# بررسی نظری و آزمایشگاهی رفتار تک محوری بتن ساده در فشار

**منصور قلعه‌نوی***
زاهدان، دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه مهندسی عمران

**محسنعلی شایانفر**
تهران، دانشگاه علم وصنعت ایران، گروه مهندسی سازه

## چکیده

**خصوصیات متنوع مصالح، نسبت‌های متغیر اختلاط و میزان مواد افزودنی باعث تولید بتن‌هایی با مقاومت متفاوت شده و لذا رفتار و پاسخ مشخصه بتن به بار اعمالی نظیر مدول اولیه ، مدول سکانت ،کرنش نظیر تنش حداکثر ، کرنش نهایی و شکل پذیری همواره متفاوت است . بنابراین برای درک رفتار بتن نیاز به انجام آزمایشات گسترده بوده تا بتوان رفتار مذکور را از طریق معادلات ریاضی مدل نمود . البته ارائه یک معادله ریاضی که به تنهایی بتواند رفتار تنش- کرنش بتن را در محدوده وسیعی بیان کند ، کار مشکلی است . از طرفی ارائه رابطه‌ای که بیانگر رفتار واقعی تنش- کرنش بتن باشد در تحلیل غیرخطی اجزای محدود سازه‌های بتن‌آرمه بسیار حائز اهمیت است .**

**در این مقاله ضمن ارائه برخی آزمایشات انجام شده توسط نویسندگان این مقاله بر روی نمونه‌های بتنی، رفتار هر کدام از نمونه‌ها باتوجه به مشخصات آنها مورد بررسی قرار خواهد گرفت. سپس روابط ارائه شده توسط محققین متعدد مورد بررسی قرار گرفته و با نتایج تجربی مقایسه گردیده و محدوده کاربرد هر یک از روابط مذکور بیان خواهد شد . در پایان ضریب ارتجاعی بتن مورد بررسی قرار گرفته و ضمن مقایسه با مقادیر تئوری و آئین‌نامه‌ای، یک رابطه جدید که بتواند مقدار ضریب ارتجاعی بتن را در محدوده وسیعی از مقاومتها تعیین کند، پیشنهاد می‌شود .**

**کلید واژه:** فشار تک‌محوری، مقاومت فشاری بتن، منحنی تنش-کرنش، ضریب ارتجاعی

## Theoretical and Experimental Investigation of Plain Concrete at Uniaxial Compression

**ABSTRACT:**
Advances in concrete technology over the years have made it possible to produce concrete of varying strengths, ranging from low to high, to meet the various demands of the concrete construction industry. The constitution of bulk concrete material is different for different grades of concrete. Their constitutive responses to applied loading are invariably different, and hence, it is anticipated that a single mathematical equation is not sufficient to represent the expected wide range of constitutive stress-strain behaviour of the concrete materials. This paper reviews the generic form of equations for the constitutive stress-strain relationship of different grades of concrete at monotonic uniaxial compression. An experimental investigation has been conducted to verify the use of these generic forms of equations in representing the ascending and descending branches of the stress-strain relationship of various grades of concrete.

**Keywords:** Uniaxial Compression, Concrete Strength, Stress-Strain Curve, Elastic Modulus

**مقدمه**

بطور کلی هنگامی که بر یک نمونه بتنی ، تنش فشاری تک‌محوری وارد می‌شود، ترک‌های ریزی در ناحیه تماس بین دانه‌ها و ملات سیمان ایجاد شده و باعث می‌شود که بتن، رفتار غیرخطی داشته باشد. این ترک‌های ریز برای تنشی کمتر از حدود سی درصد مقاومت فشاری بتن، نسبتا پایدار بوده و گسترخش نمی‌یابند و لذا رفتار بتن در این ناحیه کشسان خطی است. افزایش تنش باعث رشد و گسترش ترک‌های ریز، کاهش سختی مصالح و در نتیجه رفتار غیرخطی بتن می‌شود.گسترش ترک‌های ریز در داخل ملات، انبساط حجمی و افزایش ضریب پواسون را به همراه خواهد داشت. با بزرگ شدن ترک‌های مذکور و تبدیل آن‌ها بصورت نوار، بار اعمالی کاهش یافته و ناحیه نزولی منحنی تنش-کرنش بوجود می‌آید. سرانجام در اثر اتصال همه ترک‌های موجود به یکدیگر، بتن بطور کامل گسیخته می‌شود .

## معادلات منحنی تنش-کرنش فشاری بتن

عموماً رفتار تک‌محوری بتن با منحنی تنش- کرنش فشاری بیان می‌شود. شکل(۱) این منحنی را در حالت کلی و شکل(۲) آن را برای مقاومتهای مختلف نشان می‌دهد. در تحلیل غیرخطی اجزاء محدود سازه‌های بتن‌آرمه، نیاز به یک معادلهٔ ریاضی برای منحنی تنش- کرنش بتن است. در این قسمت تحقیق برخی معادلات ریاضی ارائه شده توسط محققین متعدد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

**۱- معادلهٔ Hognestad [۱] :**

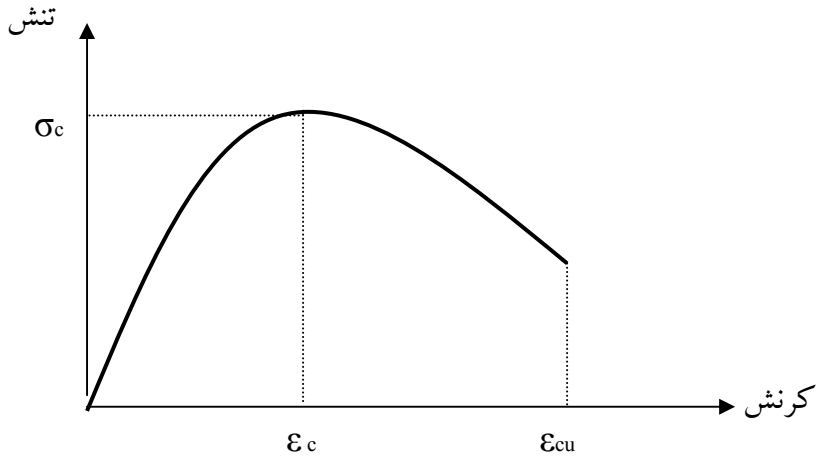
این معادله برای شاخهٔ صعودی بصورت سهمی و برای شاخهٔ نزولی بصورت خط پیشنهاد شده است:

$$0 \prec \varepsilon \prec \varepsilon_c \Rightarrow \sigma = \sigma_c \left[ 2\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - (\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c})^2 \right] \qquad (۱)$$

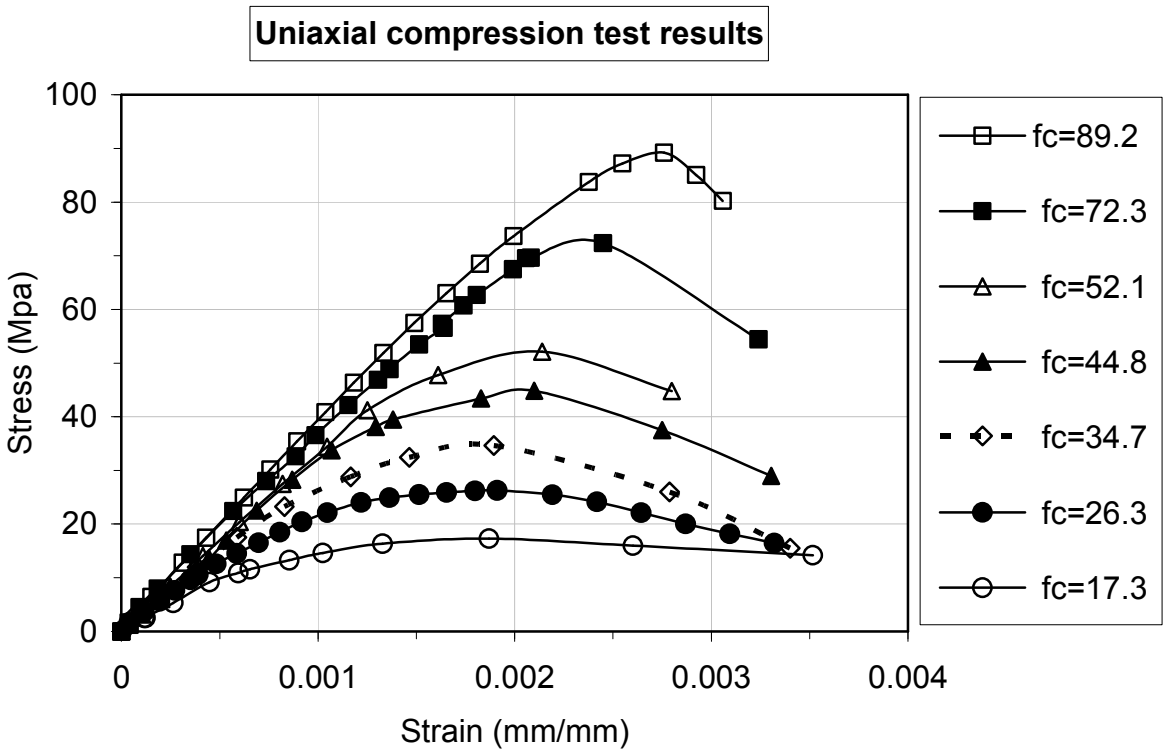
$$\varepsilon_c \prec \varepsilon \prec \varepsilon_{cu} \Rightarrow \sigma = \sigma_c \left[ 1 - 0.15(\frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c}) \right] \qquad (۲)$$

دراین معادلات $\sigma_c$ تنش فشاری حداکثر و $\varepsilon_{cu}$ کرنش فشاری نهایی بتن می‌باشندکه درشکل(۱) نشان داده شده‌اند. ضمناً نسبت زیر مدول سکانت مربوط به تنش حداکثر می‌باشد :

$$E_c = \sigma_c / \varepsilon_c \qquad (۳)$$




**شکل (۱):** نمایش منحنی تنش-کرنش فشاری بتن




**شکل(۲):** منحنی های تنش-کرنش فشاری بتن براساس نتایج آزمایشگاهی

مدول مماسی اولیه، با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۱) در نقطه $\varepsilon = 0$ بدست می‌آید :

$$E_0 = d\sigma / d\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} = 2\sigma_c / \varepsilon_c = 2E_c \qquad (۴)$$

**۲- معادلهٔ Smith,Young [۲] :**

این معادله برای هر دو شاخهٔ صعودی و نزولی منحنی تنش- کرنش بتن بصورت زیر ارائه شده است :

$$\sigma = E_c \varepsilon \exp\left(1 - \varepsilon / \varepsilon_c\right) \qquad (۵)$$

مدول مماسی اولیه، با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۵) در نقطه $\varepsilon = 0$ بدست می‌آید :

$$E_0 = 2.7182 E_c \qquad (۶)$$

**۳- معادلهٔ Saenz [۳] :**

آقای سائنز بر اساس منحنی‌های انتخابی برای بارگذاری فشاری، معادلهٔ ریاضی زیر را برای شاخهٔ صعودی منحنی تنش- کرنش پیشنهاد نمود :

$$\sigma = E_0 \varepsilon / \left[1 + \left(E_0 / E_c - 2\right)\left(\varepsilon / \varepsilon_c\right) + \left(\varepsilon / \varepsilon_c\right)^2\right] \qquad (۷)$$

**۴- معادلهٔ Darwin, Pecknold [۴] :**

آقایان داروین و پکنولد در تحلیل غیرخطی سازه‌های بتن‌آرمه به روش اجزاء محدود از منحنی استفاده کردند که بر اساس نتایج آزمایشات انجام شده توسط کارسون و جیرسا [۵] بدست آورده بودند.

شاخهٔ صعودی این منحنی معادلهٔ سائنز (معادلهٔ ۷) بوده و شاخهٔ نزولی آن به صورت یک خط راست انتخاب شده است. نقطهٔ شروع این خط، نقطهٔ $(\sigma_c, \varepsilon_c)$ و انتهای آن نقطهٔ $(0.2f_c, 4\varepsilon_c')$ است.در این رابطه $f_c$ مقاومت فشاری نمونه استوانه‌ای استاندارد و $\varepsilon_c'$ کرنش نظیر تنش $f_c$ است.

**۵- معادلهٔ Popovics [۶] :**

معادله‌ای که توسط محقق فوق ارائه شده, بصورت زیر است :

$$\sigma = nE_c\varepsilon / \left[n - 1 + (\varepsilon/\varepsilon_c)^n\right] \qquad (۸)$$

در معادلهٔ فوق رابطهٔ $E_0 / E_c = n/(n-1)$ بین مدول مماسی اولیه و مدول سکانت برقرار است.

**۶- معادلهٔ اصلاح شده Popovics [۷] :**

این اصلاح توسط آقای تورنفیلدت و همکارانش [۷] انجام شده است. آنها ملاحظه کردند که برای بتنهای با مقاومت بالا، شاخهٔ نزولی معادلهٔ (۸) با سرعت کافی پس از تنش حداکثر تنزل پیدا نمی‌کند. لذا
پیشنهاد شده‌که با اضافه کردن ضریب $k$ در مخرج معادله (۸) تنزل شاخهٔ نزولی افزایش پیدا خواهد کرد. در نتیجه رابطهٔ تنش- کرنش برای در نظرگرفتن رفتار بتن‌های با مقاومت بالا بصورت زیر ارائه شد :

$$\sigma = nE_c\varepsilon / \left[n - 1 + (\varepsilon/\varepsilon_c)^{nk}\right] \qquad (۹)$$

که در آن مقادیر $k$ , $n$ بصورت زیر بدست می‌آیند :

$$\varepsilon \prec \varepsilon_c \qquad k = 1 \qquad (۱-۱۰)$$

$$\varepsilon \succ \varepsilon_c \qquad k = 0.67 + \sigma_c / 62 \qquad (۲-۱۰)$$

$$n = 0.8 + \sigma_c / 17 \qquad (۱۱)$$

**۷-معادله yip [۸] :**

این معادله با توجه به آزمایشات انجام گرفته بر روی نمونه‌های بتن منشوری با نسبت وجه ۲/۵ تحت فشار تک محوری بصورت زیر ارائه شده است :

$$\sigma = 2.7182E_c\varepsilon / \left[1 + (\varepsilon/\varepsilon_c) + \frac{1}{2}(\varepsilon/\varepsilon_c)^2 + \frac{1}{6}(\varepsilon/\varepsilon_c)^3\right] \qquad (۱۲)$$

معادلهٔ فوق با استفاده از بسط سری توان نمائی معادلهٔ اسمیت و یانگ (رابطه ۵) بدست آمده است, جملات توان ۴ و بالاتر در این معادله حذف شده است.

## برنامه آزمایشگاهی

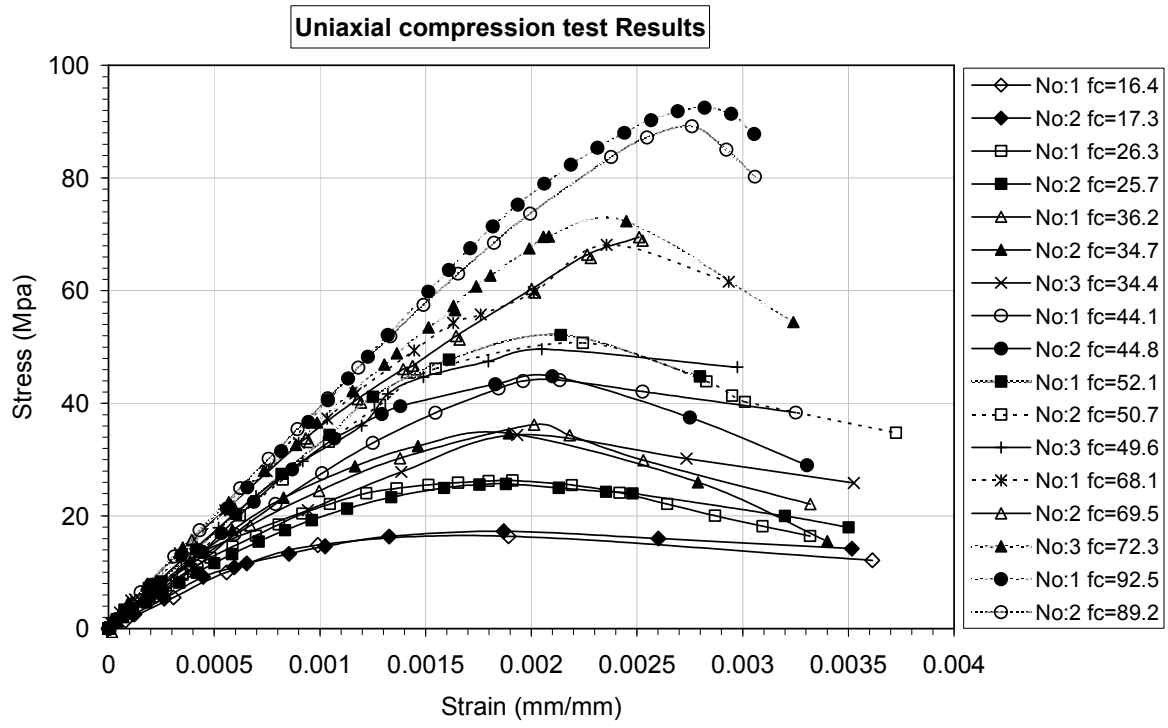
بطورکلی ۷ طرح اختلاط بتن بانسبتهای متفاوت آب به سیمان برای رده‌های مقاومتی ۱۷، ۲۶،۳۵، ۴۵،۵۰ ، ۷۰ ، ۹۱ مگاپاسکال در نظر گرفته شد. مشخصات این طرح‌ها در جدول (۱) آورده شده است.

از سیمان تیپ II تهران، شن نخودی با حداکثر اندازهٔ ۱/۲ اینچ (۱۲میلی‌متر ) و ماسه فیلردار از شرکت فربت، میکروسیلیس و فوق روان کننده از شرکت آتروپات شیمی استفاده شده است. مصالح مورد نیاز بوسیله دستگاه میکسر با ظرفیت ۰/۲۵ متر مکعب مخلوط شده است . ابتدا مصالح سنگی و مقدار آب جذب مصالح در داخل دستگاه به مدت ۳۰ ثانیه مخلوط شده و سپس برای جذب کامل آب توسط لحظه اضافه نموده و کار اختلاط تا ۱/۵ دقیقه دیگر ادامه یافته است. برای هر اختلاط ۵ نمونه استوانه‌ای استاندارد ۳۰*۱۵ (۳ عدد جهت تعیین مقاومت فشاری $f_c$ ، ۲ عدد جهت

**جدول(۱) :** مشخصات طرح اختلاط بتن

| شماره اختلاط | رده مقاومتی بتن | W/C +SCM | میکرو سیلیس (٪) | فوق‌روان کننده (٪) | آب (kg) | سیمان (kg) | میکرو سیلیس (kg) | شن (kg) | ماسه(kg) | فوق‌روان کننده (kg) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | c۱۷ | ۰/۶۳ | – | – | ۱۸۰ | ۲۸۰ | – | ۹۷۰ | ۹۰۰ | – |
| ۲ | c۲۶ | ۰/۵۲ | – | – | ۲۰۰ | ۳۸۵ | – | ۸۷۰ | ۸۸۵ | – |
| ۳ | c۳۵ | ۰/۴۵ | ۷ | – | ۱۸۰ | ۳۷۲ | ۲۸ | ۸۶۷ | ۹۰۳ | – |
| ۴ | c۴۵ | ۰/۳۵ | ۱۰ | ۱/۲ | ۱۷۵ | ۴۵۰ | ۵۰ | ۸۶۷ | ۹۰۳ | ۶ |
| ۵ | c۵۰ | ۰/۳۱ | ۱۵ | ۱/۲ | ۱۷۰ | ۴۶۷/۵ | ۸۲/۵ | ۹۲۵ | ۹۲۵ | ۶/۶ |
| ۶ | c۷۰ | ۰/۲۸ | ۱۸ | ۱/۳ | ۱۵۴ | ۴۵۱ | ۹۹ | ۹۴۵ | ۸۰۵ | ۷/۲ |
| ۷ | c۹۱ | ۰/۲۳ | ۱۸ | ۱/۴ | ۱۴۰ | ۴۹۲ | ۱۰۸ | ۱۰۵۷ | ۷۱۰ | ۸/۴ |

SCM= supplementary cementing materials




**شکل(۳):** منحنی تنش-کرنش فشاری تک‌محوری رده‌های مقاومتی c۱۷ الی c۹۱

**جدول (۲) :** آزمایشات مربوط به نمونه‌های استوانه‌ای استاندارد

| شماره اختلاط | رده مقاومتی بتن | وزن مخصوص $kg/m^3$ | مقاومت فشاری $f_c(MPa)$ | ضریب ارتجاعی $E_0(MPa)$ |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | c۱۷ | ۲۳۵۰ | ۱۶/۴ | ۲۱۲۰۰ |
| ۲ | c۲۶ | ۲۳۹۰ | ۲۶ | ۲۵۲۰۰ |
| ۳ | c۳۵ | ۲۴۳۰ | ۳۴ | ۲۹۳۰۰ |
| ۴ | c۴۵ | ۲۴۳۱ | ۴۴/۷ | ۳۰۸۰۰ |
| ۵ | c۵۰ | ۲۵۴۶ | ۴۹/۴ | ۳۱۱۰۰ |
| ۶ | c۷۰ | ۲۶۱۰ | ۶۸ | ۳۷۵۰۰ |
| ۷ | c۹۱ | ۲۶۵۰ | ۹۱/۲ | ۴۱۱۰۰ |

**جدول (۳):** مقادیر ضریب ارتجاعی ، مقاومت فشاری و کرنش نظیر مقاومت فشاری

| شماره اختلاط | رده مقاومتی بتن | شماره آزمایش | ضریب ارتجاعی $E_0(MPa)$ | مقاومت فشاری $f_c(MPa)$ | کرنش نظیر مقاومت فشاری | $E_c$ $(MPa)$ | $E_0 / E_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | c۱۷ | ۱ | ۱۹۷۹۳ | ۱۶/۴ | ۰/۰۰۱۸۹ | ۸۶۷۷ | ۲/۲۸ |
| ۱ | c۱۷ | ۲ | ۲۰۳۴۳ | ۱۷/۳ | ۰/۰۰۱۸۷ | ۹۲۵۱ | ۲/۲۰ |
| ۲ | c۲۶ | ۱ | ۲۵۳۰۵ | ۲۶/۳ | ۰/۰۰۱۹۱ | ۱۳۷۷۰ | ۱/۸۴ |
| ۲ | c۲۶ | ۲ | ۲۳۲۵۱ | ۲۵/۷ | ۰/۰۰۱۸۸ | ۱۳۶۷۰ | ۱/۷۰ |
| ۳ | c۳۵ | ۱ | ۲۷۲۹۹ | ۳۶/۲ | ۰/۰۰۲۰۱ | ۱۸۰۱۰ | ۱/۵۲ |
| ۳ | c۳۵ | ۲ | ۲۸۵۳۱ | ۳۴/۷ | ۰/۰۰۱۸۹ | ۱۸۳۶۰ | ۱/۵۵ |
| ۳ | c۳۵ | ۳ | ۲۹۲۷۹ | ۳۴/۴ | ۰/۰۰۱۹۳ | ۱۷۸۲۴ | ۱/۶۴ |
| ۴ | c۴۵ | ۱ | ۲۸۰۲۱ | ۴۴/۱ | ۰/۰۰۲۱۳ | ۲۰۷۰۴ | ۱/۳۵ |
| ۴ | c۴۵ | ۲ | ۳۱۹۷۷ | ۴۴/۸ | ۰/۰۰۲۱۰ | ۲۱۳۳۳ | ۱/۵۰ |
| ۵ | c۵۰ | ۱ | ۳۲۸۰۳ | ۵۲/۱ | ۰/۰۰۲۱۴ | ۲۴۳۴۶ | ۱/۳۵ |
| ۵ | c۵۰ | ۲ | ۳۲۲۲۲ | ۵۰/۷ | ۰/۰۰۲۲۴ | ۲۲۶۳۴ | ۱/۴۲ |
| ۵ | c۵۰ | ۳ | ۳۳۷۶۸ | ۴۹/۶ | ۰/۰۰۲۰۵ | ۲۴۱۹۵ | ۱/۴۰ |
| ۶ | c۷۰ | ۱ | ۳۶۲۳۵ | ۶۸/۱ | ۰/۰۰۲۳۶ | ۲۸۸۵۶ | ۱/۲۶ |
| ۶ | c۷۰ | ۲ | ۳۵۸۵۲ | ۶۹/۵ | ۰/۰۰۲۵۱ | ۲۷۶۸۹ | ۱/۲۹ |
| ۶ | c۷۰ | ۳ | ۳۸۰۹۷ | ۷۲/۳ | ۰/۰۰۲۴۵ | ۲۹۵۱۰ | ۱/۲۹ |
| ۷ | c۹۱ | ۱ | ۳۸۷۲۴ | ۹۲/۵ | ۰/۰۰۲۸۲ | ۳۲۸۰۱ | ۱/۱۸ |
| ۷ | c۹۱ | ۲ | ۳۹۲۶۳ | ۸۹/۲ | ۰/۰۰۲۷۶ | ۳۲۳۱۹ | ۱/۲۱ |

تعیین ضریب ارتجاعی ($E_0$) قالب گرفته شد. برای هر اختلاط ۳ نمونه استوانه‌ای ۲۰*۱۰ نیز برای ترسیم منحنی تنش-کرنش فشاری ساخته شد. تمام نمونه‌ها توسط میز ویبره متراکم شدند. نمونه‌ها پس از باز شدن از قالب به مدت ۲۸ روز بصورت مرطوب در یک اتاق بخار نگهداری شده و سپس مورد آزمایش قرار گرفتند.

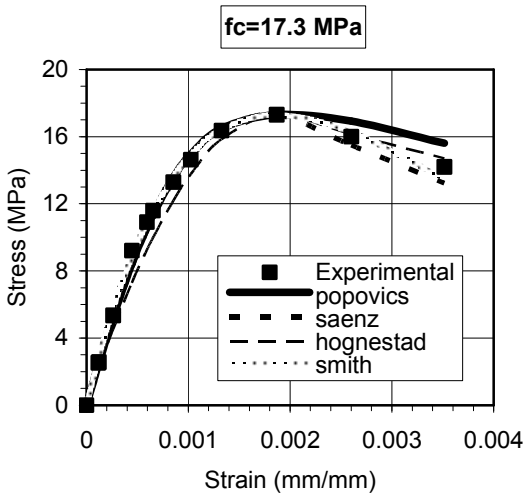
آزمایشات مربوط به تعیین مقاومت فشاری استاندارد و ضریب ارتجاعی با استفاده از دستگاههای مربوطه در بخش بتن مرکز تحقیقات ساختمان و مسکن انجام شده که مقادیر متوسط آنها برای هر کدام از رده‌های مقاومتی در جدول(۲) مشخص شده است.

## آزمایشات تعیین منحنی تنش-کرنش فشاری

برای هر اختلاط بتن، ۳ نمونه استوانه‌ای ۲۰*۱۰ سانتی‌متر قالب گرفته شد که این نمونه‌ها پس از باز شدن از قالب به مدت ۲۸ روز در اتاق بخار بصورت مرطوب نگهداری شده و سپس تحت آزمایش فشاری تک محوری قرار گرفتند.

برای اندازه‌گیری تغییر شکل، دو حلقهٔ فلزی ساخته شده و هرکدام از این حلقه‌ها توسط سه پیچ به ابتدا و انتهای نمونه بسته شدند. فاصلهٔ هر کدام از حلقه‌ها نسبت به ابتدا و انتهای نمونه ۰/۱۲۵ برابر ارتفاع نمونه در نظر گرفته شد، بطوری که طول اندازه‌گیری برای کرنش محوری نمونه تقریبا ۰/۷۵ برابر ارتفاع نمونه (۱۵ سانتی‌متر) بوده که البته مقدار دقیق آن برای هر آزمایش توسط کولیس اندازه‌گیری و یادداشت شده است. از سیستم LVDT برای تعیین تغییر شکل استفاده شد. برای این کار دو عدد تغییر مکان سنج (Displacement) بصورت متقارن در دو طرف نمونه به حلقه‌های بالا و پایین بسته شده و از طریق کابلهای متصل به دستگاه دیتالاگر (Data Logger)، مقادیر تغییر شکل محوری دو طرف نمونه و مقدار متوسط آنها در هر مرحله از بارگذاری ثبت شده است.

**عکس(۱) :** جزئیات آزمایش فشاری تک‌محوری




**شکل(۴-۱):** مقایسه منحنی‌های تئوری و تجربی

برای اندازه‌گیری نیروی محوری، یک عدد نیرو سنج (Load cell) بین نمونه و فک تحتانی دستگاه فشاری قرار گرفته و از طریق کابل متصل به دستگاه دیتالاگر، مقدار نیروی محوری فشاری در هر لحظه ثبت شده است.
برای اعمال فشار یکنواخت به نمونه، از دو عدد فیبر قرار گرفته در ابتدا و انتهای نمونه استفاده شد. جزئیات مربوط به آزمایش در عکس شماره (۱) نشان داده شده است.

## بررسی رفتار و نتایج تجربی منحنی تنش-کرنش فشاری و مقایسهٔ آنها با تئوری

برای هر کدام از رده‌های مقاومتی، ۳ نمونه استوانه‌ای ۲۰*۱۰ مورد آزمایش قرار گرفته که نتایج عددی آنها برای رده‌های مقاومتیc۱۷ ، c۲۶ ، c ۳۵، c۴۵ ، c۵۰ ،c۷۰ و c۹۱ در جدول (۳) مشخص شده و منحنی‌های تنش-کرنش فشاری تک‌محوری همه رده‌های مقاومتی در شکل (۳) جهت مقایسه با یکدیگر ملاحظه می‌شود.
از مقایسه منحنی‌های تجربی نشان داده شده در شکل (۳) با یکدیگر موارد رفتاری زیر برای بتن‌های با مقاومت متفاوت ملاحظه می‌شود :
- بتن کم‌مقاومت‌تر پس‌از تنش حداکثر، تغییرشکل بیشتری نسبت به بتن پرمقاومت ازخود نشان می‌دهد.
به عبارت دیگر بتن های با مقاومت پائین شکل پذیری بیشتری نسبت به بتن های با مقاومت بالا دارند.
- کرنش نظیر تنش حداکثر برای بتن با مقاومت بالا مقدار بیشتری نسبت به بتن با مقاومت پائین می‌باشد بطوری که این مقدار برای بتن با مقاومت ۱۶/۴ مگاپاسکال برابر۰/۰۰۱۸۹ و برای بتن با مقاومت ۹۲/۵ مگاپاسکال برابر۰/۰۰۲۸۲ می باشد .
- مدول ارتجاعی اولیه برای بتن با مقاومت بالا مقدار بیشتری را نسبت به بتن کم مقاومت‌تر از خود نشان می‌دهد. این مقدار برای بتن۱۶/۴ مگاپاسکال برابر۱۹۷۹۳ مگاپاسکال و برای بتن۹۲/۵ مگاپاسکال برابر۳۸۷۲۴ مگاپاسکال است .
- برای بتن‌های با مقاومت بالا اختلاف کمتری بین مدول ارتجاعی اولیه ($E_0$) و مدول سکانت در تنش حداکثر ($E_c$) ملاحظه می‌شود بطوری که نسبت $E_0 / E_c$ برای بتن با مقاومت ۹۲/۵ مگاپاسکال برابر ۱/۱۸ و برای بتن با مقاومت ۱۶/۴ مگاپاسکال برابر ۲/۲۸ است . این نکته نشان می‌دهد که شاخه صعودی منحنی تنش- کرنش بتن‌های با مقاومت بالا تمایل بیشتری به خطی بودن دارند .

بررسی معادلات ریاضی ارائه شده نشان می‌دهد که معادلهٔ yip (رابطه ۱۲) حالت خاصی از معادلهٔ Smith (رابطه ۵) بوده، لذا در این قسمت از تحقیق معادلات Smith, Hognestad و Saenz و Popovics اصلاح شده، مورد بررسی قرار می‌گیرند.
برای هر کدام از نمونه‌ها، منحنی تجربی تنش- کرنش رسم شده و با توجه به مقادیر $\sigma_c = f_c$ و $\varepsilon_c$ بدست آمده از آزمایش، منحنی‌های تئوری ترسیم شده‌اند. البته در معادلهٔ Saenz علاوه بر مقادیر فوق نیاز به ضریب ارتجاعی اولیه بتن $E_0$ نیز می‌باشد،که این مقدار براساس استاندارد ASTM (C469 :94) از رابطه زیر محاسبه شده و در جدول (۳) مشخص شده است.

$$E_0 = (\sigma_2-\sigma_1)/(\varepsilon_2-0.00005)$$

$\sigma_2$= تنش برابر ۴۰ درصد مقاومت فشاری
$\sigma_1$= تنش نظیر کرنش 0.00005
$\varepsilon_2$= کرنش نظیر تنش $\sigma_2$

مقایسهٔ منحنی‌های تئوری با منحنی تجربی برای هر کدام از آزمایشات تک محوری فشاری در شکل(۴) نشان داده شده است. از مقایسهٔ منحنی‌های تجربی با منحنی‌های تئوری موارد زیر ملاحظه می‌شود :

- معادله Hognestad

نتایج عددی منحنی تنش-کرنش این معادله هم‌خوانی خوبی با نتایج تجربی بتن‌های با مقاومت معمولی و متوسط (۲۶ الی ۴۵ مگاپاسکال ) در شاخه صعودی داشته، در حالی‌که برای بتن‌های با مقاومت پائین (۱۷ مگاپاسکال) و مقاومت بالا (۵۰ مگاپاسکال و بالاتر) عدم هم‌خوانی قابل‌ملاحظه‌ای مشاهده می‌شود. علت این مساله این‌است که نسبت $E_0 / E_c$ در معادله فوق مقدار ثابت ۲ می‌باشد در حالی‌که این نسبت برای بتن‌های با مقاومت پائین ، بزرگتر از ۲ و برای بتن‌های با مقاومت بالا کاهش قابل توجهی می‌یابد(برای مثال این نسبت برای بتن۱۶/۴ مگاپاسکال برابر ۲/۲۸ و برای بتن۹۲/۵ مگاپاسکال برابر ۱/۱۸ می‌باشد).

نتایج عددی این معادله در شاخه نزولی ، هم خوانی خوبی با نتایج تجربی بتن‌های با مقاومت بالاتر از ۴۵ مگاپاسکال را نشان می دهد .

- معادله Smith,Young

نتایج عددی این معادله برای مقاومت‌های مختلف، حد بالای نتایج تئوری بقیه معادلات را نشان می‌دهد و مقایسه آن با منحنی تجربی نشان می‌دهد که برای نمونه با مقاومت پائین ۱۷ مگاپاسکال جوابهای خیلی خوب و برای نمونه با مقاومت معمولی ۲۶ مگاپاسکال جوابهای نسبتا خوبی بدست می‌دهد. نتایج این معادله برای نمونه های با مقاومت بالاتر از ۳۵ مگاپاسکال هم خوانی قابل قبولی با مقادیر تجربی ندارد . البته این عدم هم‌خوانی برای بتن‌های با مقاومت بالا بیشتر است و فاصله بیشتری بین مقادیرتجربی و تئوری ملاحظه می‌شود. علت اصلی این مسئله ثابت بودن نسبت $E_0 / E_c$ به میزان ۲/۷۱۸۲ بوده که مقدار بزرگی است و باعث می‌شود جواب‌های غیر قابل قبولی برای بتن‌های با مقاومت متوسط و بالا بدست دهد .

این معادله در شاخه نزولی فقط برای بتن با مقاومت پائین ۱۷ مگاپاسکال جوابهای خوبی را از خود نشان داده و برای بقیه مقاومت‌ها جواب غیر قابل قبولی داده است .

- معادلهSaenz

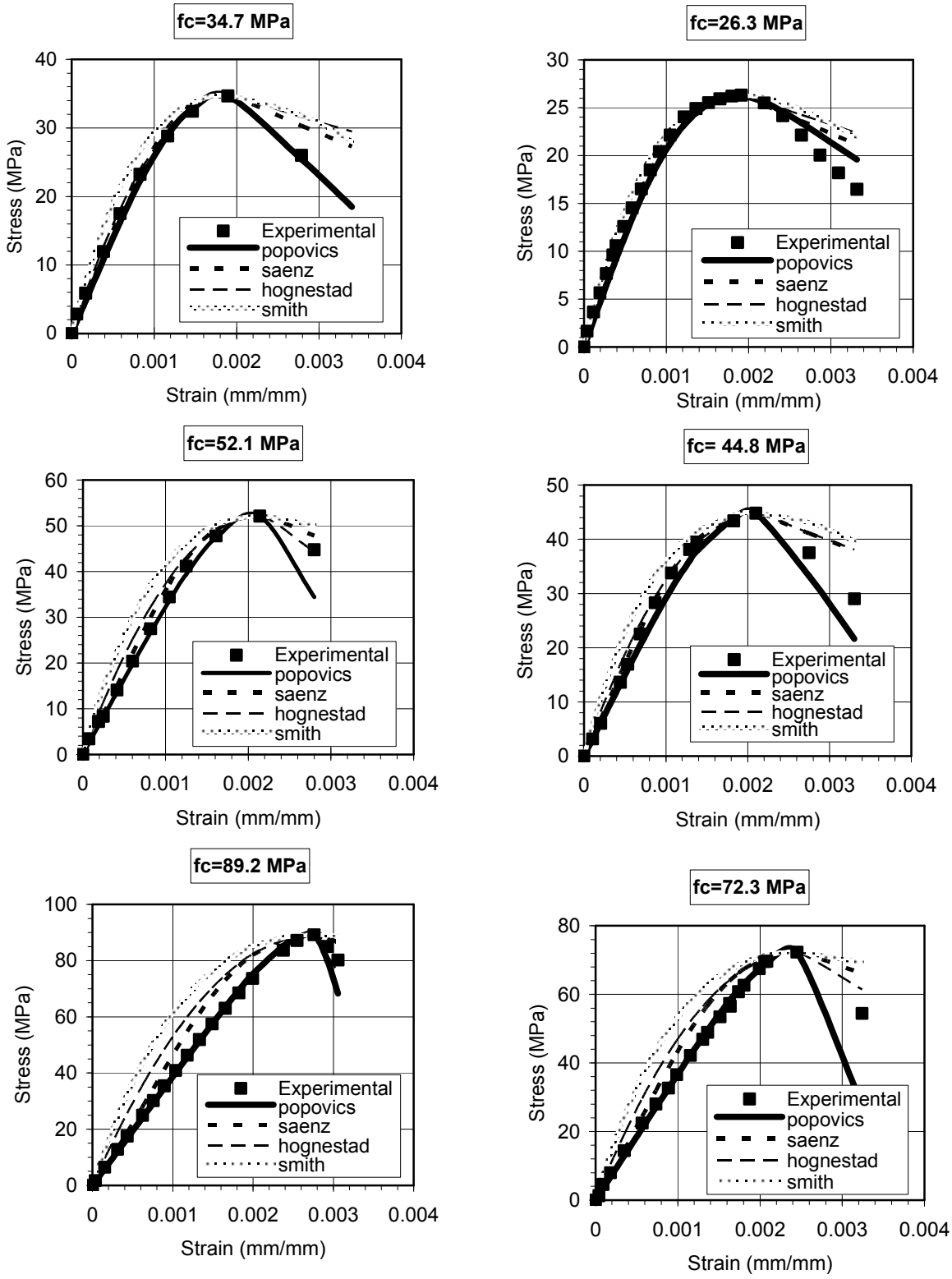
در ترسیم منحنی مربوط به این معادله علاوه بر نیاز به مقدار $\varepsilon_c$ , $\sigma_c$ به مقدار $E_0$ نیز نیاز است , در حالیکه سایر معادلات با معلوم بودن فقط $\varepsilon_c$ , $\sigma_c$ ترسیم می‌شوند. در هر صورت علیرغم اینکه مقدار $E_0$ تجربی در ترسیم معادله Saenz دخالت داده شده ، نتایج عددی این معادله فاصله قابل توجهی با مقادیر تجربی بتنهای با مقاومت بالا (بالاتر از ۵۰ مگاپاسکال ) داشته و فقط برای بتنهای با مقاومت پایین و متوسط هم‌خوانی خوبی ملاحظه می‌شود .

- معادله Popovics اصلاح شده

این معادله در مقایسه با دیگر معادلات ، حد پایین آنها را نشان می دهد و در مقایسه با مقادیر تجربی بهترین هم‌خوانی را برای بتنهای با مقاومتهای متفاوت در هر دو ناحیه صعودی و نزولی منحنی تنش-کرنش از خود نشان می‌دهد. علت اصلی هم‌خوانی خوب در ناحیه صعودی این است که نسبت $E_0 / E_c$ مقدار ثابتی نبوده و تابعی از مقاومت فشاری بتن می‌باشد. با مشتق‌گیری از معادله Popovics رابطه زیر برای $E_0$ بدست می آید :

$$E_0 / E_c = n/(n-1) \qquad (۱۳)$$

که n تابعی از مقاومت فشاری بتن می باشد . با افزایش مقاومت فشاری مقدار n بزرگ و در نتیجه نسبت $E_0 / E_c$ کاهش می‌یابد و هماهنگی خوبی با متمایل به خطی بودن منحنی تنش– کرنش بتنهای با مقاومت‌بالا پیدا می‌کند. با مقایسه منحنی‌ها در ناحیه نزولی نیز ملاحظه می‌شودکه معادله Popovics بهترین هم‌خوانی با نتایج تجربی را دارد که این امر به دلیل دخالت پارامتر k در معادله فوق می باشدکه شیب تنزل منحنی را برای مقاومت‌های مختلف کنترل می‌نماید.




**شکل(۴-۲):** مقایسه منحنی‌های تئوری و تجربی

مقایسه متوسط ضریب ارتجاعی بدست آمده از آزمایشات استاندارد فشاری (جدول۲) و منحنی‌های تنش-کرنش(جدول۳) با مقادیر بدست آمده از روابط تئوری زیر در شکل (۵) نشان داده شده است .

- رابطه ACI 363-92 برای بتن‌های با مقاومت بین ۲۱ تا ۸۳ مگاپاسکال [۹]:

$$E_0 = 6900 + 3320\sqrt{f_c} \qquad MPa \tag{۱۴}$$

- رابطه آئین‌نامه بتن ایران (آبا) [۱۰]:

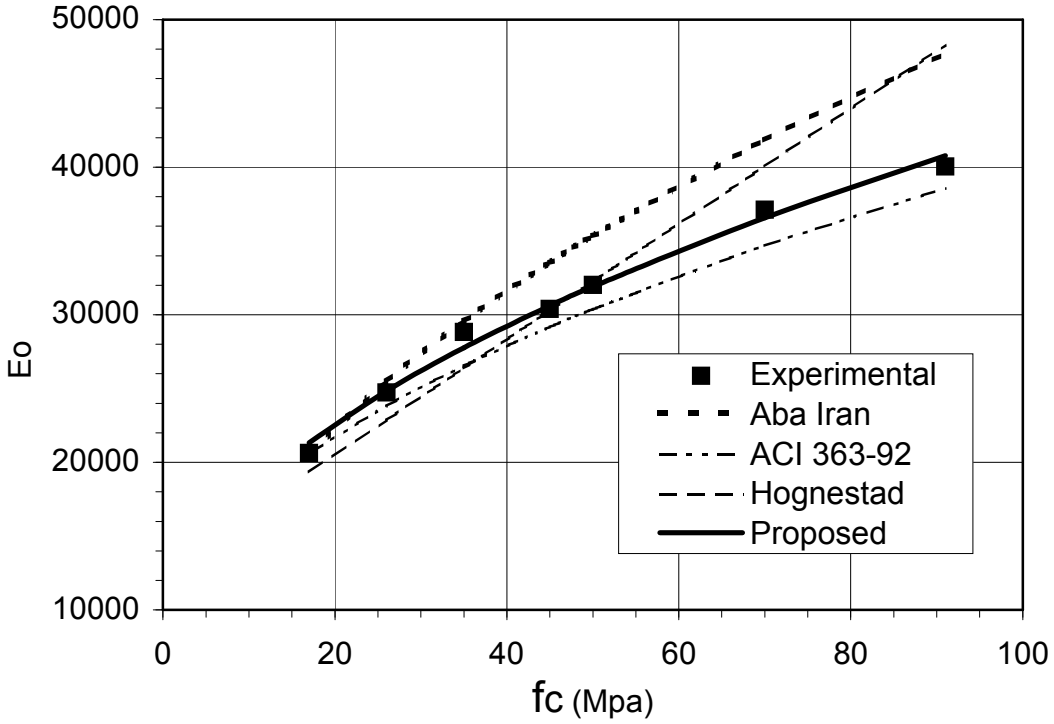
$$E_0 = 5000\sqrt{f_c} \qquad MPa \tag{۱۵}$$

- رابطه Hognestad [۱]:

$$E_0 = 12700 + 460(0.85 f_c) \qquad MPa \tag{۱۶}$$

ملاحظه می‌شود که داده‌های تجربی تا مقاومت فشاری ۳۵ مگاپاسکال تقریبا تناسب مستقیمی با ریشه دوم مقاومت دارند و در این محدوده ، نتایج آئین نامه آبا تقریبا همخوان و رابطه Hognestad حد پائین نتایج تجربی را نشان می‌دهد .

برای مقاومت‌های بالاتر از ۳۵ مگاپاسکال ، تغییرات ضریب ارتجاعی نسبت به مقاومت فشاری دارای شیب ملایم‌تری بوده و آئین نامه آبا جواب‌های دست بالا و غیرمحافظه‌کارانه‌ای داده در حالی‌که رابطه ACI 363، تقریبا هم‌آهنگ با تغییرات می‌باشد. رابطه Hognestad نیز برای مقاومت‌های بالاتر از۵۰ مگاپاسکال جواب‌های دست بالا و غیرمحافظه‌کارانه‌ای بدست می‌دهد.




**شکل(۵):** تغییرات ضریب ارتجاعی بتن بر حسب مقاومت فشاری بتن

با استفاده از اطلاعات آزمایشگاهی مذکور و استفاده از روش کمترین مربعات، رابطه جدیدی برای محاسبه ضریب ارتجاعی ، بصورت زیر پیشنهاد می‌شود :

$$E_0 = 6530 + 3590\sqrt{f_c} \qquad MPa \qquad (۱۷)$$

منحنی مربوط به رابطه پیشنهادی فوق در شکل (۵) ترسیم شده است. ملاحظه می‌شود که رابطه فوق در محدوده وسیعی از مقاومت‌های فشاری (۱۷ الی ۹۰ مگاپاسکال ) جواب‌های نزدیک به نتایج تجربی و قابل قبولی بدست می‌دهد.

## خلاصه و نتیجه‌گیری

در این تحقیق به تعداد قابل توجهی آزمایش فشاری تک محوری بر روی نمونه‌های بتن بامقاومت‌های مختلف که توسط مولفین این مقاله انجام گرفته ، اشاره شده و از بررسی رفتار و مقایسه نمونه‌ها ملاحظه شد که کرنش نظیر تنش حداکثر و مدول ارتجاعی اولیه برای بتن با مقاومت بالا مقدار بیشتری نسبت به بتن با مقاومت پائین می‌باشد. در مجموع برای بتن‌های با مقاومت بالا اختلاف کمتری بین مدول ارتجاعی اولیه ( $E_0$ ) و مدول سکانت در تنش حداکثر ( $E_c$ ) ملاحظه می‌شود و این در حالی است که این نوع بتن‌ها از شکل پذیری کمتری برخوردارند .

تعدادی از معادلات ریاضی منحنی تنش-کرنش ارائه شده توسط محققین مورد بررسی قرار گرفت و با منحنی‌های بدست آمده در آزمایشگاه برای مقاومتهای فشاری مختلف مقایسه گردید و موارد زیر ملاحظه شد :

- برای بتن با مقاومت پائین (کمتر از ۲۰ مگاپاسکال) معادله Smith در هر دو ناحیه صعودی و نزولی جوابهای خیلی خوب و معادله Saenz جوابهای نسبتا خوبی می دهد.
- نتایج عددی منحنی تنش-کرنش معادله Saenz با نتایج تجربی بتن با مقاومت معمولی (۲۰ الی ۳۰ مگاپاسکال) در هر دو ناحیه صعودی و نزولی هم خوانی خوبی دارد.
- برای بتنهای با مقاومت متوسط (۳۵ الی۵۰ مگاپاسکال) معادلات Hognestad , Saenz وPopovics ، به ترتیب جوابهای قابل قبول و نزدیک به نتایج تجربی در ناحیه صعودی دارند در حالیکه معادله Smith جوابهای حد بالا و غیر قابل قبولی را از خود نشان می‌دهد. در ناحیه نزولی منحنی تنش-کرنش این نوع بتن‌ها فقط معادله Popovics جواب خیلی خوبی می‌دهد.
- برای بتنهای با مقاومت بالا (۵۰ الی ۱۰۰ مگاپاسکال) نتایج عددی معادله Popovics هم‌خوانی خوبی با نتایج تجربی در هر دو ناحیه صعودی و نزولی منحنی تنش-کرنش دارد. این هم‌خوانی خوب در ناحیه صعودی بدلیل متغیر بودن $E_0 / E_c$ بوده (روابط ۱۱و۱۳) و در ناحیه نزولی بدلیل وجود پارامتر k جهت کنترل شیب منحنی (رابطه۱۰) می‌باشد. لازم به ذکر است که نتایج معادله Hognestad نیز در ناحیه نزولی هم‌خوانی خوبی با نتایج تجربی دارد.

با استفاده از اطلاعات آزمایشگاهی بدست آمده توسط این مؤلفین، رابطه جدیدی برای محاسبه ضریب ارتجاعی بر حسب مقاومت فشاری پیشنهاد شد (رابطه۱۷) . این رابطه در محدوده وسیعی از مقاومت‌های فشاری ( ۱۷ الی ۹۰ مگاپاسکال ) جواب‌های قابل قبول و نزدیک به نتایج تجربی بدست می‌دهد.

**قدردانی:** از حمایت مالی، تجهیزاتی و پرسنلی مرکز تحقیقات ساختمان و مسکن به ویژه بخش‌های بتن و سازه در انجام قسمت آزمایشگاهی این پروژه صمیمانه سپاسگزاری و قدردانی می‌گردد.

## مراجع


[1] Hognestad,E., “A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members”,Bulletin No.399,Engineering Experiment Station , University of Illinois , Urbana , Illinois,Vol .49,No.22,(1951).

[2] Smith,G.M.,and Young ,L.E., “Ultimate Theory in Flexture by Exponential Function”,Journal of ACI,V.52,No.3, PP.349-359, (1955).

[3] Saenz ,L.P., “Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete in Uniaxial and Biaxial Compression of Concrete ”,Journal of ACI,V.61,No.9, PP.1229-1235,(1965).

[4] Darwin ,D.and Pecknold,D., “Analysis of Cyclic Loading of Plain Reinforced Concrete Structures", Journal of Computers and Structures ,V.7, PP.137-147, (1977).

[5] Karsan ,I.D.and Jirsa,J.O., “Behavior of Concrete Under Compressive Loading”, Journal of the Structural Division , ASCE,V.95,No.12, PP.2543-2563, (1969).

[6] Popovics ,S., “A Numerical Approach to the Complete Stress-Strain Curve of Concrete ”, Cement and Concrete Research,V.3,No.5, pp.583-599, (1973).

[7] Thorenfeldt ,E . , Tamaszemicz , A . , and Jenson , J . J. , “ Mechanical Properties of High Strength Concrete and Application in Design” , Proceedings of the Symposium on Utilization of High Strength Concrete , Tahir , Trandheim , PP. 149-159, (1987).

[8] Yip, W . K ., “Generic Form of Stress–Strain Equations for Concrete ” , Cement and Concrete Research , V . 28, No. 4, PP. 499 – 508, (1998).

[9] ACI Committee 363, “State of-the-art-report on high –strength concrete”, ACI 363R-92, American Concrete Institute, 55 p, (1992).

[۱۰]: آئین‌نامه بتن ایران (آبا)، سازمان مدیریت و برنامه‌ریزی، دفتر امور فنی و تدوین معیارها، نشریه شماره ۱۲۰ ، تهران، (۱۳۷۷) .