدود و انتقال حرارت از آن را برای حالات مختلف حرکت محوری و دورانی استوانه متغیر با زمان با مکش و دمش سطحی یکنواخت مورد بررسی قرار داده‌اند.

در این مقاله، مسأله انتقال حرارت در جریان سکون محوری بر روی استوانه‌ای نامحدود دارای حرکت دورانی وابسته به زمان همراه با نرخ نفوذ سطحی سیال متغیر با زمان، مورد بررسی قرار گرفته است.

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مکانیک، ۰۹۱۵۵۵۱۱۲۳۵، behrad\_haghighi@yahoo.com (نویسنده مخاطب)

<sup>۲</sup> کارشناس ارشد مکانیک

<sup>۳</sup> استاد گروه مکانیک

## معرفی مسأله

$$r \rightarrow \infty : \frac{\partial u}{\partial r} = -\bar{k}, \lim_{r \rightarrow \infty} rv = 0, w = 2\bar{k}z \quad (7)$$

که  $U_0(t)$  نرخ نفوذ سطحی سیال به داخل استوانه بوده،  $\omega(t)$  سرعت دورانی استوانه می‌باشد. شرایط مرزی میدان دما برای دو حالت مشخص دمای دیواره معلوم با رابطه (۸) و شار حرارتی دیواره معلوم با رابطه (۹) نشان داده شده است:

$$\begin{cases} r = a : i) T = T_w(t) \\ r \rightarrow \infty : T \rightarrow T_\infty \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} r = a : \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q_w(t)}{k} \\ r \rightarrow \infty : T \rightarrow T_\infty \end{cases} \quad (9)$$

که  $T_w$  بیانگر دمای دیواره و  $T_\infty$  بیانگر دمای جریان آزاد یا همان دمای سیال دور از دیواره می‌باشد.  $k$  نیز ضریب هدایت سیال و  $q_w$  شار حرارتی معلوم دیواره استوانه می‌باشد.

## معادلات نیمه تشابهی

با استفاده از روشهای تشابهی کردن معادلات که در مراجع [۲۶] تا [۲۸] بیان شده‌اند و با استفاده از روش سعی و خطا، نهایتاً تغییر متغیرهای زیر برای کاستن معادلات ناوراستوکس به معادلات تشابهی بی‌بعد بدست آمده‌اند:

$$u = -\bar{k} \frac{a}{\sqrt{\eta}} F(\eta, \tau) \quad (10)$$

$$v = \frac{a}{\sqrt{\eta}} G(\eta, \tau) \quad (11)$$

$$w = 2\bar{k} F'(\eta, \tau) z \quad (12)$$

$$p = \rho \bar{k}^2 a^2 P \quad (13)$$

که  $\eta = \left(\frac{r}{a}\right)^2$  و  $\tau = 2\bar{k}t$  به ترتیب زمان بی‌بعد و شعاع بی‌بعد هستند، تغییر متغیرهای فوق به طور خودکار در معادله پیوستگی صدق می‌کنند و با قرار دادن آنها در معادلات مومنتوم، روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\eta F''' + F'' + \text{Re}[1 - (F')^2 + FF'' - \frac{\partial F'}{\partial \tau}] = 0 \quad (14)$$

$$\eta G'' + \text{Re}[FG' - \frac{\partial G}{\partial \tau}] = 0 \quad (15)$$

در روابط بالا، علامت پرایم (')، بیانگر مشتق نسبت به  $\eta$  بوده و  $\text{Re} = \frac{\bar{k}a^2}{2\nu}$  همان عدد رینولدز است. با توجه به شرایط مرزی میدان سرعت - روابط (۶) و (۷) - شرایط مرزی برای معادلات (۱۴) و (۱۵) به شکل زیر خواهند بود:

$$\eta = 1 : F = S(\tau), F'(0) = 0, G = \omega(\tau) \quad (16)$$

$$\eta \rightarrow \infty : F' = 1, G = 0 \quad (17)$$

که در آن  $S(\tau) = \frac{U_0(\tau)}{\bar{k}a}$  نرخ نفوذ سطحی بدون بعد می‌باشد. برای تغییر معادله انرژی به شکل معادله نیمه تشابهی بدون بعد، برای حالت دمای دیواره معلوم، از تغییر متغیر نشان

برای درک بهتر مسأله جریان سکون بر روی استوانه، شکل (۱) را در نظر بگیرید. جریان در مختصات استوانه‌ای  $r, \phi, z$  با اجزاء سرعت متناظر  $u, v, w$  در نظر گرفته شده است. استوانه به طول نامحدود و به شعاع  $a$  بوده و این استوانه دارای حرکت دورانی حول محور خود با سرعت زاویه‌ای  $\omega(t)$  می‌باشد. در شکل (۱) حالت  $U_0(t) > 0$  نشان داده شده است که بیانگر مکش سطحی به داخل استوانه است. از آنجا که جریان از همه طرف به صورت متقارن به استوانه برخورد می‌کند، بنابراین جریان دارای تقارن محوری می‌باشد. جریان بر روی استوانه به صورت شعاعی و به طرف استوانه بوده و در برخورد با آن به سکون رسیده و تشکیل دایره سکون را می‌دهد ( $r=a, z=0$ ). ضمناً به خاطر وجود این جریان، جریان موازی محور استوانه (در راستای محور  $Z$ ) ایجاد می‌گردد که مقدار بزرگی آن بستگی به فاصله از دایره سکون دارد. علاوه بر جریان‌های شعاعی و محوری، جریان سومی نیز پیرامون استوانه و در راستای محور  $\phi$  ایجاد می‌گردد که این جریان به واسطه حرکت دورانی استوانه ایجاد می‌شود. ضمناً استوانه فوق دارای انتقال حرارت نیز بوده و در این شرایط همواره فرض شده است که تغییرات خواص سیال نسبت به تغییرات دما ناچیز و قابل صرفنظر کردن باشد به گونه‌ای که بتوان معادله انرژی را مستقل از معادلات مومنتوم در نظر گرفته و آن را جداگانه حل نمود.

## معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان فوق، همان معادلات حاکم در دستگاه مختصات استوانه‌ای سه بعدی می‌باشند. البته با توجه به این که فرض شده استوانه نامحدود باشد و با توجه به این که هیچ کدام از شرایط مرزی تابع محور  $Z$ ها نمی‌باشد از این رو پروفیل‌های سرعت  $u$  و  $v$  نمی‌توانند تابع  $Z$  باشد. در داخل لایه مرزی معادلات پیوستگی و اندازه حرکت حاکم بر جریان متقارن در مختصات استوانه‌ای عبارتند از:

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + r \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{uv}{r} = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (5)$$

و شرایط مرزی میدان سرعت، حاکم بر معادلات فوق عبارتند از:

$$r = a : u = -U_0(t), v = a\omega(t), w = 0 \quad (6)$$

داده شده در رابطه (۱۸) و برای حالت شار حرارتی دیواره معلوم از تغییر متغیر نشان داده شده در رابطه (۱۹) استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که متغیر جدید  $\Theta$ ، بیانگر دمای بی‌بعد باشد:

$$\Theta = \frac{T(\eta, \tau) - T_\infty}{T_w(\tau) - T_\infty} \quad (18)$$

$$\Theta = \frac{T(\eta, \tau) - T_\infty}{\frac{aq_w(\tau)}{2k}} \quad (19)$$

با اعمال تغییر متغیرهای فوق در معادله انرژی، معادلات نیمه‌تشابهی (۲۰) و (۲۱) به ترتیب برای حالت دمای دیواره معلوم و حالت شار حرارتی دیواره معلوم بدست می‌آیند:

$$\eta\Theta'' + \Theta' + \text{Re.Pr}(F\Theta' - \frac{\partial\Theta}{\partial\tau} - \frac{dT_w}{d\tau}) = 0 \quad (20)$$

$$\eta\Theta'' + \Theta' + \text{Re.Pr}(F\Theta' - \frac{\partial\Theta}{\partial\tau} - \frac{dq_w}{d\tau}) = 0 \quad (21)$$

در معادلات فوق  $\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$  همان عدد پراتل است. با توجه

به شرایط مرزی میدان دما (روابط (۸) و (۹))، شرایط مرزی معادله (۲۰) توسط رابطه (۲۲) و شرایط مرزی معادله (۲۱) نیز توسط رابطه (۲۳) بیان می‌شود:

$$\Theta(1, \tau) = 1, \quad \Theta(\infty, \tau) = 0 \quad (22)$$

$$\Theta'(1, \tau) = -1, \quad \Theta(\infty, \tau) = 0 \quad (23)$$

### معادلات کاملاً تشابهی

چنانچه نرخ نفوذ سطحی ثابت بوده و تابع زمان نباشد (ثابت = S)، آنگاه معادله نیمه‌تشابهی (۱۴) به معادله کاملاً تشابهی زیر کاهش می‌یابد:

$$\eta F''' + F'' + \text{Re}[1 - (F')^2 + FF''] = 0 \quad (24)$$

که این معادله خودتشابهی برای اولین بار توسط وانگ [۵] بدست آمد و حل گردید. ولی در تحقیق حاضر نرخ نفوذ سطحی تابع زمان بوده، بنابراین به روش حل معادله فوق در قسمت بعدی اشاره خواهد شد. معادلات نیمه‌تشابهی (۲۰) و (۲۱) نیز می‌توانند به معادله دیفرانسیل دقیق تبدیل شوند. برای این کار فرض می‌کنیم که تابع  $\Theta(\eta, \tau)$  به صورت زیر قابل تفکیک باشد:

$$\Theta(\eta, \tau) = \theta(\eta).Q(\tau) \quad (25)$$

با قرار دادن متغیرهای تفکیک شده فوق در معادلات (۲۰) و (۲۱)، معادله (۲۶) برای حالت دمای دیواره معلوم و معادله (۲۷) برای حالت شار حرارتی دیواره معلوم بدست می‌آید:

$$\eta \frac{\theta''}{\theta} + \frac{\theta'}{\theta} + \text{Re.Pr}(\frac{f\theta'}{\theta}) = \text{Re.Pr}(\frac{dT_w}{d\tau} + \frac{dT_w}{T_w - T_\infty}) \quad (26)$$

$$\eta \frac{\theta''}{\theta} + \frac{\theta'}{\theta} + \text{Re.Pr}(\frac{f\theta'}{\theta}) = \text{Re.Pr}(\frac{dq_w}{d\tau} + \frac{dq_w}{q_w}) \quad (27)$$

در معادلات فوق سمت چپ عبارت فقط تابع  $\eta$  و سمت راست فقط تابع  $\tau$  می‌باشد. از این رو این معادله فقط زمانی جواب خواهد داشت که طرفین آن مساوی عدد ثابتی باشند. بر این اساس تنها تابع  $Q$  ای که این خواسته را فراهم می‌سازد برای حالت دمای دیواره معلوم به شکل معادله (۲۸) و برای حالت شار حرارتی دیواره معلوم به شکل معادله (۲۹) می‌باشد:

$$Q(\tau) = \frac{c \cdot \text{Exp}[(\alpha + i\beta)\tau]}{T_w - T_\infty} \quad (28)$$

$$Q(\tau) = \frac{c \cdot \text{Exp}[(\alpha + i\beta)\tau]}{q_w(\tau)} \quad (29)$$

که در آن  $i = \sqrt{-1}$  بوده و  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $c$  همگی اعداد ثابتی هستند. اکنون تفکیک‌پذیری توابع فوق در شرایط مرزیشان را، در روابط (۳۰) و (۳۱) برای حالت دمای دیواره معلوم و در روابط (۳۲) و (۳۳) برای حالت شار حرارتی دیواره معلوم، امتحان می‌کنیم:

$$\theta(1, \tau) = 1 = \theta(1).Q(\tau), \theta(1) = 1 \rightarrow Q(\tau) = 1 \quad (30)$$

$$\Rightarrow T_w - T_\infty = c \cdot \text{Exp}[(\alpha + i\beta)\tau]$$

$$\theta(\infty, \tau) = 0 = \theta(\infty).Q(\tau), Q(\tau) = 1 \rightarrow \theta(\infty) = 0 \quad (31)$$

$$\theta'(1, \tau) = -1 = \theta'(1).Q(\tau), \theta'(1) = -1 \rightarrow Q(\tau) = 1 \quad (32)$$

$$\Rightarrow q_w(\tau) = c \cdot \text{Exp}[(\alpha + i\beta)\tau]$$

$$\theta(\infty, \tau) = 0 = \theta(\infty).Q(\tau), Q(\tau) = 1 \rightarrow \theta(\infty) = 0 \quad (33)$$

با توجه به تفکیک‌پذیری شرایط مرزی، معادلات (۲۸) و (۲۹) را به ترتیب در معادلات (۲۶) و (۲۷) قرار می‌دهیم تا معادله دیفرانسیل دقیق زیر بدست آید:

$$\eta\theta'' + \theta' + \text{Re.Pr}(F\theta' - \alpha\theta - i\beta\theta) = 0 \quad (34)$$

نکته این‌که، ترکیبات مختلف  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $c$ ، توابع زمانی مختلف دمای دیواره و شار حرارتی دیواره را ایجاد می‌کند.

### روش حل معادلات

#### حل کاملاً تشابهی

برای حل معادله تشابهی (۳۴) فرض می‌کنیم که تابع  $\theta(\eta)$  یک تابع مختلط است:

$$\theta(\eta) = \theta_1(\eta) + i\theta_2(\eta) \quad (35)$$

با قرار دادن رابطه فوق در معادله (۳۴) سیستم معادلات دیفرانسیل کوپله زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \eta\theta_1'' + \theta_1' + \text{Re.Pr}(F\theta_1' - \alpha\theta_1 - i\beta\theta_2) = 0 \\ \eta\theta_2'' + \theta_2' + \text{Re.Pr}(F\theta_2' - \alpha\theta_2 - i\beta\theta_1) = 0 \end{cases} \quad (36)$$

که شرایط مرزی این معادله با توجه به روابط (۳۰) تا (۳۳) برای حالت دمای دیواره معلوم توسط روابط (۳۷) و (۳۸) و برای حالت شار حرارتی دیواره معلوم توسط روابط (۳۹) و (۴۰) بیان می‌شوند:

$$\eta = 1 : \quad \theta_1 = 1, \theta_2 = 0 \quad (37)$$

$$\eta \rightarrow \infty : \theta_1 = 0, \theta_2 = 0 \quad (38)$$

$$\eta = 1 : \theta'_1 = -1, \theta_2 = 0 \quad (39)$$

$$\eta \rightarrow \infty : \theta_1 = 0, \theta_2 = 0 \quad (40)$$

سیستم معادلات کوپله (۳۶) با در نظر گرفتن شرایط مرزی (۳۷) تا (۴۰) برای اعداد مختلف  $\alpha, \beta, c, \text{Pr}, \text{Re}$  و توابع مختلف نرخ نفوذ سطحی سیال از سطح استوانه با استفاده از روش رانگ کوتای مرتبه ۴، همراه با استفاده از روش پرتابی حل گردیده‌اند.

### حل نیمه تشابهی

از آن جا که حل کاملاً تشابهی معادلات (۲۰) و (۲۱) تنها قابلیت تحلیل تعداد اندکی از حالت‌های مختلف انتقال حرارت از سطح استوانه را دارد و همچنین ممکن است که امکان جداسازی متغیرهای مستقل برای برخی از توابع انتقال حرارت وجود نداشته باشد، بنابراین به حل نیمه تشابهی (۱۴)، (۲۰) و (۲۱) پرداخته می‌شود. این دو معادله برای توابع مختلف زمانی  $S(\tau)$ ،  $T_w(\tau)$  و  $q_w(\tau)$  با روش تفاضل محدود حل شده‌اند. دستگاه معادلات جبری بدست آمده در هر پله زمانی منجر به یک ماتریس سه قطری می‌گردد که با الگوریتم ماتریس سه قطری قابل حل می‌باشد. برای بدست آوردن جواب در هر پله زمانی، جواب پله زمانی قبلی به عنوان حدس اول جواب پله زمانی فوق در نظر گرفته شده و با تکرار، جواب آن پله زمانی بدست می‌آید. برای پله زمانی اول ( $\tau = 0$ ) فرض می‌کنیم که شرایط حالت دائم برای کلیه زمانهای  $\tau \leq 0$  برقرار بوده و معادلات حالت دائم را براساس  $S(0)$ ،  $T_w(0)$  و  $q_w(0)$  با حدس پروفیل‌های اولیه  $\Theta$  و  $F$  به روش تکرار حل می‌کنیم. سپس با قدم گذاشتن در زمان، جواب پله‌های زمانی بعدی را بدست می‌آوریم. شرط همگرایی تکرارها و رسیدن به جواب این است که تغییرات ایجاد شده در هر نقطه از  $\Theta$  و  $F$  در دو تکرار متوالی، از مقدار بسیار کوچک  $\varepsilon$  کمتر باشد.

### ارایه نتایج

در شکل (۲) نمایه تابع  $F$  در زمانهای مختلف رسم و با هم مقایسه شده‌اند. ملاحظه می‌شود که در زمانهای بزرگتر منحنی تابع  $F$  زودتر به حالت خطی می‌رسد یا به عبارت دیگر لایه مرزی در زمانهای بزرگتر، کوچکتر است، چرا که مقدار تابع  $S(\tau) = (a\tau + b)$  با گذشت زمان افزایش یافته، یعنی مقدار مکش (با توجه به این که مقادیر  $S(\tau)$  مثبت هستند، لذا مکش سطحی برقرار است) افزایش یافته که منجر به کاهش ضخامت لایه مرزی شده است. شکل‌های (۳) و (۴)، مشتق دوم تابع  $F(\eta, \tau)$  را در زمان ( $\tau$ ) مشخص، به ترتیب به ازای مقادیر مختلف عدد رینولدز و توابع مختلف مکش و دمش سطحی نمایش می‌دهند.

شکل (۵) تابع  $\theta_1(\eta)$  را برای مقادیر  $\alpha = \beta = 0$  یعنی حالت دمای دیواره ثابت ( $T_w - T_\infty = b$ ) و برای مقادیر مختلف عدد رینولدز و شکل (۶) تاثیر عدد پراتل را بر تابع  $\theta'_1(\eta)$  برای حالت دمای دیواره به صورت تابع  $T_w(\tau) - T_\infty = b \cdot \exp(i\tau) = b[\cos(\tau) + i \sin(\tau)]$  نشان می‌دهند. با دقت در شکل‌های (۵) و (۶) مشخص می‌شود که با افزایش اعداد رینولدز و پراتل، از عمق پخشی میدان دما در سیال اطراف کاسته شده و در نتیجه ضریب انتقال حرارت افزایش می‌یابد. چرا که افزایش عدد رینولدز باعث شده که تابع  $\theta_1(\eta)$  سریعتر به مقدار ثابت خود مجانب گردد، و نیز تابع  $\theta'_1(\eta)$  با افزایش عدد پراتل زودتر به صفر مجانب شده است.

شکل (۷) تاثیر عدد پراتل بر تابع  $\theta_1(\eta)$  و شکل (۸) اثر مقادیر مختلف عدد رینولدز را بر تابع  $\theta'_1(\eta)$  را برای حالت شار حرارتی دیواره به صورت تابع  $q_w(\tau) = b \cdot \exp(i\tau) = b[\cos(\tau) + i \sin(\tau)]$  نشان می‌دهد. با دقت در شکل‌های (۷) و (۸) نیز مشخص می‌شود که با افزایش اعداد رینولدز و پراتل، از عمق پخشی میدان دما در سیال اطراف کاسته شده و در نتیجه ضریب انتقال حرارت افزایش می‌یابد. چرا که افزایش عدد پراتل باعث شده که تابع  $\theta_1(\eta)$  سریعتر به مقدار ثابت خود مجانب گردد، و نیز تابع  $\theta'_1(\eta)$  با افزایش عدد رینولدز زودتر به صفر مجانب شده است.

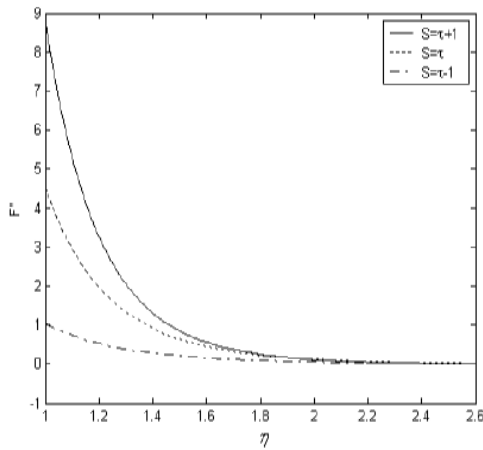
در شکل‌های (۹) و (۱۰) تاثیر توابع مختلف زمانی مکش و دمش سطحی بر تابع  $\theta_1(\eta)$  به ترتیب برای حالت‌های دمای دیواره ثابت و حالت شار حرارتی ثابت نشان داده شده است. همان طور که ملاحظه می‌شود با افزایش مقدار مکش سطحی، از عمق نفوذ دمای دیواره استوانه در سیال اطراف کاسته می‌شود یا به عبارتی ضخامت لایه مرزی حرارتی کاهش می‌یابد، چرا که در حالت  $S(\tau) = \tau + 1$  که بیانگر مکش بیشتر است نسبت به حالت  $S(\tau) = \tau - 1$  (که حتی در  $\tau < 1$  بیانگر دمش سطحی است)، نمودارهای  $\theta_1(\eta)$  زودتر به مقدار ثابت مجانب شده‌اند. نکته جالب توجه اینکه در شکل (۱۰) ملاحظه می‌شود که با افزایش مکش سطحی، دمای دیواره استوانه کم شده است.

### نتیجه‌گیری

مطالب ارائه شده در این مقاله را می‌توان به این شکل جمع‌بندی کرد که با افزایش مقدار مکش و کاهش عدد رینولدز، از ضخامت لایه مرزی کاسته می‌شود.

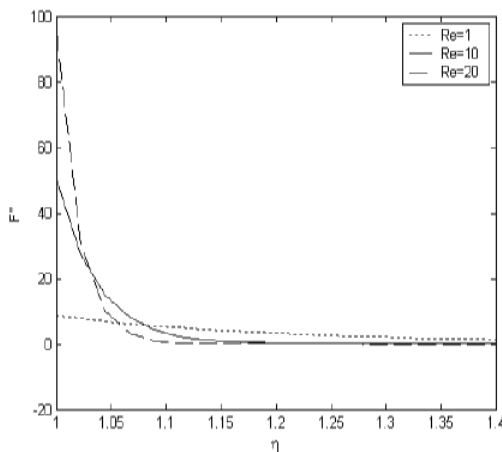
علاوه بر آن با افزایش اعداد رینولدز و پراتل، از عمق پخشی میدان دما در سیال اطراف کاسته شده و در نتیجه ضریب انتقال حرارت افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش مقدار مکش سطحی ضخامت لایه مرزی حرارتی کاهش می‌یابد و نیز دمای دیواره استوانه کم می‌شود بنابراین از افزایش مکش سطحی برای خنک کردن دمای دیواره می‌توان استفاده کرد.

- velocity," *Int. J. of Science and Technology*, vol.12, No.4, fall 2005.
- [17] Saleh, R., and Rahimi, A.B., "Stagnation flow and heat transfer on a moving cylinder with transpiration and high Reynolds number consideration," *Journal of Science and Technology, Transaction B*, Vol.28, No.B4, 2004.
- [18] Rahimi, A.B., and Saleh, R., "Axisymmetric stagnation point flow and heat transfer of a viscous fluid on a rotating cylinder with time dependent angular velocity," *Journal of fluids engineering*, (Jan 2007).
- [19] Saleh, R., and Rahimi, A.B., "Axisymmetric stagnation point flow and heat transfer of a viscous fluid on a moving cylinder with time dependent axial velocity and uniform transpiration," *Journal of Fluid Engineering-transaction of ASME*, Vol.126, No.5, November 2004.
- [20] Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw Hill Book Company Inc., New York, 1968.
- [21] Sherman, F.S., *Viscous Flow*, McGraw-hill, New York, pp.746, 1990.
- [22] Meksyn, D., "New methods in laminar boundary layer theory", Pergomon Press, (1961).
- [23] O'Neill, M.E., and Chorlton, F., "Viscous and Compressible Fluid Dynamics", John Wiley & Sons (1989)
- [24] Marques, F., Sanchez, J., and Weidman, P.D., "Generalized Couette Poiseuille flow with boundary mass transfer", *J. Fluid Mech.* 374, pp. 221-249, (1998).
- [25] Dorrepal, J.M., "An exact solution of the Navier-Stokes equation which describes non-orthogonal stagnation point flow in two dimensions," *J. Fluid Mech.*, 163, pp. 141-147, 1986.
- [26] Hansen, Arthur, G., *Similarity Analyses of Boundary Value Problems in Engineering*, Prantice-hall, Inc. Englewood Clifis, New Jersey, 1985.
- [27] Ma, P.K.H, and Hui, W.H., "Similarity solution of the two-dimensional unsteady boundary layer equations", *J. Fluid Mech.* Vol.216, pp.537-559, (1990).
- [28] Blueman, G.W., and Cole, J.D., "Similarity Method for Differential Equations", Springer, New York, (1974).
- [29] F.G.Blottner, *Finite difference methods of solution of boundary layer equations*, AIAA.J. 8(1970) 193-205.
- [30] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T., *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [31] Anderson, Dale A., Tannenhill, John C., and Pletcher, Richard H., *Computational fluid mechanics and heat transfer*, McGraw-hill, 1984.
- [32] Sewell, G., "The Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations", Wiley Interscience, second edition, (2005).
- [1] Hiemenz, K., "Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder," *Dinglers Polytech. J.*236, pp. 321-410, 1911.
- [2] Homann, F.Z., "Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel," *Zeitsch. Angew. Math. Mech.* 16, pp. 153-164, 1936.
- [3] Howarth, L., "The boundary layer in three dimensional flow," Part II. "The flow near a stagnation point," *Phill. Mag. Series*7,42, pp. 1433-1440, 1951.
- [4] Davey, A., "Boundary layer flow at a saddle point of attachment," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 10, pp. 593-610, 1951.
- [5] Wang, C., "Axisymmetric stagnation flow on a cylinder," *Quarterly of applied Mathematics*, Vol. 10, pp. 207-213, 1974.
- [6] Gorla, R.S.R., "Heat transfer in axisymmetric stagnation flow on a cylinder," *Applied Scientific Research J.*, Vol.32, pp. 541-533, November 1976.
- [7] Gorla, R.S.R., "Non-similar axisymmetric stagnation flow on a moving cylinder," *Int. J. Engineering Science*, 16, pp. 392-400, 1978.
- [8] Gorla, R.S.R., "Unsteady viscous flow in the vicinity of an axisymmetric stagnation point on a cylinder," *Int. J. Engineering Science*,17, pp.87-93, 1979.
- [9] Gorla, R.S.R., "Transient response behavior of an axisymmetric stagnation flow on a circular cylinder due to time dependent free stream velocity," *Lett. Appl. Eng. Sci.*, 16, pp. 493-502, 1978.
- [10] Gorla, R.S.R., "Unsteady laminar axisymmetric stagnation flow over a cylinder," *Dev. Mech.*9 pp. 286-288, 1977.
- [11] Hassanien, I.A., and Salma, A.A., "Flow and heat transfer of a micropolar fluid in an axisymmetric stagnation flow on a cylinder," *Energy Convers, Mgmt*, Vol.38, No.3, pp. 301-310, 1997.
- [12] Cunning, G.M., Davis, A.M.J., and Weidman, P.D., "Radial stagnation flow on a rotating cylinder with uniform transpiration," *Journal of Engineering Mathematics*, 33, pp.113-128, 1998.
- [13] Takhar, H.S., Chamkha, A.J., and Nath, G., "unsteady axisymmetric stagnation point flow of a viscous fluid on a cylinder," *Int. Journal of Engineering Science*, 37, pp. 1943-1957, 1999.
- [14] Rahimi, A.B., "Heat transfer in an axisymmetric stagnation flow on a cylinder at high prandtl numbers using perturbation techniques," *International Journal of Engineering Science*, 1999.
- [15] Saleh, R., and Rahimi, A.B., "Axisymmetric stagnation point flow of a viscous fluid on a moving cylinder with time dependent axial velocity," *International Journal of engineering*, vol. 17, No.1, February 2004.
- [16] Saleh, R., and Rahimi, A.B., "Axisymmetric radial stagnation point flow of a viscous fluid on a rotating cylinder with time dependent axial angular

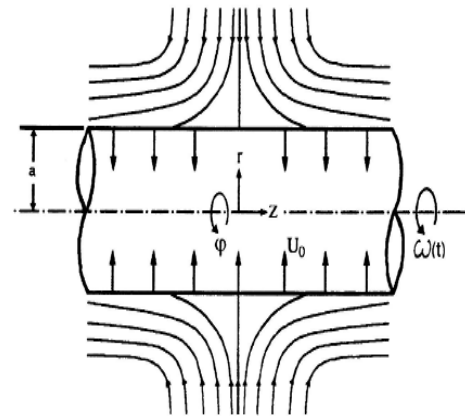


شکل ۳- نمودار تابع  $F'''$  برای توابع زمانی مختلف مکش و دمش سطحی در  $\tau = 1.5$  &  $Re = 1$

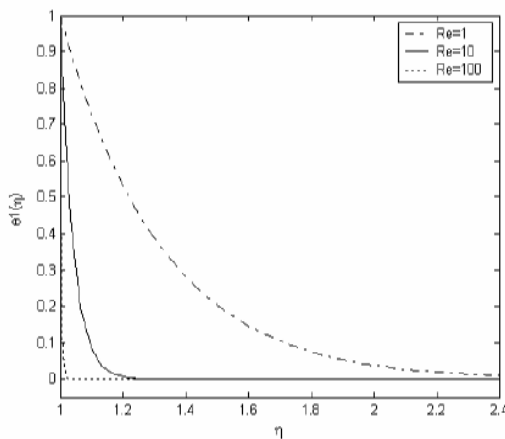
شکل‌ها و نمودارها



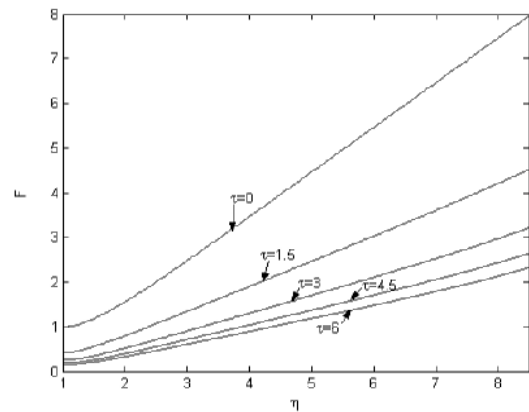
شکل ۴- نمودار تابع  $F'''$  به ازای مقادیر مختلف رینولدز برای تابع مکش و دمش سطحی  $s(\tau) = (a\tau + b)$  به ازای  $\tau = 1.5$  &  $a = b = 1$



شکل ۱- شماتیک جریان سکون شعاعی بر روی استوانه همراه با حرکت دورانی استوانه و نفوذ سطحی سیال از دیواره آن تغییرات

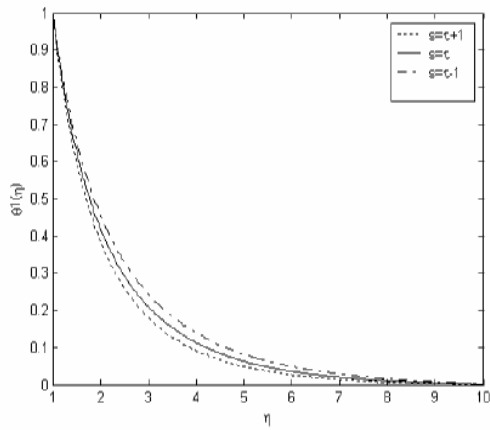


شکل ۵- تاثیر عدد رینولدز روی تابع  $\theta_1(\eta)$  برای حالت دمایی دیواره معلوم به ازای  $Pr = 1$  &  $\alpha = \beta = 0$

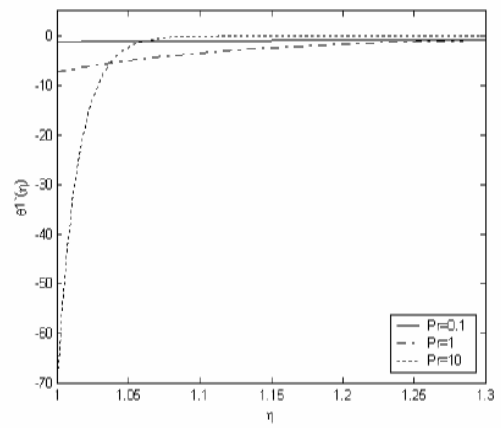


شکل ۲- شکل (۲): نمودار تابع  $F'''$  برای تابع مکش و دمش سطحی  $s(\tau) = (a\tau + b)$  به ازای  $Re = 1$  &  $a = b = 1$

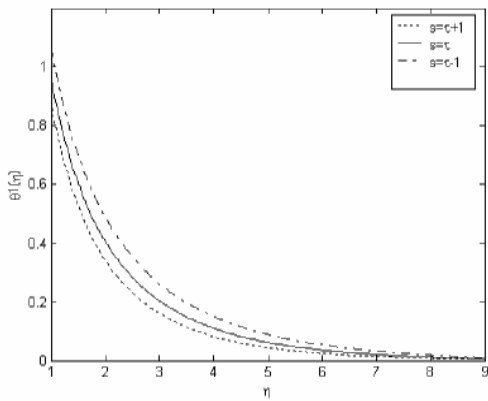
- [33] Ovsianikov, L.V., "Group Analysis of Differential Equations", Academic Press, New York, (1982).  
 [34] Kevorkian, J., "Partial Differential Equations (Analytical Solution Techniques)", Wadsworth & Brooks, (1989).  
 [35] Solin, P., "Partial Differential Equation and the Finite Element Method", Wiley Interscience, (2005).  
 [36] Livesley, R.K., "Mathematical Methods for Engineers", John Wiley & Sons, (1989).



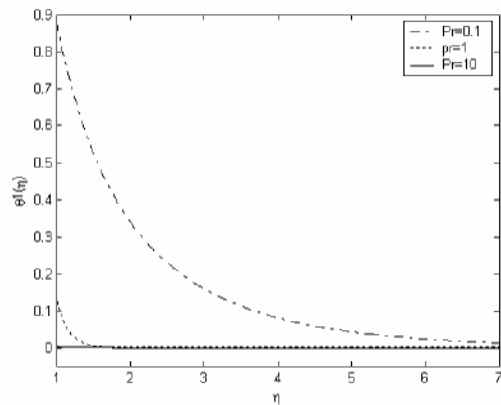
شکل ۹- تاثیر توابع زمانی مختلف مکش و دمش سطحی روی تابع  $\theta_1(\eta)$  برای حالت دمای دیواره معلوم به ازای  $Pr = 0.1 \& Re = 1 \& \alpha = \beta = 0$



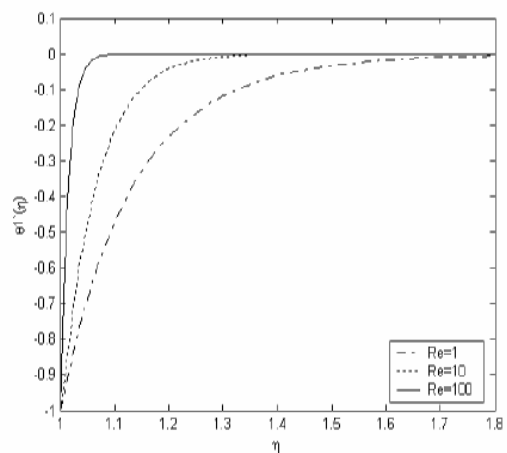
شکل ۶- تاثیر عدد پرانتل روی تابع  $\theta_1'(\eta)$  برای حالت دمای دیواره معلوم به ازای  $Re = 1 \& \alpha = 0 \& \beta = 1$



شکل ۱۰- تاثیر توابع زمانی مختلف مکش و دمش سطحی روی تابع  $\theta_1(\eta)$  برای حالت شار حرارتی دیواره معلوم به ازای  $Pr = 0.1 \& Re = 1 \& \alpha = \beta = 0$



شکل ۷- تاثیر عدد پرانتل روی تابع  $\theta_1(\eta)$  برای حالت شار حرارتی دیواره معلوم به ازای  $Re = 1 \& \alpha = 0 \& \beta = 1$



شکل ۸- تاثیر عدد رینولدز روی تابع  $\theta_1'(\eta)$  برای حالت شار حرارتی دیواره معلوم به ازای  $Pr = 1 \& \alpha = 0 \& \beta = 1$