تحلیل آیرودینامیکی جریان ناپایدار حول ایرفویل نوسانی با استفاده از روش طیفی- زمانی

مجید ملک جعفریان
استادیار- دانشگاه بیرجند
mmjafarian@excite.com

محمدرضا محقق[۱]
دانشجوی کارشناسی ارشد - دانشگاه بیرجند
mor.mohaghegh@gmail

محمد حسن جوارشکیان
دانشیار- دانشگاه فردوسی مشهد
Javareshkian@um.ac.ir

چکیده

کار حاضر الگوریتمی به نام روش طیفی زمانی[۲]، برای شبیه سازی مسائل ناپایدار نوسانی ارائه می دهد. این الگوریتم از یک تبدیل فوریه گسسته[۳] در زمان استفاده می کند و از این رو حل مستقیماً در یک حالت تناوبی بدون ناپایداری های گذرا[۴] (چیزی که حل را در بیشترطرح های زمان دقیق[۵] تحلیل می برد) پیش می رود. الگوریتم به کار رفته به طور قابل ملاحظه ای دارای سرعت همگرایی بیشتر نسبت به طرح های انتگرال گیری زمانی ضمنی معمول می باشد. همچنین در قیاس با تکنیک های فوریه مبنای[۶] عمومی که معادلات حاکم را در فضای فرکانسی حل می کنند، الگوریتم جدید به کار رفته در این تحقیق تمام محاسبات را در حوزه ی زمانی انجام می دهد، از این رو به کمترین اصلاحات در یک حل کننده موجود نیاز است. مسائل گوناگون متناوب زمانی همچون روتورهای هلیکوپتر، توربین های بادی، توربوماشین و ایرفویل های نوسانی می توانند به وسیله ی روش طیفی زمانی شبیه سازی شوند. صحت الگوریتم حاضر بر روی ایرفویل های نوسانی و مقایسه نتایج حاصله از آن با نتایج آزمایشگاهی، بررسی شده است. نتایج نشان می دهد که الگوریتم طیفی زمانی می تواند به عنوان یک ابزار قدرتمند در مسایل ناپایدار تناوبی مورد استفاده قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: روش طیفی زمانی، جریان متناوب، تبدیل فوریه، جریان تراکم پذیر، ایرفویل در حال نوسان

---

[۱]- نویسنده مسئول

[2] Time spectral method
[3] discrete Fourier transform
[4] Transient
[5] Time accurate
[6] Fourier based methods

مقدمه

اکثر دستگاه هایی که بر مبنای اصول مکانیک سیالات یک نیروی بالابر مفید و یا یک نیروی جلوبرنده تولید می کنند، برای عمل کردن در یک محیط سیال طراحی می شوند که این محیط یا پایا و یا به طور نوسانی ناپایا است. به عنوان مثال جریان حول پره های هلیکوپتر. در این جا هدف توسعه الگوریتمی است که بتواند جریان های دسته ی دوم را با استفاده از تکنیک های دینامیک سیالات عددی[1] پیشگویی کند.
نکته ی کلیدی در محاسبات جریان های ناپایدار، تعادل بین دقت روش و هزینه یا به زبان دیگر همان بازده محاسباتی روش برای یافتن حل مورد نظر می باشد. دقت های بالا و مدل های دقیق یا از لحاظ دسترسی به سخت افزار مورد نیاز، محدودیت دارند، و یا بسیار زمان بر هستند. ازطرفی اکثر مدل های مرتبه ی پایین قسمتی از فیزیک مسئله را نادیده فرض می کنند. لذا محققان به دنبال روش هایی رفتند که تعادلی بین سرعت و دقت برقرار کند. روش جدیدی که در سال های اخیر در تحلیل جریان های ناپایدار اما نوسانی مورد استفاده قرار گرفته است، استفاده از حل کننده های انتگرال گیری زمانی فوریه مبنا می باشد. اولین تلاش در این زمینه روش توازن هارمونیک، ارائه شده توسط هال (۲۰۰۲)[1] ، می باشد. در ادامه مک مولن (۲۰۰۱، ۲۰۰۲، ۲۰۰۶) [2] ، روش حوزه ی فرکانسی غیر خطی (NLFD)[2] را به طور مفصل مورد مطالعه قرارداد، و نشان داد که این روش جهت شبیه سازی های معادلات اویلر دو بعدی روی یک ایرفویل نوسانی، ۸ تا ۱۹ بار سریع تر از طرح های تفاضلی پسرو[3] می باشد. به علاوه نشان داد که این روش از دقت بیشتری نسبت به روش BDF برخوردار است. گوپیناث و جیمسون(۲۰۰۵) [3]و گوپیناث (۲۰۰۷)[4] ، ایده ی انتگرال گیری زمانی بر مبنای سری فوریه را با استفاده از ماتریس کالوکیشن فوریه[4] برای ترم مشتق زمانی، بسط داده اند. اگر چه اساس این روش مشابه روش NLFD است، اما از تبدیلات مستقیم و معکوس در دامنه ی زمانی و فرکانسی پرهیز می کند. معادلات حاکم به جای حوزه ی فرکانسی در حوزه ی فیزیکی(زمانی) حل می شوند، لذا به خدمت گرفتن این روش برای حل کننده های جریان موجود، ساده تر از روش NLFD می باشد. همچنین به دلیل این که از همان ابتدا فرض نوسانی بودن جریان با استفاده از سری فوریه لحاظ شده است، لذا مانند روش های ضمنی و صریح دارای اتلافات اولیه تا رسیدن به حالت پایدار تناوبی نیست، و این امر باعث کاهش مدت زمان لازم برای پاسخ گویی روش های طیفی، در تحلیل جریان های نوسانی می شود. از طرفی این روش با تعداد فواصل زمانی کم، جواب های قابل قبولی را ارائه می دهد. حافظه ی مورد نیاز برای این روش با روش NLFD تقریبا از یک مرتبه هستند اما ٤ تا ٥ برابر طرح های گام زنی زمانی ضمنی مرتبه ی دو می باشد که از معایب این روش محسوب می شود.
در این تحقیق، معادلات اویلر[5] ناپایدار، حاکم بر جریان متناوب زمانی حول ایرفویل نوسانی، با استفاده از روش طیفی زمانی تحلیل می شود.

معادلات حاکم

[1] Computational fluid dynamics
[2] nonlinear frequency domain (NLFD)
[3] BDF
[4] Fourier collocation matrix
[5] Euler equation

پدیده ی فیزیکی مورد مطالعه در این تحقیق، جریان غیر لزج تراکم پذیر حول یک ایرفویل نوسانی می باشد. در حالت کلی جریان های غیر لزج و تراکم پذیر توسط معادلات اویلر مدل می شوند. شکل دیفرانسیلی معادلات اویلر دو بعدی در مختصات کارتزین، به صورت زیر بیان می گردد:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}=0 \qquad (۱)$$

که در این رابطه w بردار مجهولات (متغیر های وابسته) و f و g بردار های شار جابجایی به ترتیب در جهات x و y بوده که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$w=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho e\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

$$f=\begin{bmatrix}\rho(u-x_t)\\ \rho u\,(u-x_t)+p\\ \rho v\,(u-x_t)\\ \rho e\,(u-x_t)+pu\end{bmatrix} \qquad (۳)$$

$$g=\begin{bmatrix}\rho(v-y_t)\\ \rho u\,(v-y_t)+p\\ \rho v\,(v-y_t)\\ \rho e\,(v-y_t)+pv\end{bmatrix} \qquad (۴)$$

با توجه به این که شبکه حل در این جا یک شبکه ی متحرک می باشد، جملات x_t و y_t به ترتیب سرعت شبکه در راستای x و y می باشد. همچنین در روابط فوق ρ چگالی، u و v مؤلفه های سرعت جریان در راستای x و y ، p فشار استاتیک و e مجموع انرژی داخلی و جنبشی بر واحد جرم است. با توجه به این که در این جا سیال هوا می باشد چندان دور از واقعیت نیست که از معادلات گاز کامل استفاده کنیم. لذا،

$$e=\frac{p}{(\gamma-1)}+\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2) \qquad (۵)$$

و دما به صورت

$$T=\frac{p}{(\gamma-1)\rho} \qquad (٦)$$

تعریف می شود.

روش طیفی زمانی

اساس این روش استفاده از تبدیلات فوریه ی گسسته می باشد. از آن جا که ما یک سری فوریه را برای یک تابع تناوبی تعریف می کنیم، لذا استفاده از این سری ها اجباراً حل را در یک وضعیت متناوب قرار می دهند، که این مطابق با فیزیک مسئله و مطلوب ما است.

فرض کنید تابع متناوب f(x) با دوره تناوب T روی N بازه ی مساوی از شبکه ای از نقاط با رابطه ی $x_j=j\Delta x \quad ,j=0,1,2,\ldots, N-1$ تعریف شده باشد. آنگاه تبدیل فوریه گسسته ی تابع f و معکوس آن روی بازه فوق با روابط (۷) و (۸) بیان می شوند [2] :

$$\hat{f}_k=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x)e^{-ik\frac{2\pi}{T}x_j} \qquad (۷)$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{T}\displaystyle\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}\hat{f}_k e^{ik\frac{2\pi}{T}x_j} & : N \text{ is even}\\[2ex] \dfrac{2\pi}{T}\displaystyle\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\hat{f}_k e^{ik\frac{2\pi}{T}x_j} & : N \text{ is odd}\end{cases} \qquad (۸)$$

و مشتق تابع f در نقطه ی j که به مشتق طیفی[1] معروف می باشد به صورت زیر به دست می آید:

[1] Spectral derivative

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_j = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{T}\displaystyle\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} ik\hat{f}_k e^{ik\frac{2\pi}{T}x_j} & : N \text{ is even} \\ \dfrac{2\pi}{T}\displaystyle\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} ik\hat{f}_k e^{ik\frac{2\pi}{T}x_j} & : N \text{ is odd} \end{cases} \qquad (۹)$$

به دلیل نوسانی بودن جریان، هریک از متغیرهای جریان به طور تناوبی در یک پریود معین، تکرار می شوند. لذا بردار متغیر های جریان نسبت به زمان متناوب است. در نتیجه می توان مشتق طیفی آن را نسبت به زمان در nامین فاصله ی زمانی با استفاده از رابطه (۹) به صورت زیر نوشت:

$$D_tW^n = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{T}\displaystyle\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} ik\hat{w}_k e^{ik\frac{2\pi}{T}n\Delta t} & : N \text{ is even} \\ \dfrac{2\pi}{T}\displaystyle\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} ik\hat{w}_k e^{ik\frac{2\pi}{T}n\Delta t} & : N \text{ is odd} \end{cases} \qquad (۱۰)$$

که W^n مقدار بردار حالت در مرحله ی زمانی nام می باشد. عبارت مشتق طیفی حاصل، شامل متغیرهای جریان در حوزه ی فرکانسی $\hat{w}_k$ می باشد. همان طور که در چکیده اشاره شد، یکی از مزایای روش طیفی زمانی و برتری آن نسبت به روش های فوریه مبنای عمومی همچون روش حوزه ی فرکانسی غیرخطی (NLFD) ، رهایی از تبدیلات مستقیم و معکوس فوریه ی سریع(FFT) [1] و حل معادلات تماماً در دامنه ی زمانی است. برای دست یابی به این هدف احتیاج به یک سری عملیات ریاضی می باشد. با ترکیب تبدیل فوریه و معکوس آن و استفاده از خواص سری های هندسی به نتیجه ی زیر دست می یابیم:

$$D_tW^n = \frac{2\pi}{T}\sum_{j=0}^{N-1} d_n^j W^j \qquad (۱۱)$$

در این رابطه ضریب ثابت d_n^j یک ماتریس است که به ماتریس کالوکیشن فوریه[2] معروف می باشد (توضیح بیشتر در پیوست).

رابطه (۱۱) بیان می کند که، مشتق طیفی بردار حالت در هر مرحله ی زمانی برابر مجموعی از ضرایب مقادیر بردار حالت در سایر مراحل زمانی است.
پس از انفصال معادله (۱) برای یک شبکه مشخص در دامنه ی حل، خواهیم داشت:

$$\forall D_t w^n + R(w^n) = 0 \qquad (۱۲)$$

که $\forall$ حجم سلول شبکه (با این فرض که نسبت به زمان تغییر نکند.) و $R(w^n)$ جمله ی حاصل از انفصال بردار های شار می باشد، که به جمله ی باقی مانده معروف می باشد. رابطه ی برداری (۱۲)، یک دستگاه معادله می باشد. برای حل این دستگاه،معادلات را در یک زمان کاذب تا رسیدن به حالت متناوب پایدار پیش می بریم.لذا با اضافه کردن یک ترم مشتق زمانی کاذب به معادله ی (۱۲)، به معادله نهایی برای حل دست خواهیم یافت.

$$\forall \frac{dw^n}{d\tau} + \forall D_t w^n + R(w^n) = 0 \qquad (۱۳)$$

این روش حل را اصطلاحاً گام زنی زمانی دوتایی تکراری[3] نامند. که دو زمان اشاره به زمان های کاذب τ و زمان واقعی t دارد.
اکنون بایستی دستگاه معادلات غیر خطی (۱۳) با یکی از روش های حل دستگاه معادلات، حل شده و تا رسیدن به یک حل پایدار پریودیک ادامه یابد. برای این

---
[1] fast Fourier transform
[2] Fourier collocation matrix
[3] Iterative dual time stepping

منظور در تحقیق حاضر، روش رانگ-کوتای صریح ارائه شده توسط جیمسون[1] و دیگران مورد استفاده قرار گرفته است [5].

تعریف مسئله

برای بررسی صحت روش طیفی زمانی، سه مسئله نمونه ناپایدار تناوبی مورد مطالعه قرار گرفته است.

این نمونه مسایل، ایرفویل های نوسانی می باشند که به دلیل تشکیل و حرکت امواج ضربه ای، در بسیاري از مطالعات تحقیقاتي از آنها استفاده می شود. نام و مشخصات هر یک موارد تست شده در جداول (۱) و (۲) و (۳) داده شده است.

جدول (۱) مشخصات ایرفویل NACA 0012 CT1 [6]

پارامتر	مقدار
عدد ماخ	0.6
متوسط زاویه حمله	
تغییرات زاویه حمله	
فرکانس کاهیده[2]	0.0808
محور پیچش[3]	0.27

جدول (۲) مشخصات ایرفویل NACA 0012 CT2 [6]

پارامتر	مقدار
عدد ماخ	0.6
متوسط زاویه حمله	
تغییرات زاویه حمله	
فرکانس کاهیده	0.0811
محور پیچش	27.3

جدول (۳) مشخصات ایرفویل NACA 0012 CT5 [6]

پارامتر	مقدار
عدد ماخ	0.755
متوسط زاویه حمله	(
تغییرات زاویه حمله	
فرکانس کاهیده	0.0814
محور پیچش	25

ایرفویل مورد مطالعه در معرض یک حرکت نوسانی اجباری در یک میدان جریان از هوا می باشد. حرکت نوسانی سینوسی ایرفویل به صورت تابع تغییرات زاویه ی حمله نسبت به زمان به صورت زیر داده می شود

$$\alpha(t)=\alpha_m+\alpha_0\sin(\omega t) \qquad (۱۴)$$

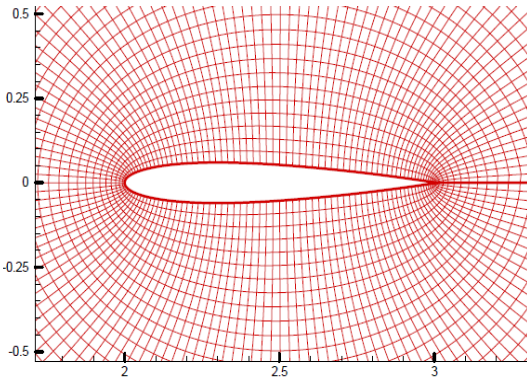
که α_m متوسط زاویه ی حمله، α_0 ماکزیمم دامنه ی نوسان نسبت به مقدار متوسط و ω سرعت زاویه ای که به صورت جمله ی بدون بعد فرکانس کاهیده، k_c بیان می شود. فرکانس کاهیده به صورت زیر تعریف می شود:

$$k_c=\frac{\omega l_c}{2V_\infty} \qquad (۱۵)$$

که در آن طول مشخصه ی l_c، اندازه وتر ایرفویل می باشد.

شبکه ی حل

شبکه ی استفاده شده در کار حاضر یک شبکه ی O-mesh با مرز بیرونی به اندازه ی کافی دور از بدنه جهت دقت بیشتر نتایج، می باشد. همچنین جهت تأیید عدم وابستگی حل به اندازه شبکه، حل توسط سه شبکه با اندازه های متفاوت انجام و نتایج آن در شکل (٦) آورده شده است. در شکل (١) یکی از شبکه های استفاده شده با ابعاد ١٤٧*٤٩ (تعداد ١٤٧ سلول در امتداد محیطی ایرفویل، و ٤٩ سلول در راستای شعاعی) ملاحظه می شود.



شکل(۱) شبکه ی O-mesh با تعداد نقاط ۱٤۷*٤۹

نتیجه‌گیري

برای بررسی صحت و دقت حل، نتایج به دست آمده از روش

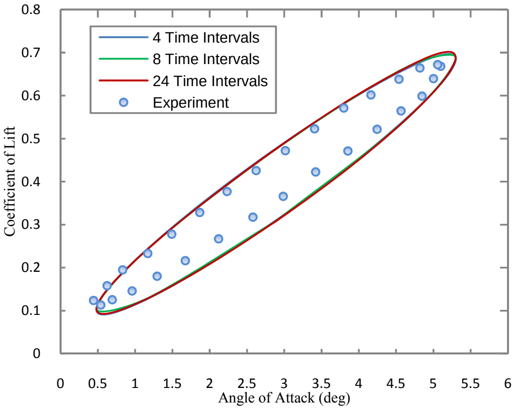
---
[1] Jameson. A
[2] Reduced Frequency
[3] Pitching - axis

طیفی زمانی با نتایج تجربی [۳] ، مقایسه می شود.
نمودار تغییرات ضریب نیروی عمودی بر حسب تغییرات زاویه حمله برای هر سه مسئله در شکل های (۲) و (۳) و (٤) برای تعداد فواصل زمانی مختلف آورده شده است. همان طور که ملاحظه می شود با افزایش تعداد فواصل زمانی، تغییر چندانی در حل به وجود نمی آید. لذا این روش با تعداد کم نقاط و در نتیجه سرعت بیشتر قادر به تسخیر کامل حل در یک پریود می باشد. همچنین برای تأیید سرعت همگرائی بالا و دقت خوب روش طیفی زمانی، مقایسه ای بین سرعت و دقت نتایج برای نمونه مسئله دوم، در شکل (۵) آورده شده است. با یک سیستم سخت افزاری یکسان (پردازش گر دو هسته ای GH ۲.٦٦)، برای رسیدن به همگرایی مناسب، در روش طیفی تنها حدود ۸ دقیقه زمان نیاز است. در حالی این زمان برای روش شبکه سازمان یافته تطبیق پذیر[1] [۷]حدود ۱۵۰دقیقه می باشد. این اختلاف فاحش میان سرعت های همگرایی نشان از سرعت بالای روش طیفی زمانی دارد. همچنین در یک مقایسه با نتایج تجربی، نتایج این روش تا حدودی مناسب تر از روش شبکه تطبیقی می باشد (شکل (۵)).
عدم وابستگی حل به شبکه همانطور که قبلا توضیح داده شد در شکل (٦) آمده است.ملاحظه می شود که تفاوت چندانی در حل برای هر سه مش وجود ندارد.
نمودار توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل در یکی از زوایا که نتایج تجربی آن موجود بوده، برای مساله سوم در شکل (۷) ارائه شده است. تغییرات ناگهانی در نمودار ناشی از تشکیل موج ضربه ای[2] در آن محل می باشد.

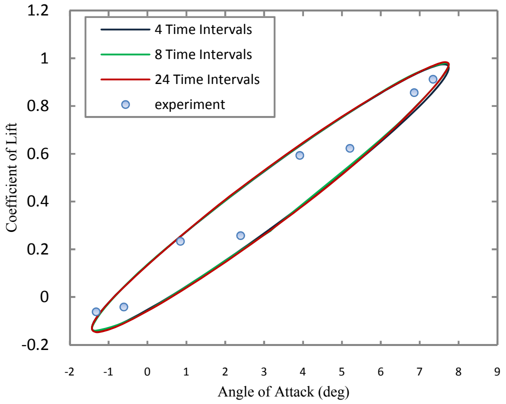
جمع بندی و نتیجه گیری کلی

روش طیفی زمانی به علت دقت خوب، سرعت بسیار بالا، تطبیق راحت با حل کننده های زمان دقیق و حل تمامی معادلات در دامنه ی زمان، روشی مناسب و قدرتمند در تحلیل جریان های ناپایدار تناوبی می باشد.

نمودارها

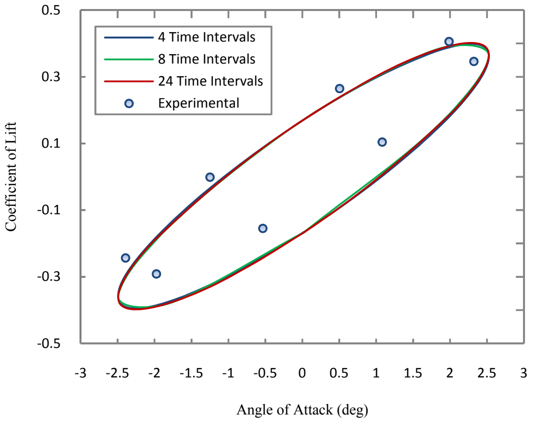


شکل(۲) تغییرات ضریب نیروی عمودی بر حسب زاویه حمله برای CT1

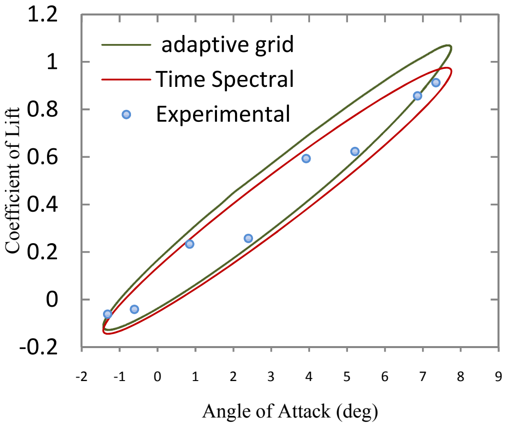


شکل(۳) تغییرات ضریب نیروی عمودی بر حسب زاویه حمله برای CT2

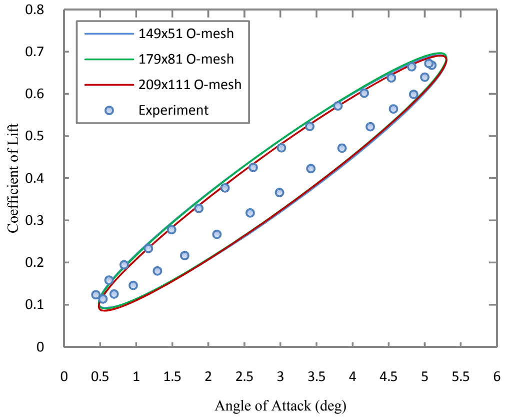
[1] Structured adaptive grid
[2] Shock wave



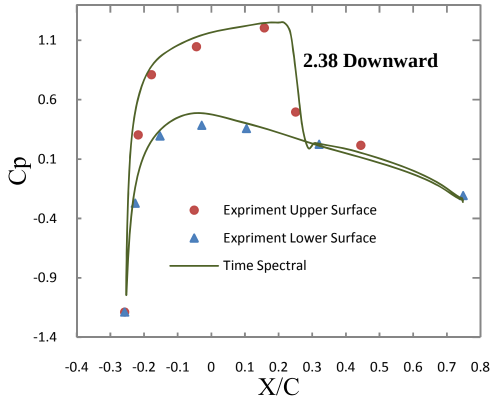
شکل(٤) تغییرات ضریب نیروی عمودی بر حسب زاویه حمله برایCT5



شکل(٥) مقایسه تغییرات ضریب نیروی عمودی بین دو روش تطبیق شبکه و طیفی زمانی برای CT2



شکل(٦) مقایسه نمودار تغییرات ضریب نیروی عمودی بر حسب زاویه حمله با اندازه ی شبکه ی متفاوت برای CT1



شکل (7) تغییرات ضریب فشار روی سطح ایرفویل CT5

پیوست

ماتریس کالوکیشن فوریه[8]

فرمولاسیون زوج

با ترکیب روابط (۷) و (۸) خواهیم داشت:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_n =$$

$$= \frac{1}{N}\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=0}^{N-1} ikf(x_j)e^{-ik\frac{2\pi}{T}x_j}e^{ik\frac{2\pi}{T}x_n}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=0}^{N-1} ikf(x_j)e^{-ik\frac{2\pi}{T}x_j}e^{ik\frac{2\pi}{T}x_n}$$

و با توجه به این که:

$$x_j = \frac{Tj}{N}$$

$$Df|_n$$

$$= \frac{1}{N}\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=0}^{N-1} ikf(x_j)e^{ik\frac{2\pi}{N}(n-j)}$$

و با تعریف پارامتر d_n^j به صورت

$$d_n^j = \frac{1}{N}\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} ike^{ik\frac{2\pi}{N}(n-j)}$$

داریم:

$$Df|_n = \frac{2\pi}{T}\sum_{j=0}^{N-1} d_n^j f(x_j)$$

که ضرب یک ماتریس با عناصر d_n^j را در بردار f نشان می دهد. برای محاسبه ی تحلیلی ماتریس d_n^j از سری های هندسی کمک می گیریم. اگر S یک سری هندسی به صورت زیر باشد:

$$S=\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} e^{ikx}$$

$$=e^{i(-\frac{N}{2}+1)x}+e^{i(-\frac{N}{2}+2)x}+\cdots+e^{i(\frac{N}{2}-1)x}$$

یا

$$S=e^{i(-\frac{N}{2}+1)x}\left[1+e^{ix}+e^{2ix}+\cdots+e^{i(N-2)x}\right]$$

$$=e^{i(-\frac{N}{2}+1)x}\,\frac{1-e^{i(N-1)x}}{1-e^{ix}}$$

با ضرب صورت و مخرج کسر فوق در عبارت $e^{-i\frac{x}{2}}$ داریم:

$$S=\frac{e^{i(-\frac{N}{2}+\frac{1}{2})x}-e^{i(\frac{N}{2}-\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}=\frac{sin(\frac{N-1}{2}x)}{sin\frac{x}{2}}$$

با دیفرانسیل گیری از عبارت فوق رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\frac{dS}{dx}=\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} ike^{ikx}$$

$$=\left(\frac{N-1}{2}cos(\frac{N-1}{2}x)\,sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}cos(\frac{x}{2})\,sin(\frac{N-1}{2}x)\right)/\,(sin\frac{x}{2})^2$$

با استفاده از روابط مثلثاتی و یادآوری این نکته که $x=\frac{2\pi}{N}(n-j)$ آنگاه:

$$sin(\frac{N-1}{2}x)=sin(\frac{Nx}{2}-\frac{x}{2})=-(-1)^{n-j}\,sin\frac{x}{2}$$

$$cos(\frac{N-1}{2}x)=cos(\frac{Nx}{2}-\frac{x}{2})=(-1)^{n-j}\,cos\frac{x}{2}$$

$$\frac{dS}{dx}=\frac{\frac{N}{2}(-1)^{n-j}\,cos\frac{x}{2}\,sin\frac{x}{2}}{(sin\frac{x}{2})^2}=\frac{N}{2}(-1)^{n-j}\,cot\frac{x}{2}$$

بنابراین،

$$d_n^j=\begin{cases}\frac{1}{2}(-1)^{n-j}\,cot(\frac{\pi(n-j)}{N}) & : n\neq j\\ 0 & : n=j\end{cases}$$

فرمولاسیون فرد

محاسبات مشابهی نیز برای فرمولاسیون فرد انجام می گیرد. در این جا تنها به ذکر نتیجه بسنده می کنیم.

$$d_n^j=\begin{cases}\frac{1}{2}(-1)^{n-j}\,cosec\left(\frac{\pi(n-j)}{N}\right) & : n\neq j\\ 0 & : n=j\end{cases}$$

مراجع

[1] Hall K.C.,Thomas J.P., and Clark W.S. "*Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades using a Harmonic Balance Technique*", Technical report, 9th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity Of Turbomachines, Lyon, France, September 2000.

[2] M. McMullen, A. Jameson, and J. J. Alonso. "*Application of a Nonlinear Frequency Domain Solver to the Euler and Navier-Stokes Equations*", AIAA paper 02-0120, AIAA 40th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, January 2002.

[3] Gopinath, A. K. & Jameson, A. "*Time Spectral Method for Periodic Unsteady Computations over Two- and Three-Dimensional Bodies*", In AIAA 43th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit . Reno, NV, AIAA Paper 2005–1220.

[4] Gopinath, A. K. "*Efficient Fourier-Based Algorithms for Time-Periodic Unsteady Problems*", PhD thesis, Stanford University, 2007.

[5] Jameson A., Schmidt W., and Turkel E., " *Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods with Runge-Kutta time stepping schemes", AIAA paper 81-1259*, January 1981.

[6] R.H. Landon. *NACA 0012 Oscillatory and Transient Pitching*. AGARD Report 702, AGARD, January 1982. Dataset 3.

[۷] پسندیده فرد، محمود و ملک جعفریان، مجید و حیدری، علی و سالاری، محسن " تحلیل جریان ناپایا حول ایرفویل نوسانی به کمک شبکه سازمان یافته متحرک تطبیق پذیر" هشتمین کنفرانس سالانه (بین المللي) انجمن هوافضاي ايران IAS2009، اصفهان، شاهین‌شهر، دانشگاه صنعتي مالك‌اشتر، ۲۹ بهمن-۱ اسفند ۱۳۸۷.

[8] Canuto, C., Hussaini, M. Y. "*Quarteroni, A. & Zang, T. A. 2007 Spectral Methods: Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*", 1st edn. Springer–Verlag New York, LLC.