



مهران کدخدایان¹، فرزاد مویدیان²
گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

بر اساس مدل دو بعدی تنش صفحه ای و فانکشنال دو شاخه ای بر اساس تئوری عمومی یکتایی هیل در مختصات قطبی، شرایط بحرانی چروکیدگی لبه پلاستیک ورق های گرد (تعداد موج های تشکیل شده در لبه ورق و همچنین محدوده چروکیدگی آن)، طی فرآیند کشش عمیق به طور تحلیلی و به منظور بهبود نتایج قبلی به دست آورده شده است. در این حل تحلیلی، در به دست آوردن فانکشنال دو شاخه ای از تئوری تغییر شکل کوچک (بدون در نظر گرفتن کشیدگی لایه میانی) استفاده شده است. همچنین یک حل تحلیلی مناسب برای به دست آوردن تعداد موج و بار بحرانی در ناحیه پلاستیک بر اساس معیار تسلیم ترسکا و در نظر گرفتن یک میدان تنش غیر خطی و همچنین تئوری تغییر شکل در پلاستیسیته به دست آورده شده است. مزیت قابل توجه نتایج به دست آمده با این روش نسبت به نتایج سایر مولفین که اغلب از روش های عددی استفاده نموده اند به دست آوردن پاسخ صریح برای مقادیر بحرانی می باشد.

کلمات کلیدی: چروکیدگی پلاستیک- فانکشنال دو شاخه ای- تئوری تغییر شکل کوچک- فرآیند کشش عمیق

- 1- دانشیار مهندسی مکانیک، طراحی کاربردی
- 2- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، طراحی کاربردی



**Analytical study on plastic flange wrinkling of circular plates
using small deflection theory**

Mehran Kadkhodayan¹, Farzad Moayyedian²

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad

Abstract

Based on two-dimensional plane stress wrinkling model of an elastic annular plate and a bifurcation functional from Hill's general theory of uniqueness for polar coordinate, the critical conditions for the plastic wrinkling of the flange of a circular blank during the deep-drawing process are obtained analytically to improve upon previously given results. A closed-form solution for the critical drawing stress is developed based on Tresca yield criterion, an obtained nonlinear plastic stress field and the deformation theory of plasticity. The main idea of this research is using the analytical and explicit solutions for critical conditions on onset of wrinkling when the small deflection theory is applied.

Keywords: Plastic wrinkling - Bifurcation functional - Small deflection theory - Deep drawing process

¹ Phd

² Phd Student



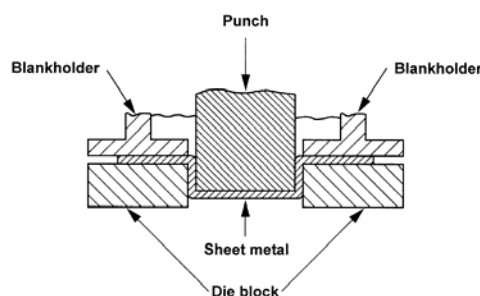
1- مقدمه

چروکیدگی از مهمترین معیارهای ساقط شدن در فرآیندهای شکل دهی ورق ها می باشند. تنش های مازاد فشاری سبب بروز پدیده چروکیدگی در فرآیندهای شکل دهی می شوند. در یک فرآیند کشش عمیق ورق گرد که به وسیله یک پانچ استوانه ای درون قالب کشیده می شود شکل (1)، لبه داخلی ورق گرد سوراخ دار در معرض تنشهای کششی شعاعی و فشاری محیطی که در طول فرآیند ایجاد می شود، قرار می گیرد. در این صورت جهت مطالعه تحلیلی، می توان از صفحه گرد با سوراخ مرکزی که لبه داخلی آن تحت تنش کششی قرار دارد استفاده کرد، شکل (2). برای ابعاد مشخص ضخامت و ابزار کشش، یک نسبت بحرانی ضخامت / قطر موجود می باشد، که بالاتر از آن تنش فشاری محیطی سبب بروز کماتش الاستیک یا پلاستیک لبه ورق می شود. بنابراین شاهد یک مد نامطلوب تغییر شکل خواهیم بود که خودش را به صورت موج های تولیدی در لبه ورق نشان می دهد شکل (3). فانکشنال دوشاخه ای زیر توسط هاجینسون و بر اساس تئوری عمومی یکتایی هیل و دوشاخه ای شدن در مواد الاستوپلاستیک بیان شده است [3-1]:

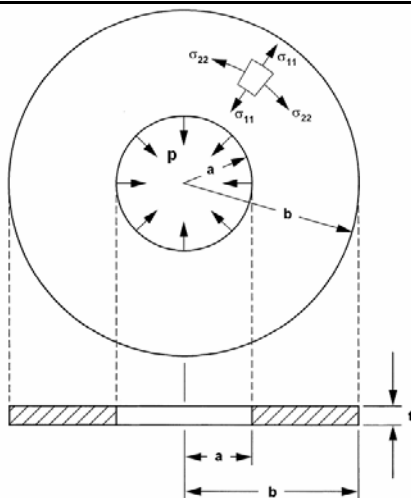
$$F = \frac{1}{2} \iint (M_{ij} K_{ij} + N_{ij} \varepsilon_{ij}^0 + N_{ij} w_{,i} w_{,j}) ds, \quad (1)$$

به قسمی که s نمایانگر ناحیه سطح میانی پوسته که در آن چروک ها پدیدار می شوند، می باشد. به علاوه t ، ضخامت پوسته، w ، تغییر مکان چروکیدگی عمود بر صفحه میانی در جهت z ، u و v تغییر مکان های درون صفحه ای در جهات r و θ ، N_{ij} ، برآیند تنش، M_{ij} ، گشتاور تنش (در واحد طول)، K_{ij} ، تانسور کرنش خمشی (یا تانسور تغییر انحناء) و ε_{ij}^0 ، تانسور کرنش کشیدگی لایه میانی می باشند. این فانکشنال دو شاخه ای انرژی کل برای وقوع چروکیدگی را نشان می دهد.

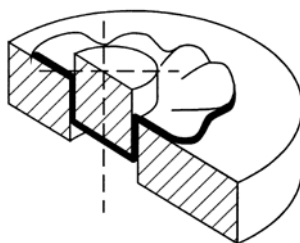
اولین ترم این فانکشنال اگر $i = j$ بیانگر انرژی خمشی است و اگر $i \neq j$ بیانگر انرژی پیچشی است. ترم دوم بیانگر انرژی کرنشی به دلیل تنش های غشائی است، در حالی که ترم سوم بیانگر کار انجام شده به وسیله تنش های اعمال شده به صفحه میانی ورق می باشد. برای تمام میدان های تغییر مکان u ، v و w ، اگر $F > 0$ باشد در این صورت جواب های تغییر شکل یکتا هستند و دوشاخه ای شدن غیر ممکن است، شرط $F = 0$ ، مطابق شرایط بحرانی برای بروز چروک ها برای برخی میدان های تغییر شکل غیر صفر می باشد [3].



شکل (1)، فرآیند کشش عمیق با استفاده از پانچ استوانه ای.



شکل (2)، لبه ورق گرد به صورت صفحه گرد با سوراخ مرکزی که در لبه داخلی آن تحت تنش کششی شعاعی قرار گرفته است، مدل شده است.



شکل (3)، چروک های ایجاد شده در لبه ورق.

2- بررسی تحلیلی چروکیدگی پلاستیک صفحات گرد با سوراخ مرکزی در فرآیند کشش عمیق

چنان که می دانیم دو نوع تئوری تغییر شکل و نموی در پلاستیسیته وجود دارد. در تئوری تغییر شکل رابطه تنش- کرنش به تاریخچه بارگذاری بستگی ندارد. در این تئوری حالت تنش، σ_{ij} ، به طور منحصر به فرد به حالت کرنش کلی، ϵ_{ij} مربوط شده است و کرنش پلاستیک، ϵ_{ij}^p ، در طول فرآیند تغییر شکل پلاستیک تعیین می گردد. به دلیل سادگی نسبی، این تئوری به طور وسیعی در مهندسی و مسائل الاستیک-پلاستیک مورد استفاده قرار می گیرد. ارزش عمومی این تئوری به بارگذاری تدریجی تحت شرایط زیر بستگی دارد.

1- مولفه های تنش در طی فرآیند بارگذاری تقریباً به طور متناسب افزایش یابند.

2- در طی فرآیند تغییر شکل پلاستیک باربرداری وجود نداشته باشد.

در تئوری نموی، بر خلاف تئوری تغییر شکل، وابستگی رابطه تنش-کرنش به تاریخچه بارگذاری حائز اهمیت می باشد. در این تئوری، نمو کرنش پلاستیک، $d\epsilon_{ij}^p$ ، به نمو تنش، $d\sigma_{ij}$ ، در طی فرآیند تغییر شکل پلاستیک مرتبط می شود. بارگذاری در صفحه گرد با سوراخ مرکزی تمامی شرایط تئوری تغییر شکل را دارا می باشد. بنابراین به دلیل سادگی و دارا بودن شرایط، استفاده از تئوری تغییر شکل نسبت به تئوری نموی ارجحیت پیدا می کند.

اکنون فانکشنال ذکر شده برای بررسی چروکیدگی پلاستیک صفحات گرد با سوراخ مرکزی، با استفاده از



تئوری تغییر شکل کوچک به دست آورده می شود. برای به دست آوردن این فانکشنال ابتدا به تعاریف زیر در صفحات گرد نیاز است:

هنگامی که دو سیستم مختصات بر روی سطح میانی ورق تغییر شکل نیافته (قبل از وقوع چروکیدگی) قرار گیرند، نقاط درون صفحه به وسیله دو مختصات r و θ که بر روی صفحه میانی قرار دارند و مختصات z عمود بر سطح میانی تغییر شکل نیافته تعیین می شوند، بنابراین K_{ij} ، کرنش خمشی (یا تغییر انحاء) در صفحه میانی در حالت سه بعدی به صورت زیر تعریف می شود.

$$K_{ij} = -W_{,ij} \quad (2)$$

به قسمی که W ، تغییر مکان چروکیدگی، عمود بر صفحه میانی و در جهت z ، می باشد. مولفه های K_{ij} ، برای صفحه گرد با سوراخ مرکزی و حالت تنش صفحه ای به صورت زیر می باشد.

$$\begin{cases} K_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \\ K_{22} = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \\ K_{12} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (3)$$

بر آیند نیروها و گشتاورها نیز در حالت کلی برای صفحه ای به ضخامت t ، به صورت زیر تعریف می گردند.

$$\begin{cases} N_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{ij} dz, \\ M_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{ij} z dz. \end{cases} \quad (4)$$

معادله مشخصه برای ماده الاستیک-پلاستیک و مطابق تئوری تغییر شکل در حالت سه بعدی به صورت زیر می باشد.

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl}^{ep} \varepsilon_{kl} \quad (5)$$

به قسمی که L_{ijkl}^{ep} برای ماده کاملاً پلاستیک در حالت سه بعدی به صورت زیر است [4].

$$L_{ijkl}^{ep} = L_{ijkl}^e - \frac{L_{ijkl}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} L_{pqkl}^e}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} L_{rstu}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}}}. \quad (6)$$

برای به دست آوردن L_{ijkl}^{ep} به دلیل سادگی و داشتن حل تحلیلی، می توان از معیار تسلیم ترسکا استفاده کرد. (7)

$$f = \sigma_r - \sigma_\theta - Y = 0.$$

در نتیجه می توان با بسط معادله (5) به ازای $i, j = 1, 2, 3$ و ساده کردن عبارت به دست آمده برای حالت تنش صفحه ای (یعنی قرار دادن $\sigma_{33}, \tau_{13}, \tau_{23}$ برابر با صفر) و همچنین استفاده از معادله (6) و (7) برای به دست آوردن L_{ijkl}^{ep} ، به رابطه مشخصه الاستیک-پلاستیک ساده ای بر اساس تئوری تغییر شکل در پلاستیسیته و معیار



تسلیم ترسکا در حالت تنش صفحه ای دست یافت، که به صورت زیر می باشد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{2(1-\nu)} & \frac{E}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{E}{2(1-\nu)} & \frac{E}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ε_{ij} ، تانسور لاگرانژی کرنش برای هر نقطه درون صفحه به فاصله z ، از صفحه میانی و در حالت سه بعدی، برای حالت تغییر شکل کوچک به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\varepsilon_{ij} = z\kappa_{ij}. \quad (9)$$

با جایگذاری معادله (9) در معادله (5) و جای گذاری حاصل آن در معادلات (4) برآیند نیروها و گشتاورها به صورت زیر پیدا می شوند.

$$\begin{cases} N_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{ij} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} L_{ijkl}^{ep} \kappa_{kl} z dz = 0, \\ M_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{ij} z dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} L_{ijkl}^{ep} \kappa_{kl} z^2 dz = \frac{t^3}{12} L_{ijkl}^{ep} \kappa_{kl}. \end{cases} \quad (10)$$

در این حالت فانکشنال کلی (1) در مختصات قطبی و با شرایط ذکر شده به صورت زیر تبدیل می شود.

$$F(w) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \left(\frac{t^3}{12} L_{ijkl}^{ep} \kappa_{ij} \kappa_{kl} + t \sigma_{ij} w_{,i} w_{,j} \right) r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{t^3}{12} L_{ijkl}^{ep} \kappa_{ij} \kappa_{kl} r dr d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b t \sigma_{ij} w_{,i} w_{,j} r dr d\theta. \quad (11)$$

با بسط عبارت بالا به ازای $i, j = 1, 2$ و قرار دادن κ_{ij} ، از رابطه (3) در معادله آن، فانکشنال بالا به صورت زیر تبدیل می شود.

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \left\{ \frac{t^3}{12} [L_{1111}^{ep} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)^2 + 2L_{1122}^{ep} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + L_{2222}^{ep} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 + 4L_{1212}^{ep} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2] \right\} r dr d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \left\{ t \left[\sigma_r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sigma_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta. \quad (12)$$

در حالی که تغییر مکان w ، به صورت تابعی از مختصات قطبی r و θ می باشد. اکنون فرض می شود میدان تغییر مکان لبه ورق، فرم زیر را دارا باشد [5 و 6].

$$w(r, \theta) = c(r-a)(1 + \cos n\theta), \quad (13)$$

به قسمی که c مقداری ثابت و n تعداد موج تشکیل شده در لبه ورق می باشند. واضح است که هر مد مورد قابل قبول، شرایط مرزی $w=0$ ، در لبه داخلی ورق $r=a$ ، و همچنین قید $w(r, \theta) \geq 0$ برای بازه $a \leq r \leq b$ را ارضاء می نماید. برای به دست آوردن تعداد موج و بار بحرانی چروکیدگی از طریق فانکشنال به دست آمده، به توزیع تنش در صفحه میانی ورق گرد الاستیک ایزوتروپ با سوراخ مرکزی که لبه داخلی آن تحت تنش



کششی p قرار دارد، قبل از وقوع چروکیدگی (یعنی حالتی که مسئله تقارن هندسی دارد، $v=0$ و $\frac{\partial}{\partial \theta}=0$)، نیاز می باشد [4].

$$\begin{cases} \sigma_r = Y \ln\left(\frac{b}{r}\right) > 0, \\ \sigma_\theta = Y \left[\ln\left(\frac{b}{r}\right) - 1\right] < 0. \end{cases} \quad (14)$$

با جایگذاری معادلات (13) و (14) در فانکشنال (10) و انتگرال گیری از آن و قرار دادن $m = \frac{a}{b}$ و صلابت

خمش $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ ، فانکشنال (10) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$F = \frac{t^3 c^2 E \pi}{96(1-\nu^2)} G^{ep}(m, n, \nu) + \frac{t \pi b^2 c^2 Y}{8} H^{ep}(m, n). \quad (15)$$

به قسمی که توابع $G^{ep}(m, n, \nu)$ و $H^{ep}(m, n)$ به صورت زیر می باشند.

$$\begin{cases} G^{ep}(m, n, \nu) = (1+\nu)[-m^2 + 4m + 2\ln\left(\frac{1}{m}\right) - 3]n^4 + 4[-(1-\nu)m^2 + (1+\nu) \\ (\ln(m) - m) + 2]n^2 + 6\ln\left(\frac{1}{m}\right)(1+\nu), \\ H^{ep}(m, n) = 2\left\{\left[\ln\left(\frac{1}{m}\right)\right]^2 + \ln\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{2}\right\}m^2 - \frac{1}{2}n^2 + 3[(2\ln(m) - 1)m^2 + 1]. \end{cases} \quad (16)$$

از شرط بحرانی چروکیدگی $F=0$ روابط زیر برای به دست آوردن بار بحرانی چروکیدگی به دست می آیند.

$$Y = -\frac{E}{12(1-\nu^2)} \frac{t^2}{b^2} \frac{G^{ep}(m, n, \nu)}{H^{ep}(m, n)}, \quad (17)$$

$$\sqrt{\frac{E}{Y}} \frac{t}{b} = \sqrt{-12(1-\nu^2)} \frac{H^{ep}(m, n)}{G^{ep}(m, n, \nu)}. \quad (18)$$

و هنگامی که

$$\sqrt{\frac{E}{Y}} \frac{t}{b} < \sqrt{-12(1-\nu^2)} \frac{H^{ep}(m, n)}{G^{ep}(m, n, \nu)}, \quad (19)$$

چروکیدگی رخ خواهد داد.

3- نتایج و بحث

برای پیدا کردن تعداد موج بحرانی به شرط دیگری علاوه بر شرط $F=0$ نیاز است، که به صورت $\frac{\partial F}{\partial n}=0$ یا

$\frac{\partial Y}{\partial n}=0$ قابل نمایش می باشد. معادله $\frac{\partial Y}{\partial n}=0$ ، ریشه برای n دارد، ولی تنها یکی از آن ها در بازه مورد نظر

$1 - \frac{a}{b}$ منطقی و قابل قبول می باشد. در شکل (4) با در نظر گرفتن $\nu=0.3$ ، n (ریشه مورد نظر معادله

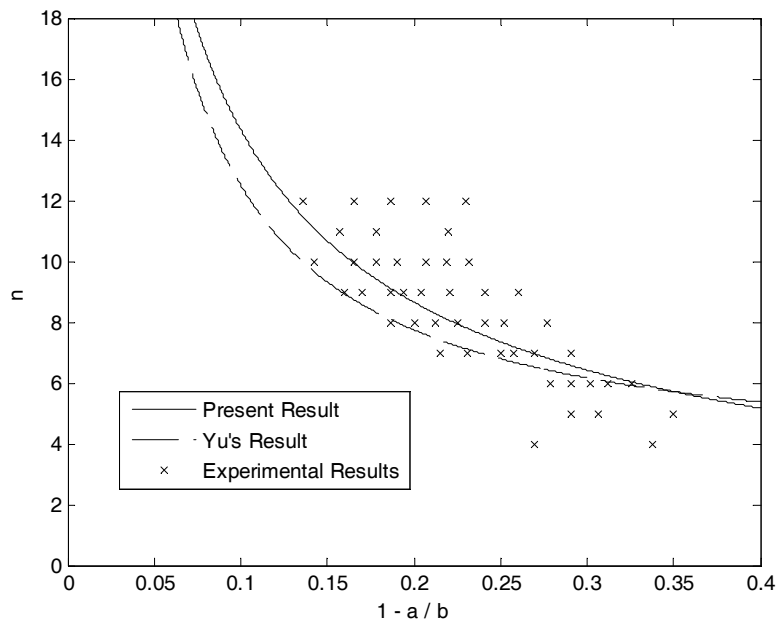
$\frac{\partial Y}{\partial n}=0$) بر حسب $1 - \frac{a}{b}$ رسم شده است که نتایج به دست آمده که با نتایج Yu و نتایج آزمایشگاهی مقایسه

شده است [5]. پس از یافتن $n_{critical}$ از حل معادله $\frac{\partial Y}{\partial n}=0$ با قرار دادن آن در معادله (17) $Y_{critical}$ ، نیز به

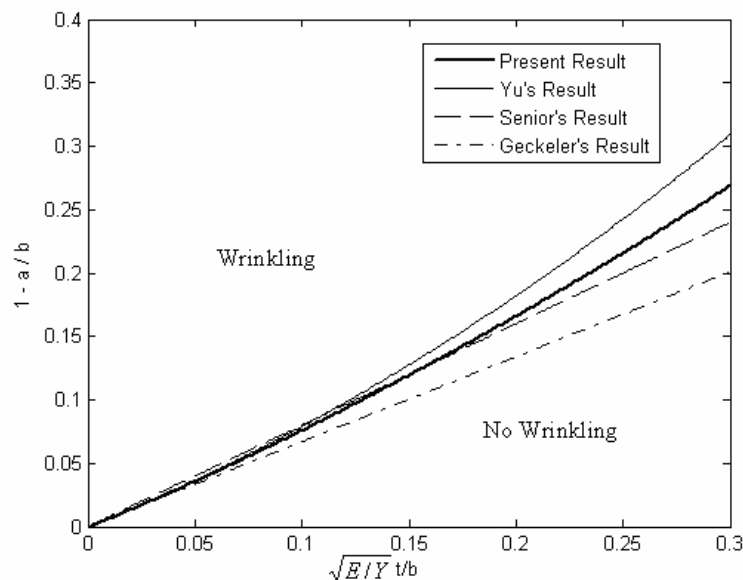
دست خواهد آمد، که در شکل (5) با استفاده از $Y_{critical}$ ، $1 - \frac{a}{b}$ بر حسب $\sqrt{\frac{E}{Y}} \frac{t}{b}$ نشان داده شده است و با



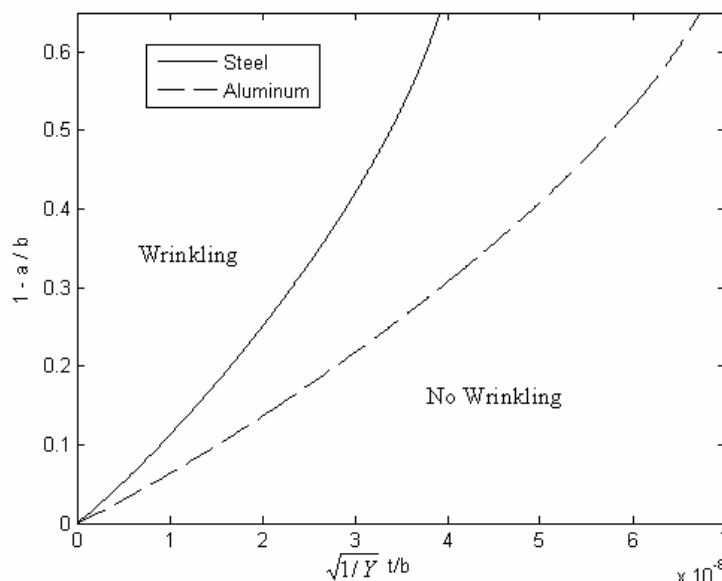
نتایج دیگر مولفین که به ازای n های مختلف به دست آورده شده است، مقایسه گردیده اند. شایان ذکر است که منحنی به دست آمده پوش منحنی های Y_u به ازای n های مختلف می باشد. در شکل (6) به مقایسه محدوده چروکیدگی ورق های فولادی ($E = 200Gpa, \nu = 0.3$) و آلومینیومی ($E = 70Gpa, \nu = 0.25$) پرداخته شده است که مشاهده می شود ورق فولادی در شرایط یکسان ($1 - \frac{a}{b}$ ثابت) دیرتر چروک می شود.



شکل (4)، تعداد موج های تولید شده در چروکیدگی الاستیک لبه ورق گرد در فرآیند کشش عمیق.



شکل (5)، محدوده چروکیدگی الاستیک لبه ورق گرد در فرآیند کشش عمیق.



شکل (6)، مقایسه محدوده چروکیدگی ورق های فولادی و آلومینیومی

نتیجه گیری

شایان ذکر است که در این مطالعه به دست آوردن L_{ijkl}^{ep} بر اساس معیار تسلیم ترسکا سبب به وجود آمدن مولفه های ساده ای برای آن شده است که مستقل از تنش های انحرافی می باشد. این موضوع در این مسئله سبب وجود حل دقیق برای مقادیر بحرانی چروکیدگی شده است که نتایج آن توافق خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارند. تفاوت مقادیر به دست آمده با سایر مولفین با افزایش $1 - \frac{a}{b}$ ، افزایش می یابد زیرا حل انجام شده بر خلاف حل یک بعدی برخی مولفین، دوبعدی است و به واقعیت نزدیک تر می باشد.

مراجع

- [1] Hill, R., "A general theory of uniqueness and stability in elastic/plastic solids", Journal of Mechanics and Physics of Solids, pp. 6-236, 1958.
- [2] Hutchinson, J.W, "Plastic buckling. Advances in Applied Mechanics", pp. 14-67, 1974.
- [3] Wang, C., Kinzel G., and Altan T., "Wrinkling criterion for an isotropic shell with compound curvatures in sheet forming", International Journal of Mechanical Sciences, pp. 945-960, 1994.
- [4] Khan, A. and Hung, S. "Continuum theory of plasticity", John wiley & sons, Canada, 1995.
- [5] Yu, T. X. and Johnson, W., "The buckling of annular plates in relation to deep-drawing process", International Journal of Mechanical Sciences, pp. 175-88, 1982.
- [6] Chu, E., and Xu, Y., "An elastoplastic analysis of flang wrinkling in deep drawing process", Journal of Mechanics and Physics of Solids, pp. 1421-1440, 2001.