محاسبه تنش در تاوه‌های با تقویت طولی به کمک روش مقاطع

فریدون ایرانی ـ عضو هیات علمی دانشکده مهندسی

[redacted] (تاریخ ارائه مهرماه ۱۳۶۹)

چکیده مقاله

این مقاله به کمک مجموع تئوری تیرها و صفحات به تحلیل تاوه‌های با تقویت طولی می‌پردازد.

در روش مقاله ابتدا به کمک خطوط برش مناسب طولی تاوه را به مقاطع تیر و تاوه (ی مستطیلی) تجزیه کرده و عکس‌العملهای هر یک از مقاطع تجزیه شده را برروی مقطع مجاور خود اعمال می‌کنیم. سپس با استفاده از تئوری مناسب مقادیر تغییر مکانهای لبه‌های خارجی قطعات را در طول برشهای اعمال شده محاسبه کرده و سازگاری این تغییر مکانها را در قطعات مجاور یکدیگر تامین می‌کنیم.

معادلات مربوط به سازگاری تغییر مکانها، مقادیر نیروهای اعمال شده بر لبه‌های برش خوردهٔ مقاطع را معین می‌کند. با استفادهٔ از این مقادیر به‌دست آمده، تحلیل تنش و تغییر مکان سازه ممکن خواهد بود.

خطوط برش طولی باید در مقاطعی اعمال شود که تحلیل تقویت طولی تاوه به کمک تئوری تیرها ممکن گردد.

۱ ـ مقدمه

در پلسازی برای پوشش کف اتومبیل روی پلهای فولادی از تاوه‌های با تقویت طولی به فراوانی استفاده می‌شود. تقویتهای طولی که خود از ورقهای فولادی تهیه می‌شوند به تناسب مشخصات و ابعاد پلها شکلهای گوناگونی دارند. مقطع عرضی برخی از این نوع کفها در شکل (۱) نشان داده شده است. در این مقاله برای تحلیل دقیق تنش در این گونه تاوه‌ها از روش مقاطع استفاده شده است. در این روش تقویتهای طولی کف را مانند تیر یعنی نیمرخی بدون تغییر مقطع عرضی و عناصر تخت کف که بین تقویتها

ضمیمه (۲) تعاریف علائم به کاررفته در مقاله

ν : ضریب پواسن

b : عرض صفحه در امتداد محور y

b : عرض صفحه در امتداد محور y

$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$: سختی خمشی صفحه

δ : ضخامت صفحه

$E.\bar{E}$: مقادیر ثابت تابع تغییرمکان در امتداد محور z

$F.\bar{F}$: مقادیر ثابت تابع تغییر مکان در امتداد محور z

$f_m(y)$: بخشی از تابع ایری که تابع تغییرات y است

g_r : ضریب سری فوریه مربوط به تابع بار قائم موثر بر لبهٔ راست صفحه

g_l : ضریب سری فوریه مربوط به تابع بار قائم موثر بر لبهٔ چپ صفحه

l : طول صفحه در امتداد محور x

m_r : ضریب سری فوریه مربوط به تابع لنگر خمشی موثر بر لبهٔ راست صفحه

m_l : ضریب سری فوریه مربوط به تابع لنگر خمشی موثر برلبهٔ چپ صفحه

M_r : لنگر خمشی موثر بر لبهٔ راست صفحه

M_l : لنگر خمشی موثر بر لبهٔ چپ صفحه

N_r : بار عرضی موثر بر لبهٔ راست صفحه

$\bar{N}_l$: بار عرضی موثر بر لبهٔ چپ صفحه

Q_r : بار قائم موثر بر لبهٔ راست صفحه

Q_l : بار قائم موثر بر لبهٔ چپ صفحه

S_r : ضریب سری فوریه مربوط به تابع بار عرضی موثر برلبهٔ راست صفحه

S_l : ضریب سری فوریه مربوط به تابع بار عرضی موثر بر لبهٔ چپ صفحه

t_r : ضریب سری فوریه مربوط به تابع باربرشی موثر برلبهٔ راست صفحه

t_l : ضریب سری فوریه مربوط به تابع بار برشی موثر بر لبهٔ چپ صفحه

T_r : بار برشی موثر بر لبهٔ راست صفحه

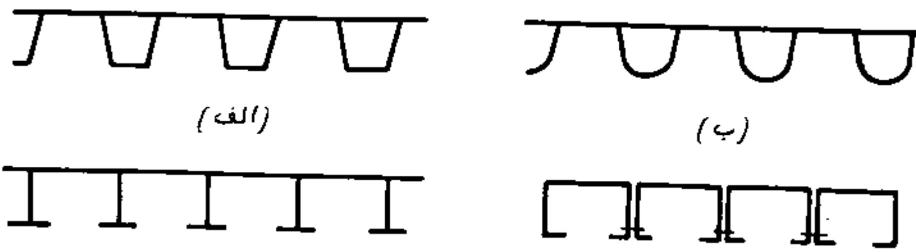
T_l : بار برشی موثر بر لبهٔ چپ صفحه

U_r : تغییر مکان در امتداد محور x لبهٔ راست صفحه

U_l : تغییر مکان در امتداد محور x لبهٔ چپ صفحه

V_r : تغییر مکان در امتداد محور y لبهٔ راست صفحه

قرار دارند مانند ناوه‌ی مستطیلی درنظر خواهیم گرفت و با اعمال روابط سازگاری تغییر مکانها بین این دو نوع قطعات یکپارچگی قطعه تامین خواهد شد.



(الف) (ب)

(ج) (د)

شکل (۱)

فرضیات حاکم بر این روش همان فرضیات حاکم بر تئوری صفحات نازک ارتجاعی، همگن و ایزوترپ و همچنین فرضیات حاکم بر تئوری تیرهای با مقطع جدار نازک است.

این روش زمانی قابل استفاده است که بتوان تکیه‌گاههای دوسر کف را ساده فرض کرد. البته در مورد کفهای یکسره که روی تکیه‌گاههای سادهٔ میانی قرار دارند نیز این روش کاملا" قابل استفاده است.

۲ ــ طریقه اعمال روش مقاله

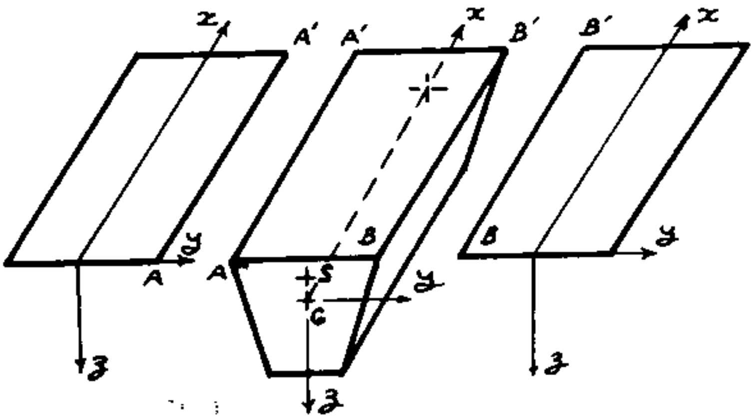
فرض می‌شود که اعمال روش مقاله برکف نشان داده شده در شکل (۱ ــ الف) مورد نظر باشد. دراین صورت می‌توان این کف را به دو صورت نشان داده شده در شکل (۲) تجزیه کرد. در حالت شکل (۲ ــ الف) کف مورد نظر را به دو ناوه و یک تیر تبدیل کرده‌ایم و در حالت شکل (۲ ــ ب) همین کف به سه ناوه مستطیلی و یک تیر U شکل، تبدیل شده است. بدیهی است که اگر از روش تجزیه به صورت شکل (۲ ــ ب) استفاده کنیم نتایج به‌دست آمده برای تنشهای کف دقیقتر از روش تجزیه به‌صورت شکل (۲ ــ الف) خواهد بود ولی استفاده از این چنین روشی مستلزم صرف وقت بیشتری نیز می‌باشد.

(الف) شکل (۲) (ب)

از تجزیه هر یک از کفهای فوق عناصری به‌دست می‌آید که تحت تاثیر نیرو ولنگر در طول دو برش طولی دوطرف خود می‌باشد. تغییرمکان هریک از نقاط مقطع قطعه تابع نیروها ولنگر موثر بر قطعه است، یکپارچگی کف زمانی تامین خواهد شد که سازگاری تغییر مکانها بین دو قطعه واقع در طرفین یک خط برش تامین شده باشد. تغییرمکانهای قطعات که در طول برشها (ی AA' و BB' درشکل (۳)) بوجود می‌آید به‌صورت زیراست.

۱ ــ تغییرمکان طولی لبهٔ برش خورده در امتداد محور X

۲ ــ تغییرمکان عرضی لبهٔ برش خورده در امتداد محور Y



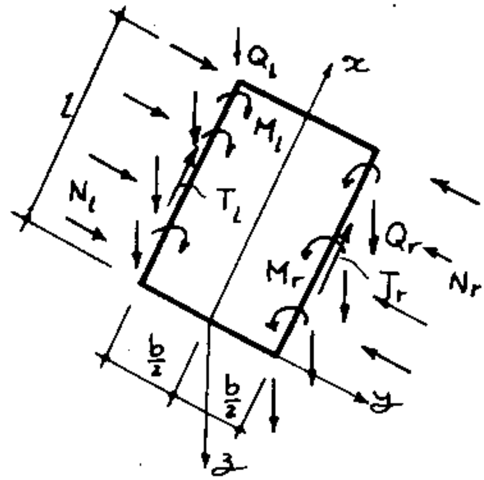
شکل (۳)

۳ ــ تغییرمکان قائم لبهٔ برش خورده در امتداد محور Z

۴ ــ دوران لبهٔ برش خورده در جهت ساعتگرد حول محور X

۳ ــ روابط مربوط به تغییر مکانهای صفحه

روابط مربوط به تغییر مکانهای صفحه در طول هر یک از دو لبهٔ خود در مرجع (۵) آورده شده است که در این قسمت نیز به‌صورت خلاصه برای صفحه نشان داده شده در شکل (۴) ذکر می‌شود.



شکل (۴)

$$
\begin{aligned}
T_r &= \sum_{m=1}^{\infty} t_r \cos \frac{m\pi x}{l} \\
T_l &= \sum_{m=1}^{\infty} t_l \cos \frac{m\pi x}{l} \\
N_r &= \sum_{m=1}^{\infty} s_r \sin \frac{m\pi x}{l} \\
N_l &= \sum_{m=1}^{\infty} s_l \sin \frac{m\pi x}{l} \\
Q_r &= \sum_{m=1}^{\infty} g_r \sin \frac{m\pi x}{l} \\
Q_l &= \sum_{m=1}^{\infty} g_l \sin \frac{m\pi x}{l} \\
M_r &= \sum_{m=1}^{\infty} m_r \sin \frac{m\pi x}{l} \\
M_l &= \sum_{m=1}^{\infty} m_l \sin \frac{m\pi x}{l}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$u_{y=\pm b/2}=\frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\Big[t_r(\Theta\pm\bar{\Theta})+t_l(\Theta\pm\bar{\Theta})+\begin{matrix}s_r\\ s_l\end{matrix}(\eta+\bar{\eta}-2\nu)+$$
$$\begin{matrix}s_l\\ s_r\end{matrix}(\eta-\bar{\eta})\Big]\cos\frac{m\pi x}{l}$$

$$v_{y=\pm b/2}=\frac{\pm 1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\Big[\begin{matrix}t_r\\ t_l\end{matrix}(\eta+\bar{\eta}-2\nu)+\begin{matrix}t_l\\ t_r\end{matrix}(\eta-\bar{\eta})+s_r\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\pm\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}\right)+$$
$$s_l\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\pm\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}\right)\Big]\sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (2)$$

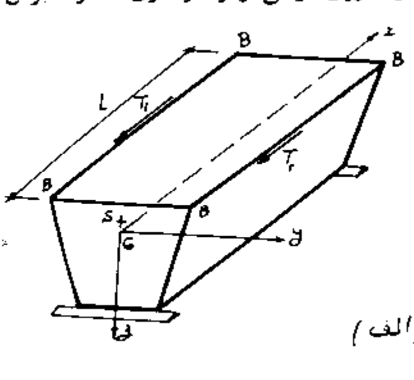
$$w_{y=\pm b/2}=\frac{1}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\Big\{2\Delta_3K\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2-(\Delta_1\pm\bar{\Delta}_1)m_r-(\Delta_1\pm\bar{\Delta}_1)m_l+$$
$$2\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left[(\Delta_2\pm\bar{\Delta}_2)g_r+(\Delta_2\pm\bar{\Delta}_2)g_l\right]\Big\}\ \sin\ \frac{m\pi x}{l}$$

$$\phi_{y=\pm b/2}=\pm\frac{1}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\Big\{4\nu\Delta_\sigma K\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2-2\left[(\Delta_4\pm\bar{\Delta}_4)m_r+(\Delta_4\mp\bar{\Delta}_4)m_l\right]+$$
$$\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left[(\Delta_5\pm\bar{\Delta}_5)g_r+(\Delta_5\mp\bar{\Delta}_5)g_l\right]\Big\}\ \sin\ \frac{m\pi x}{l}$$

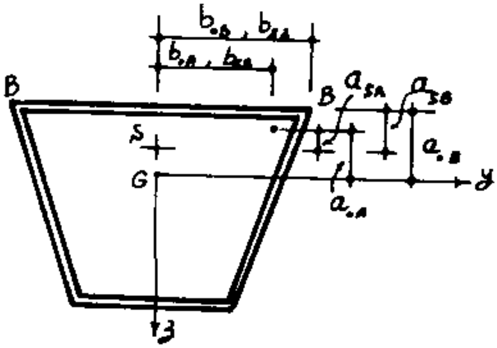
برای دستیابی به تعاریف علائم به‌کار رفته و مشخصات کمیات و توابع که در متن مقاله معین شده است به ضمائم (۱) و (۲) مراجعه شود.

۴ ـ روابط مربوط به تغییر مکانهای تیر

الف ـ روابط مربوط به تاثیر نیروی برشی موثر در طول خطوط برش



شکل (۵) ـ (الف)



(ب)

AA : امتدادی که در آن امتداد تغییرمکان حاصل از نیرو محاسبه می‌شود .

BB : امتدادی که در آن امتداد نیروی وارده اثر می‌کند .

شکل (۵)

با توجه به شکل (۵ ــ الف) فرض می‌شود که دو نیروی برشی

$$T_r = \sum_{m=1}^{\infty} t_r \cos\frac{m\pi x}{l}$$

$$T_l = \sum_{m=1}^{\infty} t_l \cos\frac{m\pi x}{l}$$

به‌ترتیب در طول دو لبهء سمت راست و سمت چپ تیر اثر کند . در شکل (۵) نقطه S مرکز برش و نقطه G مرکز ثقل مقطع تیر است .

الف ــ ۱ ــ تغییرمکانهای حاصل از تاثیر نیروی T_r

۱ ــ تغییرمکان طولی در امتداد محور x یعنی U_t

کرنشی که از اثر نیروی T_r در امتداد AA بوجود می‌آید به‌صورت زیر محاسبه خواهد شد :

$$\varepsilon_x = \int_0^x \frac{T_r b_{SB} b_{OA}}{EI_z}\,dx + \int_0^x \frac{T_r a_{SB} a_{OA}}{EI_y}\,dx + \int_0^x \frac{T_r}{EA}\,dx \qquad (3)$$

یک چنین کرنشی سبب تغییرمکانی برطبق رابطه (۴) می‌شود.

$$U(x)= \int_0^x \varepsilon \, dx = \left(\frac{{}^{b}SB\,{}^{b}OA}{EI_z} + \frac{{}^{a}SB\,{}^{a}OA}{EI_y} + \frac{1}{EA}\right) \int_0^x \int_0^x T_r dx^2$$

$$= -\frac{1}{E} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{A}+\frac{{}^{a}SB\,{}^{a}OA}{EI_y}+\frac{{}^{b}SB\,{}^{b}OA}{EI_z}\right)t_r\right] \cos\frac{m\pi x}{l} \qquad (4)$$

۲ ـ تغییر مکان عرضی در امتداد محور Y یعنی V_T
در این حالت داریم:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} = \frac{{}^{b}SB}{EI_z} \int_0^x T_r dx \qquad (5)$$

$$V(x)= \frac{{}^{b}SB}{EI_z} \int_0^x \int_0^x \int_0^x T_r dx = \frac{{}^{b}SB}{EI_z} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^3 t_r \sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (6)$$

۳ ـ تغییر مکان قائم در امتداد محور Z یعنی W_T
در این حالت نیز مشابه حالت قبل خواهیم داشت:

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{M_y}{EI_y} = -\frac{{}^{a}SB}{EI_y} \int_0^x T_r dx \qquad (7)$$

$$W(x) = -\frac{{}^{a}SB}{EI_y} \int_0^x \int_0^x \int_0^x T_r dx = -\frac{{}^{a}SB}{EI_y} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^3 t_r \sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (8)$$

۴ ـ دوران حول محورX درجهت ساعتگرد یعنی ϕ_T
با استفاده از تئوری پیچش جدار نازکها خواهیم داشت.

$$EC_w \frac{d^4\phi}{dx^4} - GI_t \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dT}{dx}\, w = -w \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l}\right) t_r \sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (9)$$

$$\phi(x) = C_1 + C_2 e^{\beta x} + C_3 e^{-\beta x} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right) \frac{w t_r}{EC_w\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{GI_t}{EC_w}\right]} \sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (10)$$

چون درحالتی که برش وجود ندارد مقدار فوق باید صفر شود لذا $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ خواهد شد و خواهیم داشت .

$$\phi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right) \frac{W t_r}{EC_w \left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{GI_t}{EC_w} \right]} \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{11}$$

الف ــ ۲ ــ تغییر مکانهای حاصل از تاثیر T_r و T_l در امتداد خطوط برش

با استفاده از روابط (۴) ، (۶) ، (۸) و(۱۱) می‌توان روابط مربوط به تغییرمکانهای حاصل از تاثیر T_r و T_l را در طول دو خط برش سمت راست و سمت چپ تیر به‌صورت زیر به‌دست آورد .

$$(U_T)_r = -\frac{1}{E} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \Big[\left(\frac{1}{A} + \frac{{}^{a}SB\,{}^{a}OB}{I_y} - \frac{{}^{b}SB\,{}^{b}OB}{I_z}\right) t_l +$$

$$+ \left(\frac{1}{A} + \frac{{}^{a}SB\,{}^{a}OB}{I_y} + \frac{{}^{b}SB\,{}^{b}OB}{I_z}\right) t_r \Big] \cos\frac{m\pi x}{l}$$

$$(U_T)_l = -\frac{1}{E} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \Big[\left(\frac{1}{A} + \frac{{}^{a}SB\,{}^{a}OB}{I_y} + \frac{{}^{b}SB\,{}^{b}OB}{I_z}\right) t_l +$$

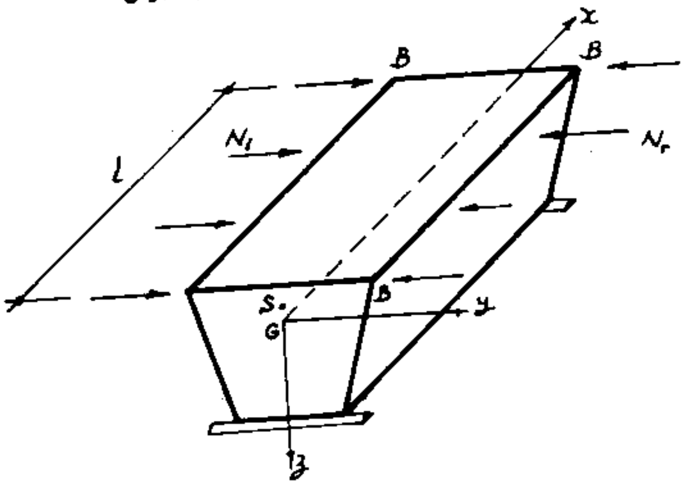
$$\left(\frac{1}{A} + \frac{{}^{a}SB\,{}^{a}OB}{I_y} - \frac{{}^{b}SB\,{}^{b}OB}{I_z}\right) t_r \Big] \cos\frac{m\pi x}{l}$$

$$(V_T)_r = (V_T)_l = -\frac{{}^{b}SB}{EI_z} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^3 (t_l - t_r) \sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$(W_T)_r = (W_T)_l = -\frac{{}^{a}SB}{EI_y} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^3 (t_l + t_r) \sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$(\phi_T)_r = (\phi_T)_l = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right) \frac{W(t_l - t_r)}{EC_w \left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{GI_t}{EC_w} \right]} \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{۱۲}$$

ب ــ روابط مربوط به تاثیر نیروی عرضی موثر در طول خطوط برش



شکل (۶)

با توجه به شکل (۶) فرض می‌شود که دو نیروی عرضی

$$N_r = \sum_{m=1}^{\infty} S_r \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$N_l = \sum_{m=1}^{\infty} S_l \sin \frac{m\pi x}{l}$$

به‌ترتیب درطول دو لبه، سمت راست و سمت چپ تیر اثر کند. در اینجا نیز با توجه به مشخصات مقطع که در شکل (۵ ــ ب) نشان داده شده است به استخراج روابط لازم می‌پردازیم.

ب ــ ۱ ــ تغییرمکانهای حاصل از تاثیر نیروی N_r

۱ ــ تغییرمکان طولی در امتداد محور x یعنی U_n

کرنشی که از اثر خمشی نیروی N_r در امتداد AA بوجود می‌آید به‌صورت زیر خواهد بود

$$\varepsilon_x = \frac{M_z b_{OA}}{EI_z} = -\frac{b_{OA}}{EI_z} \int_0^x \int_0^x N_r dx^2 \tag{13}$$

اگر اثر پیچشی نیروی N_r را درنظر بگیریم. لنگر پیچشی بوجود آمده خواهد شد.

$$a_{SB} N_r = m_t = a_{SB} \sum_{m=1}^{\infty} S_r \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{14}$$

و چون با توجه به تئوری پیچش جدار نازکها داریم ،

$$U(x) = \frac{d\phi}{dx} W$$

$$EC_v \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{d\phi}{dx}\right) - GI_t \frac{d}{dx}\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = m_t$$

$$EC_v \frac{d^3 U}{dx^3} - GI_t \frac{dU}{dx} = m_t = a_{SB} \sum_{m=1}^{\infty} S_r \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{15}$$

با حل رابطه (۱۵) خواهیم داشت .

$$U_1(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W a_{SB} S_r}{\left(\frac{m\pi}{l}\right)\left[GI_t + \left(\frac{m\pi}{l}\right) EC_v\right]} \cos\frac{m\pi x}{l} \tag{16}$$

این رابطه باید بازاء $N_r=0$ برابر با صفر شود لذا $C_1=C_2=C_3=0$ خواهد بود و نهایتا" داریم ،

$$\text{کل}: U(x) = \int_0^x \varepsilon_x dx + U_1(x) = \frac{1}{E} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{b_{OA}}{I_z}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^3 + \left(\frac{l}{m\pi}\right) \frac{}{C_v\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{GI_t}{EC_v}\right]} \right\} S_r \cos\frac{m\pi x}{l} \tag{17}$$

۲ ــ تغییرمکان عرضی در امتداد محور y یعنی V_n
با توجه به شکل (۶) لنگرخمشی حول محور z خواهد شد .

$$M_z = -\int_0^x \int_0^x N_r dx^2 \tag{18}$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} = -\frac{1}{EI_z} \int_0^x \int_0^x N_r dx^2$$

$$V_1(x) = -\frac{1}{EI_z}\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x N_r\,dx^4 =$$

$$-\frac{1}{EI_z}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^4 S_r \sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (19)$$

اثر پیچشی نیروی N_r به‌صورت زیر عمل خواهد کرد.

$$m_t = -GI_t\frac{d^2\phi}{dx^2} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{SB} S_r \sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$\phi(x) = -\frac{a_{SB}}{GI_t}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 S_r \sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (20)$$

تغییرمکان عرضی حاصل از پیچش مقطع خواهد شد.

$$V_2(x) = a_{SA}\phi(x) = -\frac{a_{SA}a_{SB}}{GI_t}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 S_r \sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (21)$$

و به این ترتیب تغییرمکان عرضی کل می‌شود

$$V(x) = V_1 + V_2 = -\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\left[\frac{1}{EI_z}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 + \frac{a_{SA}a_{SB}}{GI_t}\right] S_r \sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (22)$$

۳ ـ تغییر مکان قائم در امتداد محور Z یعنی W_N
دیدیم که زاویه پیچش حاصل از تاثیر نیروی N_r به‌صورت زیر است (رابطهٔ ۲۰)

$$\phi(x) = -\frac{a_{SB}}{GI_t}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 S_r \sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (20)$$

از این طریق تغییرمکان قائم خواهد شد.

$$W_N(x) = -\frac{a_{SB}b_{SA}}{GI_t}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 S_r \sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (23)$$

۴ ـ دوران حول محور X درجهت ساعتگرد یعنی ϕ_N

زاویه پیچش حاصل از تاثیر نیروی N_r با رابطه (۲۰) معین شد.

$$\phi(x) = -\frac{a_{SB}}{GI_t}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 S_r \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{20}$$

ب ــ ۲ ــ تغییر مکانهای حاصل از تاثیر N_r و N_l در امتداد خطوط برش

با استفاده از روابط (۱۷)، (۲۲)، (۲۳) و (۲۰) می‌توان روابط مربوط به تغییر مکانهای حاصل از تاثیر N_r و N_l را در طول دو خط برش سمت راست و سمت چپ تیر به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$(U_N)_l^r = \pm\frac{1}{E}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{b_{OB}}{I_z}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^3+\left(\frac{l}{m\pi}\right)\frac{Wa_{SB}}{C_w\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+\frac{GI_t}{EC_w}\right]}\right\}$$

$$(S_l - S_r)\cos\frac{m\pi x}{l}$$

$$(V_N)_r = (V_N)_l = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\left[\frac{1}{EI_z}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2+\frac{a_{SB}^2}{GI_t}\right](S_l-S_r)\sin\frac{m\pi x}{l}$$

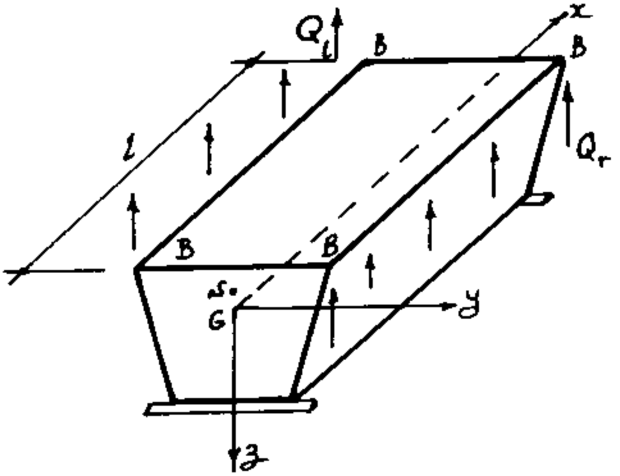
$$(W_N)_l^r = \pm\frac{a_{SB}b_{SB}}{GI_t}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2(S_l-S_r)\sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$(\phi_N)_r = (\phi_N)_l = \frac{a_{SB}}{GI_t}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2(S_l-S_r)\sin\frac{m\pi x}{l} \tag{24}$$

ج ــ روابط مربوط به تاثیر نیروی قائم موثر در طول خطوط برش

$$Q_r = \sum_{m=1}^{\infty} g_r \sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$Q_l = \sum_{m=1}^{\infty} g_l \sin\frac{m\pi x}{l}$$



شکل (۷)

چون این حالت بنحوی مشابه با تاثیر نیروی عرضی است لذا از محاسبه مجدد مقادیر تغییر مکانها صرفنظر شده و روابط نهایی را ارائه می‌دهیم.

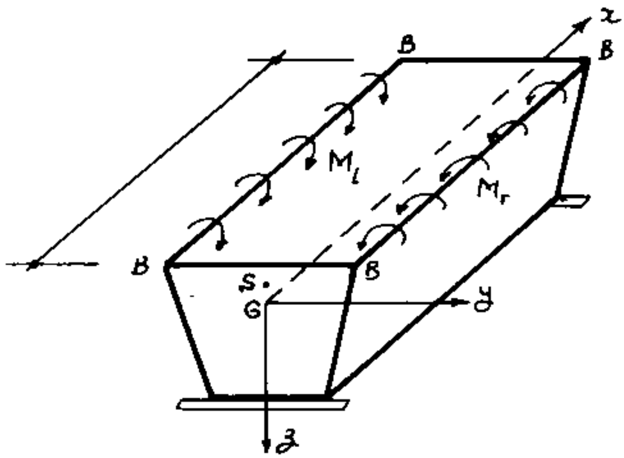
$$(U_Q)_r = (U_Q)_l = - \frac{1}{E} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_{OB}}{I_y} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^3 (g_l + g_r) + \left(\frac{l}{m\pi}\right) \frac{\omega b_{SB} (g_l - g_r)}{C_w \left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{GI_t}{EC_w} \right]} \right\} \cos\frac{m\pi x}{l}$$

$$(V_Q)_r = (V_Q)_l = \frac{b_{SB}\, a_{SB}}{GI_t} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 (g_l + g_r) \sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$(W_Q)_l^r = - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \left\{ \left[\frac{1}{EI_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \mp \frac{b_{SB}^2}{GI_t}\right] g_l + \left[\frac{1}{EI_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \pm \frac{b_{SB}^2}{GI_t}\right] g_r \right\} \sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$(\phi_Q)_r = (\phi_Q)_l = \frac{b_{SB}}{GI_t} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 (g_l - g_r) \sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (25)$$

د ــ روابط مربوط به تاثیر لنگرهای پیچشی موثر در طول خطوط برش



شکل (۸)

با فرض اینکه بتوان لنگرهای پیچشی موثر در طول برشهای BB را با روابط زیر نشان داد.

$$M_r = \sum_{m=1}^{\infty} m_r \sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$M_l = \sum_{m=1}^{\infty} m_l \sin\frac{m\pi x}{l}$$

به استخراج روابط تغییر مکان و دوران می‌پردازیم.

د ــ ۱ ــ تغییر مکانهای حاصل از تاثیر لنگر M_r

۱ ــ تغییر مکان طولی در امتداد محور X یعنی U_M

با توجه به محاسبات مشابهی که قبلا" انجام شد (رابطه ۱۵) خواهیم داشت.

$$U_M(x) = \frac{1}{EC_v} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right) \frac{Wm_r}{\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{GI_t}{EC_v}\right]} \cos\frac{m\pi x}{l} \qquad (26)$$

۲ ــ تغییر مکان عرضی در امتداد محور Y یعنی V_M

در اینجا نیز به توجه به محاسبات مشابه قبلی و با توجه به اینکه داریم،

$$m_t = -GI_t \frac{d^2\phi}{dx^2} = \sum_{m=1}^{\infty} m_r \sin\frac{m\pi x}{l}$$

نهایتا" خواهیم داشت :

$$V_M(x) = -\frac{a_{SA}}{GI_t} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 m_r \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{27}$$

۳ ــ تغییرمکان قائم در امتداد محور Z یعنی W_M
مشابه با حالت قبلی خواهیم داشت ،

$$W_M(x) = -\frac{b_{SA}}{GI_t} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 m_r \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{28}$$

۴ ــ دوران حول محور X درجهت ساعتگرد یعنی ϕ_M

$$\phi_M(x) = -\frac{1}{GI_t} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 m_r \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{29}$$

د ــ ۲ ــ تغییر مکانهای حاصل از تاثیر M_r و M_l در امتداد خطوط برش

با استفاده از روابط (۲۶) ، (۲۷) ، (۲۸) و (۲۹) روابط مربوط به تغییر مکانهای حاصل از تاثیر M_r و M_l به‌ترتیب در طول دو برش سمت راست و سمت چپ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید .

$$(U_M)_r = (U_M)_l = -\frac{1}{EC_w} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right) \frac{W(m_l - m_r)}{\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{GI_t}{EC_w}\right]} \cos\frac{m\pi x}{l}$$

$$(V_M)_r = (V_M)_l = \frac{a_{SB}}{GI_t} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 (m_l - m_r) \sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$(W_M)_l^r = \pm \frac{b_{SB}}{GI_t} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 (m_l - m_r) \sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$(\phi_M)_l^r = \frac{b_{SB}}{GI_t} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 (m_l - m_r) \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{30}$$

هـ ـ روابط مربوط به تاثیر بار قائم خارجی بر تیر

بار خارجی را برحسب سری فوریه با رابطهٔ زیر نشان می‌دهیم .

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} k \ \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{31}$$

که مقدار ضرایب سری فوق از رابطه (۳۲) محاسبه خواهد شد .

$$k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} q(x)\ \sin\frac{m\pi x}{l}\ dx \tag{32}$$

محاسبه تغییرمکانهای مربوط به بار خارجی نظیر تاثیر بار قائم (برشی) است و بهاین جهت تنها به ارائه روابط نهایی قناعت می‌شود .

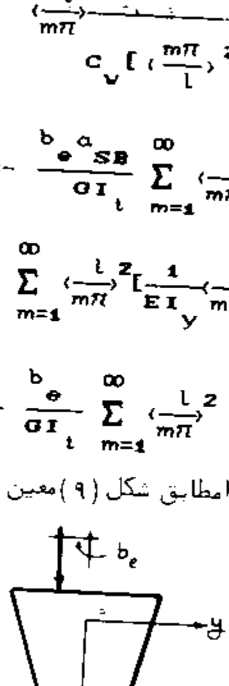
$$(U_q)_l^r = \frac{1}{E}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{a_{OB}}{I_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^3 + \left(\frac{l}{m\pi}\right)\frac{w b_e}{C_w\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{GI_t}{EC_w}\right]}\right\} k\ \cos\frac{m\pi x}{l}$$

$$(V_q)_l^r = -\frac{b_e a_{SB}}{GI_t}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 k\ \sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$(W_q)_l^r = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\left[\frac{1}{EI_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \mp \frac{b_e b_{SB}}{GI_t}\right] k\ \sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$(\phi_q)_l^r = -\frac{b_e}{GI_t}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 k\ \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{33}$$

در این روابط b_e مقدارخروج ازمرکزیت بارخارجی رامطابق شکل (۹)معین می‌کند .



شکل (۹)

۵ ــ معادلات سازگاری

برای تامین سازگاری تغییر مکانهای دو قطعه واقع در طرفین یک خط برش باید مجموع تغییر مکانهای هر یک از قطعات در طول آن خط برش در معادلات سازگاری (۳۴) صدق نماید.

$$\sum u_r = \sum u_l$$

$$\sum v_r = \sum v_l$$

$$\sum w_r = \sum w_l$$

$$\sum \phi_r = \sum \phi_l \qquad (34)$$

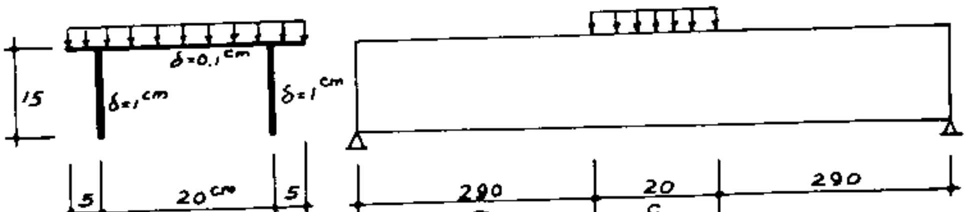
در این روابط تغییر مکانهای با پانویس r مربوط به قطعه واقع در سمت راست خط برش و تغییر مکانهای با پانویس l مربوط به قطعه واقع در سمت چپ خط برش است.

اگر مانند شکل (۲ ــ ب) در یک برش بجای دو قطعه، سه قطعه وجود داشته باشد، می‌توان دو قطعه را در یک سمت برش فرض کرده و دو دستگاه معادله هر یک مرکب از چهار معادله بین آن دو قطعه و قطعه واقع در سمت دیگر خط برش برقرار کرد.
دیده می‌شود که به این ترتیب تعداد معادلات لازم و کافی جهت محاسبه ضرایب مجهول سریهای فوریه مربوط به نیروهای مجهول موثر در خطوط برشها ایجاد خواهد شد.

۶ ــ مثال عددی

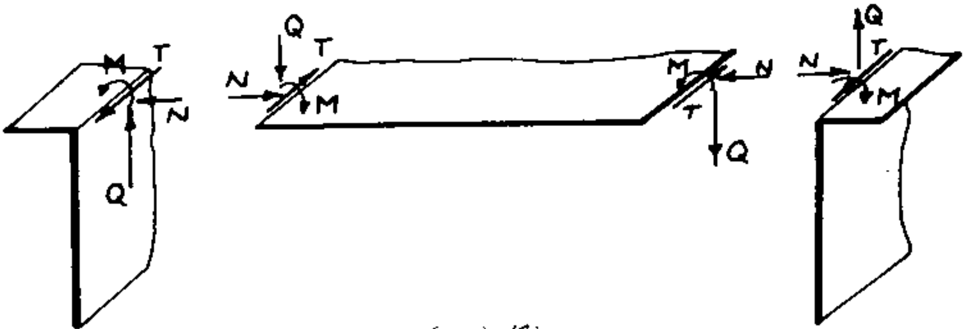
در اینجا به کمک یک مثال عددی روش مقاله را توضیح داده و صحت نتایج بدست آمده را به کمک تئوری تیرها خواهیم سنجید.

فرض می‌شود که اعمال روش مقاله بر نیمرخی نظیر آنچه در شکل (۱۰) نشان داده شده است موردنظر باشد. این نیمرخ در وسط دهانه درطولی برابر با 20 cm تحت اثر بار خارجی q قرار دارد.



شکل (۱۰)

از تجزیه این نیمرخ به دو تیر و یک تاوه نیروهای موثر بر هر یک از قطعات به‌دست آمده به‌صورت شکل (۱۱) خواهد بود.



شکل (۱۱)

دیده می‌شود که به دلیل تقارن بیش از چهار مجهول نخواهیم داشت و درصورتی که معادلات تغییرمکان را برای برش سمت راست بنویسیم داریم:
تغییر مکانهای لبه‌ٔ سمت راست تاوه:

$$U_r=\frac{1}{2\delta E}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)[(\Theta+\bar{\Theta})t+(\Theta-\bar{\Theta})t+(\eta+\bar{\eta}-2\nu)s+(\eta-\bar{\eta})s]\cos\frac{m\pi x}{l}$$

$$V_r=-\frac{1}{2\delta E}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)[(\eta+\bar{\eta}-2\nu)t+(\eta-\bar{\eta})t+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}\right)s+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}\right)s]\sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$W_r=-\frac{1}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\Big\{(\Delta_1+\bar{\Delta}_1)m+(\Delta_1-\bar{\Delta}_1)m-2\left(\frac{l}{m\pi}\right)[(\Delta_2\pm\bar{\Delta}_2)g$$

$$+(\Delta_2-\bar{\Delta}_2)g]-2\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\Delta_3K\Big\}\ \sin\ \frac{m\pi x}{l}$$

$$\phi_r=-\frac{1}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\Big\{2[(\Delta_4+\bar{\Delta}_4)m+(\Delta_4-\bar{\Delta}_4)m]-\left(\frac{l}{m\pi}\right)[(\Delta_5+\bar{\Delta}_5)g$$

$$+(\Delta_5-\bar{\Delta}_5)g]-4\nu\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\Delta_6K\Big\}\ \sin\ \frac{m\pi x}{l}$$

با توجه به اینکه a_s ، b_s و W برابر با صفر است مقادیر تغییرمکان در لبه‌ٔ سمت چپ تیر خواهد شد.

$$U_l = -\frac{1}{E}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left[\left(\frac{1}{A}\left(\frac{l}{m\pi}\right)t - \frac{b_o}{I_z}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 s + \frac{a_o}{I_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 g - \frac{a_o}{I_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 K_p\right]\cos\frac{m\pi x}{l}$$

$$V_l = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left[\frac{1}{EI_z}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^3 s\right]\sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$W_l = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\left[-\frac{1}{EI_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 g + \frac{1}{EI_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 K_p\right]\sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$\phi_l = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left[\frac{1}{GI_t}\left(\frac{l}{m\pi}\right)m - \frac{b_e}{GI_t}\left(\frac{l}{m\pi}\right)K_p\right]\sin\frac{m\pi x}{l}$$

روابط سازگاری به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$U_r = U_l \quad , \quad V_r = V_l \quad , \quad W_r = W_l \quad , \quad \phi_r = \phi_l$$

با استفاده از روابط به‌دست آمده معادلات فوق به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$\left[\frac{\Theta}{\delta} + \frac{1}{A}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\right]t + \left[\frac{\eta-\nu}{\delta} - \frac{b_o}{I_z}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\right]s + \frac{a_o}{I_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 g = \frac{a_o}{I_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 K_p$$

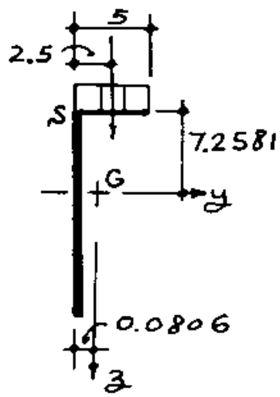
$$\frac{\eta-\nu}{\delta}t + \left[\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + \frac{1}{I_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^3\right]s = 0$$

$$\left[\frac{24(1-\nu^2)}{\delta^3}\Delta_2 + \frac{1}{I_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\right]\left(\frac{l}{m\pi}\right)g - \frac{12(1-\nu^2)}{\delta^3}\Delta_1 m = \frac{1}{I_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 K_p - \frac{12(1-\nu^2)}{\delta^3}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 K$$

$$\frac{12(1-\nu^2)}{\delta^3}\Delta_S\left(\frac{l}{m\pi}\right)g - \left[\frac{24(1-\nu^2)}{\delta^3}\Delta_4 + \frac{2(1+\nu)}{I_t}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\right]m =$$

$$-\frac{2(1+\nu)}{I_t} b_e \left(\frac{l}{m\pi}\right) K_p - \frac{24(1-\nu^2)}{\delta^3} \nu \Delta_6 \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 K$$

با توجه به اینکه مشخصات هندسی و بارگذاری تیر به‌شرح زیر است :



شکل (۱۲)

$$K_p = \frac{4q}{\pi} \quad \sin\frac{m\pi(c+a)}{2l} \quad \sin\frac{m\pi(c-a)}{2l} \quad = \quad 0.0666362q'$$

در این رابطه q' شدت یکنواخت بار وارده بر تیر است که با شدت بار وارده بر صفحهٔ میانی رابطهٔ $q'=5\,q$ را پیدا می‌کند .

$a_o=7.2581$ cm $\quad$ $b_o=0.0806$ cm $\quad$ $b_e = -2.5$ Cm

$A=15.5$ cm^2 $\quad$ $I_y=308.5$ cm^4 $\quad$ $I_z=5.32$ cm^4

و مقادیر θ ، η ...... K مربوط به تاوه مایی با توجه به مقادیر آنها (از ضمیمه ۱) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود .

$\Theta=19.13351$	$\eta=0.0009135$
$\frac{\partial\eta}{\partial y}=0.0523599$	$\Delta_1=0.3302101$
$\Delta_2=10.49816$	$\Delta_3=1.099063$
$\Delta_4=0.0287288$	$\Delta_5=0.330210$
$\Delta_6=0.0287288$	$K=0.0666362$ q

نتایج چهار معادله‌ء چهار مجهولی فوق به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد .

$t=3.937359951\ q$

$S=0.000008993\ q$

$g=-0.601214497\ q$

$m=59.7068947\ q$

با توجه به مقادیر به‌دست آمده مقدار تنش خمشی و تغییرمکان قائم تیر فوق را در مقطع میانی محاسبه می‌کنیم .

الف ــ تغییر مکان قائم .

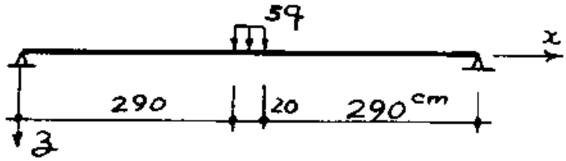
$$W=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\left[-\frac{1}{EI_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 g+\frac{1}{EI_y}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 K_p\right]\sin\frac{m\pi x}{l}$$

بازاء $m=1$ و $x=\frac{l}{2}$ خواهیم داشت :

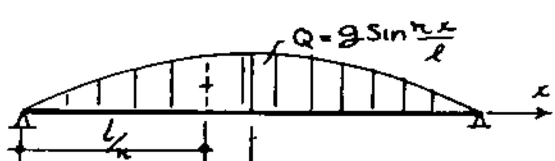
$$W=\frac{1}{EI_y}\left(\frac{l}{\pi}\right)^4(g+K_p)=1.94\ q \qquad cm$$

ب ــ تنش خمشی

۱ ــ تنش حاصل از بار خارجی



(الف)



(ب)

شکل (۱۳)

$$M_{max}=14750\ q$$

$$\sigma_1=\frac{14750\ q}{308.5/7.2581}=347\ q$$

۲ ـ تنش حاصل از تاثیر Q

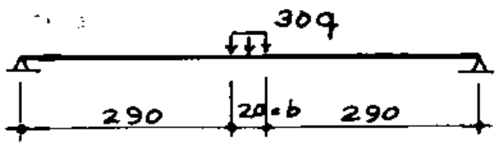
$$M_{max}=(\frac{l}{\pi})^2 g$$

$$\sigma_2=\frac{21929.67\ q}{308.5/7.2581}=515\ q$$

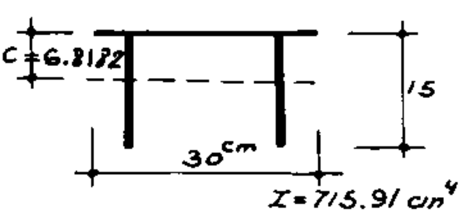
لذا مقدار کل تنش خمشی به کمک روش مقاله بصورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2=347\ q+515.9\ q=862.9\ q$$

اگر کل مقطع فوق را مانند تیری فرض کنیم مقادیر تغییرمکان و تنش خمشی در مقطع میانی تیر به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:



(الف)



(ب)

شکل (۱۴)

$$W=\frac{(30\times 20)\ q}{384EI}(8l^3-4lb^2+b^3)=1.82\ q$$

$$M_{max}=88500q$$

$$\text{تنش قائم در مقطع میانی در} = Q = \frac{M}{I/C} = \frac{88500q}{715.91/6.818} = 842.8\ q$$

جدول زیر نتایج به‌دست آمده بازاء $q = Kg/cm^2$ مقایسه شده‌اند.

	تغییرمکان	تنش خمشی
با روش مقاله	1.94 cm	862.9 bar
با تئوری تیرها	1.82 cm	842.8 bar

واضح است چون روش مقاله تغییرشکل مقطع را نیز ملحوظ می‌کند تطابق نهایی نتایج دو تئوری کامل نخواهد بود، اضافه می‌کند در این مثال تنها از اولین جمله سری فوریه نیز استفاده شده است.

۷ـ نتیجه‌گیری

با دقت به روش محاسباتی ارائه شده در این مقاله ملاحظه می‌شود که آنچه در اینجا بیان شد یک روش تقریبی نیست بلکه با استفاده از تئوریهای دقیق تیرها و صفحات روشی دقیق و کاربردی جهت تحلیل تاوه‌های ساختی متفاوت در دو جهت قائم بر هم ارائه می‌دهد.

از این روش می‌توان با اتخاذ خطوط برش مناسب به تحلیل تنش و تغییرمکان مقاطع جدار نازک نیز پرداخت.

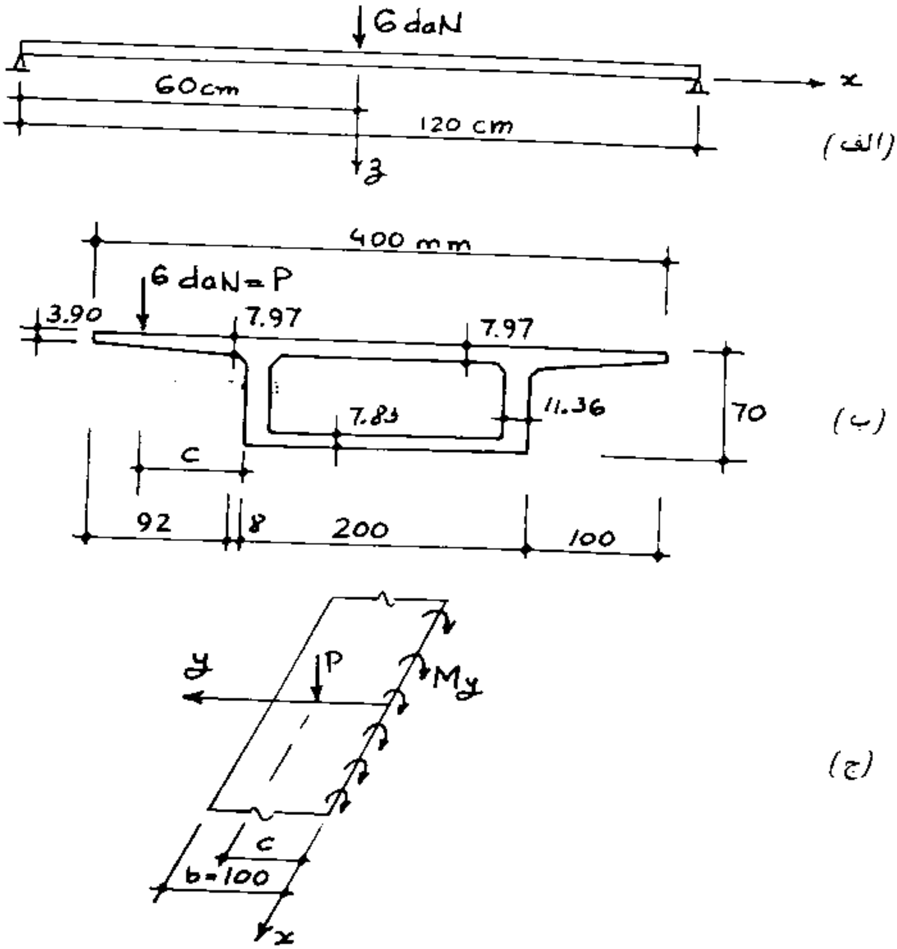
با دقت در نتایج به دست آمده (در مثال عددی) بار دیگر می‌توان به نتایج حاصل از روش محاسباتی مقاله اطمینان کامل نمود.

توصیه می‌شود درجهت تسهیل اعمال روش، خطوط برش مربوط به تجزیه سازه به تیر و تاوه را بخوبی انتخاب نمود که حدالمقدور مقاطع تیرهای به‌دست آمده دارای یک محور تقارن نیز باشند.

در شکل (۱۵) مشخصات هندسی یک مدل آزمایشگاهی از ماده‌ای با $E=3.04\times10^4$ bar و $V=0.38$ که در مرجع (۵) آمده است نشان داده شده است. بار متمرکزی برابر با 6 daN درعرض

مقطع میانی این مدل حرکت می‌کند. نتایج حاصل از روش مقاطع با نتایج حاصل از آزمایش در نمودارهای مختلف نشان داده شده است. با مراجعه به این نمودارها بار دیگر می‌توان به صحت نتایج حاصل از روش مقاطع اطمینان یافت.

درمرجع (۵) علاوه‌برنتایج‌حاصل‌ازآزمایش،این‌مدل‌رابه‌روش Spline Finite Strip نیز تحلیل کرده است، با مراجعه به نتایج این تحلیل تطابق نسبتاً کاملی بین روش مرجع (۵) و روش مقاطع دیده می‌شود.

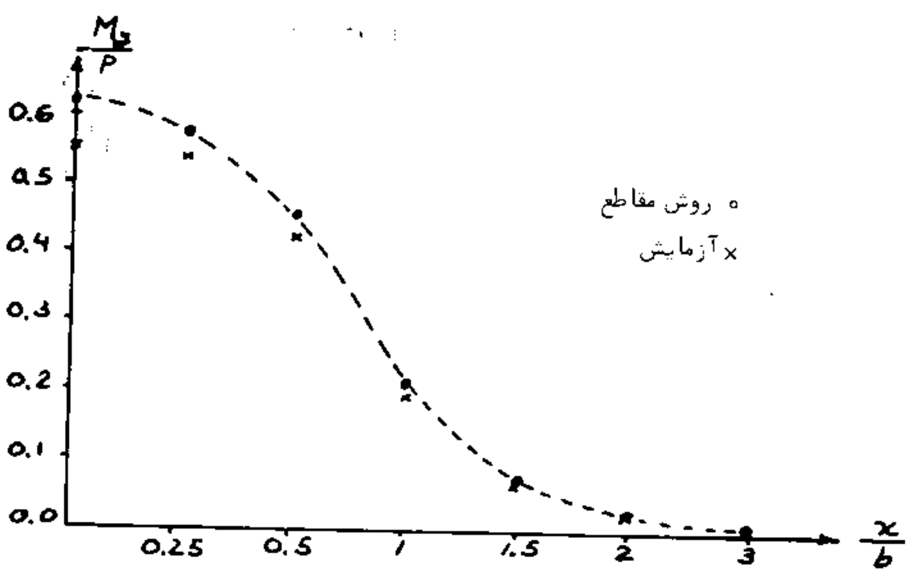


(الف) مقطع طولی نمونه (ب) مقطع عرضی نمونه (ج) موقعیت بار وارده

شکل (۱۵)

۱ ـ توزیع لنگرخمشی ($\frac{M_y}{P}$) در ریشه‌بال (در امتداد محور x) موقعیت بار در $\frac{c}{b}=1.0$

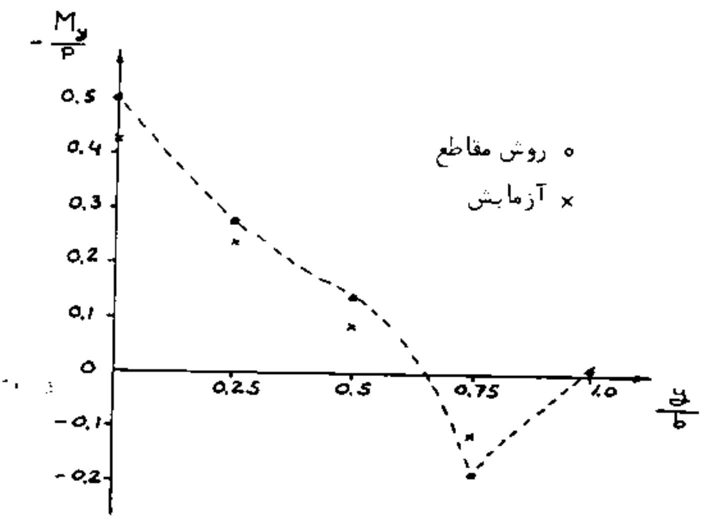
$\frac{x}{b}$	نتایج روش مقاطع بازاء تعداد جملات متفاوت سری فوریه				نتایج آزمایش
	m=10	m=20	m=40	m=50	
0.0	0.558	0.615	0.618	0.618	0.546
0.25	0.533	0.572	0.572	0.572	0.531
0.5	0.463	0.457	0.453	0.453	0.415
1.0	0.250	0.203	0.207	0.207	0.192
1.5	0.060	0.07	0.069	0.069	0.069
2.0	0.014	0.016	0.017	0.017	0.015
3.0	0.021	0.001	0.001	0.001	0.008



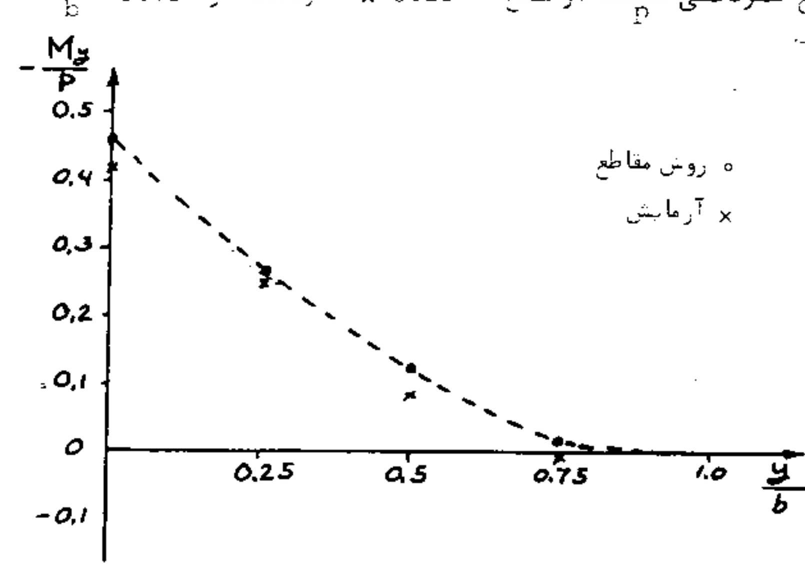
جدول فوق نتایج حاصل از روش مقاطع را بازاء استفاده از تعداد جملات متفاوت از

سری فوریه نشان می‌دهد. با دقت به این نتایج می‌توان نتیجه گرفت که معمولاً می‌توان به تعداد ده جمله از سری فوریه در محاسبات مهندسی کفایت نمود. با این همه توصیه می‌شود از جملات بیشتری استفاده گردد تا نتایج حاصل برای هر نوع بارگذاری (منفرد یا گسترده) دارای دقت کافی باشد.

۲ــ توزیع لنگرخمشی $\frac{M_y}{p}$ در مقطع $x=0$ ، موقعیت بار $\frac{c}{b}=0.75$



۳ــ توزیع لنگرخمشی $\frac{M_y}{p}$ در مقطع $x=0.25b$ ، موقعیت بار $\frac{c}{b}=0.75$



۸ ـ ضمائم

ضمیمه (۱) مشخصات توابع

$$\alpha_m=\frac{m\pi b}{2l}$$

$$\Theta(m,y)=\frac{(4ch\alpha_m-2\alpha_m sh\alpha_m)ch\frac{m\pi y}{l}+2\frac{m\pi y}{l}sh\frac{m\pi y}{l}ch\alpha_m}{sh2\alpha_m+2\alpha_m}$$

$$\bar{\Theta}(m,y)=\frac{(4sh\alpha_m-2\alpha_m ch\alpha_m)sh\frac{m\pi y}{l}+2\frac{m\pi y}{l}ch\frac{m\pi y}{l}sh\alpha_m}{sh2\alpha_m-2\alpha_m}$$

$$\varphi(m,y)=\frac{2\alpha_m sh\alpha_m\ ch\frac{m\pi y}{l}-2\frac{m\pi y}{l}sh\frac{m\pi y}{l}ch\alpha_m}{sh2\alpha_m+2\alpha_m}$$

$$\bar{\varphi}(m,y)=\frac{2\alpha_m ch\alpha_m\ sh\frac{m\pi y}{l}-2\frac{m\pi y}{l}ch\frac{m\pi y}{l}sh\alpha_m}{sh2\alpha_m-2\alpha_m}$$

$$\eta(m,y)=\frac{(2sh\alpha_m-2\alpha_m ch\alpha_m)ch\frac{m\pi y}{l}+2\frac{m\pi y}{l}sh\frac{m\pi y}{l}sh\alpha_m}{sh2\alpha_m+2\alpha_m}$$

$$\bar{\eta}(m,y)=\frac{(2ch\alpha_m-2\alpha_m sh\alpha_m)sh\frac{m\pi y}{l}+2\frac{m\pi y}{l}ch\frac{m\pi y}{l}ch\alpha_m}{sh2\alpha_m-2\alpha_m}$$

$$\psi(m,y)=\frac{(2sh\alpha_m+2\alpha_m ch\alpha_m)ch\frac{m\pi y}{l}-2\frac{m\pi y}{l}sh\frac{m\pi y}{l}sh\alpha_m}{sh2\alpha_m+2\alpha_m}$$

$$\bar{\psi}(m,y)=\frac{(2ch\alpha_m+2\alpha_m sh\alpha_m)sh\frac{m\pi y}{l}-2\frac{m\pi y}{l}ch\frac{m\pi y}{l}ch\alpha_m}{sh2\alpha_m-2\alpha_m}$$

$$\Theta(m)=\frac{4ch^2\alpha_m}{sh2\alpha_m+2\alpha_m}\qquad\qquad \bar{\Theta}(m)=\frac{4sh^2\alpha_m}{sh2\alpha_m-2\alpha_m}$$

$$\eta(m)=\frac{sh2\alpha_m-2\alpha_m}{sh2\alpha_m+2\alpha_m} \qquad \bar{\eta}(m)=\frac{sh2\alpha_m+2\alpha_m}{sh2\alpha_m-2\alpha_m}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}(m)=\frac{4sh^2\alpha_m}{sh2\alpha_m+2\alpha_m} \qquad \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}(m)=\frac{4ch^2\alpha_m}{sh2\alpha_m-2\alpha_m}$$

$$\Delta_1=\Delta_5=\frac{\frac{1+\nu}{2}sh2\alpha_m-\alpha_m(1-\nu)}{[\frac{3+\nu}{2}sh2\alpha_m-\alpha_m(1-\nu)](1-\nu)}$$

$$\bar{\Delta}_1=\bar{\Delta}_5=\frac{\frac{1+\nu}{2}sh2\alpha_m+\alpha_m(1-\nu)}{[\frac{3+\nu}{2}sh2\alpha_m+\alpha_m(1-\nu)](1-\nu)}$$

$$\Delta_2=\frac{ch^2\alpha_m}{[\frac{3+\nu}{2}sh2\alpha_m-\alpha_m(1-\nu)](1-\nu)}$$

$$\bar{\Delta}_2=\frac{sh^2\alpha_m}{[\frac{3+\nu}{2}sh2\alpha_m+\alpha_m(1-\nu)](1-\nu)}$$

$$\Delta_3=\frac{\frac{3-\nu}{2}sh2\alpha_m-\alpha_m(1-\nu)}{[\frac{3+\nu}{2}sh2\alpha_m-\alpha_m(1-\nu)](1-\nu)}$$

$$\Delta_4=\Delta_6=\frac{sh^2\alpha_m}{[\frac{3+\nu}{2}sh2\alpha_m-\alpha_m(1-\nu)](1-\nu)}$$

$$\bar{\Delta}_4=\frac{ch^2\alpha_m}{[\frac{3+\nu}{2}sh2\alpha_m+\alpha_m(1-\nu)](1-\nu)}$$

V_l : تغییر مکان در امتداد محور y لبهٔ چپ صفحه
W_r : تغییر مکان در امتداد محور z لبهٔ راست صفحه
W_l : تغییر مکان در امتداد محور z لبهٔ چپ صفحه

ضمیمه (۳) ـ منابع استفاده شده در تنظیم مقاله

1. J.T.oden"Meehanics of Elastic Structures". Mc.Graw-Hill Book Company-1967
2. Richard G.Budynas"Advanced strength and Applied stress Analysis"McGraw-Hill Book Company-1977
3. Omer W.BlodgeH "Design of welded structures " the James F.Lincoln Arc Welding Foundation - 1966
4. Feridun Irani"Etade des platelages Metalligues de Type Arnoolin" -197(
5. Shih toh chang,Jiang Zhi Gang"Analysis of Cantilever Decks of Thin-Walled Box Girder - Bridges" ASCE Journal of structural Enginee-ring Vol.116,No.9,Sept.1990

۶ ـ فریدون ایرانی" روش مقاطع به کمک تئوری صفحات" نشریه دانشکده مهندسی دانشگاه مشهد جلد ۲ شماره ۱